سری کتابهای کمک‌آموزشی کارشناسی ارشد

ریاضی فیزیک ۱ و ۲

مجموعه فیزیک

مؤلف: فرید تقی‌نواز

تقی‌نواز، فرید
ریاضی فیزیک ۱و ۲ کارشناسی ارشد رشته فیزیک/ فرید تقی‌نواز
مهر سبحان، ۹۵
۳۱۷ ص : جدول، نمودار (آمادگی آزمون کارشناسی ارشد فیزیک)
ISBN: 978-600-334-390-0
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
فارسی ـ چاپ دوم
۱- ریاضی فیزیک ۱ و ۲ ۲- آزمونها و تمرینها (عالی)
۳- آزمون دوره‌های تحصیلات تکمیلی ٤- دانشگاهها و مدارس عالی ـ ایران ـ آزمونها
فرید تقی‌نواز
ج ـ عنوان

رده‌بندی دیویی:
کتابخانه ملی ایران

☑ نام کتاب: ریاضی فیزیک ۱ و ۲
☑ مولف: فرید تقی‌نواز
☑ ناشر: مهر سبحان
☑ نوبت و تاریخ چاپ دوم/ ۹۵
☑ تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه
☑ قیمت: ۲۱۰/۰۰۰ ریال
☑ شابک: ISBN ۹۷۸-٦۰۰-۳۳٤-۳۹۰-۰

انتشـــارات مهر سبحان: خیابان ولیعصر، بالاتر از تقـاطع مطهری، روبروی قنـادی هتـل بـزرگ تهـــران، جنب بانک ملی، پلاک ۲۰۵۰ تلفن: ٤- ۸۸۱۰۰۱۱۳

مقدمه ناشر

آیا آنانکه می‌دانند با آنانکه نمی‌دانند برابرند؟ (قرآن کریم)

پس از حمد و سپاس و ستایش به درگاه بی همتای احدیت و درود بر محمد مصطفی، عالی نمونـه بشـریت کـه در تاریـک دور تاریخ، بنا به فرمان نافذ صمدیت از میان مردمی برخاست که خود بودند در پست‌ترین حـد تـوحش و ضـلال و بربریـت و آنگـاه بـا قوانین شامل خویش هم ایشان را راهبری نمود و رهانید از بدویت و استعانت جوییم از قـرآن کـریم، کتـابی کـه هسـت جاودانـه و بی‌نقص تا ابدیت.

کتابی که در دست دارید آخرین ویرایش از مجموعه کتب خودآموز مؤسسه آموزش عالی آزاد ماهان است که برمبنـای خلاصـه درس و تأکید بر نکات مهم و کلیدی و تنوع پرسش‌های چهار گزینه‌ای جمع‌آوری شده است. در این ویرایش ضمن توجه کامل بـه آخرین تغییرات در سرفصل‌های تعیین شده جهت آزمون‌های ارشد تلاش گردیده است که مطالب از منابع مختلـف معتبـر و مـورد تأکید طراحان ارشد با ذکر مثال‌های متعدد بصورت پرسش‌های چهار گزینه‌ای با کلید و در صورت لزوم تشریح کامل ارائه گردد تـا دانشجویان گرامی را از مراجعه به سایر منابع مشابه بی نیاز نماید.

لازم به ذکر است شرکت در آزمون‌های آزمایشی ماهان که در جامعه آماری گسترده و در سطح کشور برگزار می‌گردد می‌توانـد محک جدی برای عزیزان دانشجو باشد تا نقاط ضعف احتمالی خود را بیابند و با مرور مجدد مطالب این کتاب، آنها را برطرف سازند که تجربه سال‌های مختلف موکد این مسیر به عنوان مطمئن‌ترین راه برای موفقیت می‌باشد.

لازم به ذکر است از پورتال ماهان به آدرس www.mahanportal.ir می‌توانید خدمات پشتیبانی را دریافت دارید.

و نیز بر خود می‌بالیم که همه ساله میزان تطبیق مطالب این کتاب با سؤالات آزمون‌های ارشد- که از شاخصه‌های مهم ارزیابی کیفی این کتاب‌ها می‌باشد- ما را در محضر شما سربلند می‌نماید.

در خاتمه بر خود واجب می‌دانیم که از همه اساتید بزرگوار و دانشجویان ارجمند از سراسر کشور و حتی خارج از کشور و همـه همکاران گرامی که با ارائه نقطه نظرات سازنده خود ما را در پربارتر کردن ویرایش جدید این کتاب یاری نمودند سپاسگزاری نموده و به پاس تلاش‌های بی چشمداشت، این کتاب را به محضرشان تقدیم نماییم.

مؤسسه آموزش عالی آزاد ماهان
معاونت آموزش

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول

آنالیز برداری

عناوین اصلی

- ویژگی‌های فضای برداری
- جمع برداری
- چرخش محورهای مختصات
- تبدیل متعامد
- ضرب‌های برداری
- انتگرال‌گیری برداری
- تابع دلتای دیراک

فصل اول

مقدمه:

فیزیک علم اندازه‌گیری است و در هر اندازه‌گیری در مورد هر سیستم فیزیکی با کمیت‌هایی سروکار داریم. به طور کلی کمیت‌ها را در نگاه اول به دو دسته مهم تقسیم می‌کنیم.

۱) کمیت‌های اسکالر یا نرده‌ای که با اندازه‌شان به طور کامل مشخص می‌شوند مانند جرم، زمان، دما و ......

۲) کمیت‌های برداری که علاوه بر اندازه دارای جهت نیز هستند مانند جابجایی، سرعت، شتاب، نیرو، اندازه حرکت و ....

تعریف: یک فضای برداری خطی V مجموعه‌ای از موجوداتی مانند $\vec{C},\vec{B},\vec{A}$ به نام بردار هستند که فضای برداری را می‌سازند.

ویژگی‌های فضای برداری V:

۱) **بسته بودن:** نتیجه اعمالی مانند ضرب و جمع روی اعضای این فضا، خود عضوی از فضا است.

$\vec{A}+\vec{B}\in V$

۲) **توزیع‌پذیری:** ضرب نرده‌ای توزیع‌پذیر است: (a اسکالر است). $a(\vec{A}+\vec{B})=a\vec{A}+a\vec{B}$

۳) **شرکت‌پذیری:** ضرب برداری شرکت‌پذیر است. (b اسکالر است). $(a+b)\vec{A}=a\vec{A}+b\vec{A}$

۴) **توزیع‌پذیر بودن جمع برداری:** جمع برداری توزیع‌پذیر است. $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$

۵) **خاصیت انجمنی جمع برداری:** جمع برداری دارای خاصیت انجمنی است. $\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$

۶) **وجود یک بردار پوچ (عضو واحد):** همواره یک بردار پوچ (عضو واحد) وجود دارد که از رابطه مقابل پیروی می‌کند: $\vec{A}+\vec{O}=\vec{A}$

۷) **عضو وارون:** برای هر بردار $\vec{A}$ عضو وارونی وجود دارد که از رابطه مقابل نتیجه می‌شود: $\vec{A}+(-\vec{A})=O$

ترکیبی خطی از بردارها را اینگونه نمایش می‌دهیم:

$$\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}+\gamma\vec{C}+\ldots(۱)$$

که γ,β,α اعداد حقیقی و $\vec{C},\vec{B},\vec{A}$,... بردار هستند.

نکته: اگر بتوانیم مجموعه‌ای از اعداد حقیقی γ,β,α را بیابیم به طوری که جمع رابطه (۱) صفر شود، می‌گوئیم بردارهای $\vec{C},\vec{B},\vec{A}$ وابسته خطی هستند در غیر این صورت مستقل خطی هستند.

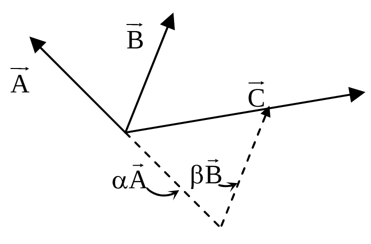
مثال: بردارهای $\hat{j},\hat{i}$ مستقل خطی هستند زیرا رابطه مقابل: $\alpha\hat{i}+\beta\hat{j}=0$

تنها زمانی ارضا می‌شود که هم α و هم β صفر باشند، اگر یکی از آنها غیرصفر باشد داریم $\hat{i}=\frac{-\beta}{\alpha}\hat{j}$ و این غیرممکن است چرا که $\hat{i}$ و $\hat{j}$ برهم عمودند.

نکته: هر سه بردار واقع در یک صفحه وابسته خطی هستند.

نکته: حداکثر بردارهای مستقل خطی در یک صفحه دو است به طوری که هر برداری را می‌توان بر حسب ترکیبی خطی از فقط دو بردار غیر همخط در آن صفحه نوشت.

بردارهای $\vec{C},\vec{B},\vec{A}$ در شکل (۱) وابسته خطی هستند.



شکل (۱)

اندازه برداری مانند $\vec{A}$ از رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{i}$$
$$|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

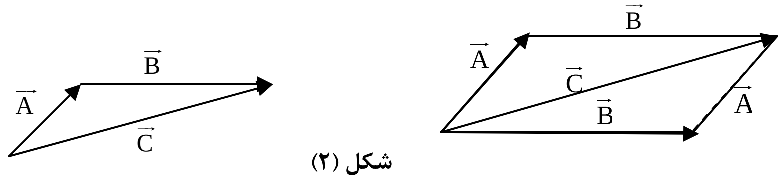
که A_z, A_y, A_x مولفه‌های بردار $\vec{A}$ و $\hat{k}, \hat{j}, \hat{i}$ بردارهای یکه هستند.

نکته:

برداهای یکه، پایه‌هایی هستند که فضای برداری بر روی آنها ساخته می‌شود.

جمع بردارها:

از دیدگاه هندسی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را به دو روش مثلثی و متوازی‌الاضلاع می‌توان جمع زد:



شکل (۲)

قانون مثلثی   قانون متوازی الاضلاع

نکته: اندازه بردار حاصل از جابجایی دو بردار با توجه به جهت‌گیری‌های مختلف دو بردار نسبت به هم می‌توانند بین یک ماکزیمم و مینیمم تغییر کند:

نامساوی مثلثی:

$$\left|\vec{A}\right| - \left|\vec{B}\right| \le \left|\vec{A} + \vec{B}\right| \le \left|\vec{A}\right| + \left|\vec{B}\right|$$

نکته: در مورد بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ می‌توان با داشتن بردارهای $\vec{A} + \vec{B}$ و $\vec{A} - \vec{B}$ بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را به طریق زیر محاسبه کرد:

$$\begin{cases} \vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B}) + \frac{1}{2}(\vec{A} - \vec{B}) \\ \vec{B} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B}) - \frac{1}{2}(\vec{A} - \vec{B}) \end{cases}$$

مثال: بردارهای روبرو را در نظر بگیرید: $\vec{C}_1 = 9\hat{i} + 12\hat{j}$ و $\vec{C}_2 = 3\hat{i} + 4\hat{j}$

که جمع و اختلاف بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ هستند. $\vec{A}$ و $\vec{B}$ کدام‌اند؟

۱) $\vec{A} = 6\hat{i} + 4\hat{j}$, $\vec{B} = 3\hat{i} + 8\hat{j}$

۲) $\vec{A} = 3\hat{i} + 8\hat{j}$, $\vec{B} = 6\hat{i} + 4\hat{j}$

۳) $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$, $\vec{B} = 6\hat{i} + 8\hat{j}$

۴) $\vec{A} = 6\hat{i} + 8\hat{j}$, $\vec{B} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$

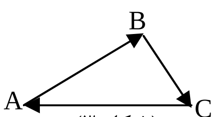
پاسخ: روش اول:

گزینه ۴ صحیح است.

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{C}_1 + \frac{1}{2}\vec{C}_2 = \frac{1}{2}(9\hat{i} + 12\hat{j}) + \frac{1}{2}(3\hat{i} + 4\hat{j})$$
$$\vec{A} = \frac{9}{2}\hat{i} + \frac{3}{2}\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{j} = 6\hat{i} + 8\hat{j}$$
$$\vec{B} = \frac{1}{2}\vec{C}_1 - \frac{1}{2}\vec{C}_2 = \frac{1}{2}(9\hat{i} + 12\hat{j}) - \frac{1}{2}(3\hat{i} + 4\hat{j}) = \frac{9}{2}\hat{i} + 6\hat{j} - \frac{3}{2}\hat{i} - 2\hat{j} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$$

نکته: در هر مثلث که به وسیله سه بردار زیر ساخته می‌شود داریم:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$$



(شکل ۳)

مثال: کدام شرط باید ارضا شود تا بردارهای زیر سه ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه باشند.

$$\vec{A} = a\hat{i} + b\hat{j}$$
$$\vec{B} = c\hat{i} + d\hat{j}$$
$$\vec{C} = e\hat{j} + f\hat{j}$$

۱) $(a+c)\hat{i}+(d+f)\hat{j}=0$ ، $\begin{cases} b=0 \\ e=0 \end{cases}$ ۲) $(a+c)\hat{i}=0$ ، $\begin{cases} b=0 \\ e=0 \end{cases}$

۳) $(c+e)\hat{i}+(b+d)\hat{j}=0$ ، $\begin{cases} a=0 \\ f=0 \end{cases}$ ۴) $c+e=0$ ، $\begin{cases} a=0 \\ f=0 \end{cases}$

☑**پاسخ:** گزینه ۱ صحیح است.

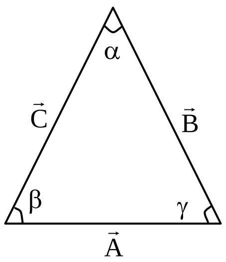
اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد باید دو تا از بردارهای ذکر شده موازی محورهای مختصات باشند لذا در ساده‌ترین حالت باید که $\begin{cases} b=0 \\ e=0 \end{cases}$ و یا $\begin{cases} a=0 \\ f=0 \end{cases}$ از طرفی باید $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=0$

$$\to a\hat{i}+c\hat{i}+d\hat{j}+f\hat{j}=0 \to (a+c)\hat{i}+(d+f)\hat{j}=0$$

قانون سینوسها:

در هر مثلث ساخته شده با بردارهای $\vec{C},\vec{B},\vec{A}$ در شکل (۴) زیر رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{\sin\alpha}{|\vec{A}|}=\frac{\sin\beta}{|\vec{B}|}=\frac{\sin\gamma}{|\vec{C}|}$$



شکل (۴)

مولفه‌های برداری مانند $\vec{A}$ را روی محورهای دکارتی سه بعدی اینگونه نمایش می‌دهیم:

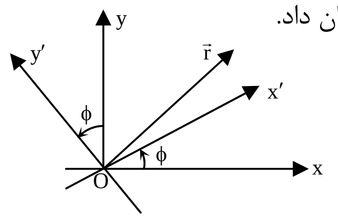
$$\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\vec{k}$$

برای بردارهای مانند $\vec{C}$ که مجموع دو بردار $\vec{B},\vec{A}$ با زاویه θ است می‌توان نشان داد α که:

$$|C|=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta}$$

چرخش محورهای مختصات:

در دو بعُد محورهای مختصات XOY را می‌توان به اندازه زاویه ϕ در جهات پاد ساعتگرد دوران داد. رابطه بین مولفه‌های دستگاه قدیم (بدون پریم) با دستگاه چرخیده (پریم‌دار) عبارت است از:



$$\begin{cases} x'=x\cos\phi+y\sin\phi \\ y'=-x\sin\phi+y\cos\phi \end{cases}$$

با استفاده از نمادگذاری‌های زیر می‌توان روابط بالا را به شکل بسته‌تری نوشت:

$$x'\to x'_1, x\to x_1, \cos\phi\to a_{11}, \sin\phi\to a_{12}$$
$$y'\to x'_2 , y\to x_2, a_{21}\to -\sin\phi , a_{22}\to\cos\phi$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x'_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2 \\ x'_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2 \end{cases} \to x'_i=\sum_{j=1}^{2}a_{ij}x_j \text{ ، } i=1,2$$

در واقع رابطه $x'_i=\sum_{j=1}^{2}a_{ij}x_j$ نمایانگر تبدیلی است که دو دستگاه مختصات را به هم مربوط می‌کند. عناصر a_{ij} که در واقع عناصر و آرایه‌های ماتریسی به نام ماتریس تبدیل هستند ضرائب این تبدیل هستند. چنین تبدیلی را می‌توان به شکل نمایش ماتریسی اینگونه نوشت:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$
$$\to X'=AX \to A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

نکته: تبدیلی که در بالا انجام شد تبدیل منفعل (passive) نام دارد که محورهای مختصات و به عبارتی پایه‌های فضا را دوران می‌دهد و بردار را دست نمی‌زند ولی تبدیل دیگری وجود دارد که بجای عمل کردن روی محورهای دستگاه مختصات، بردارها را دوران می‌دهد که تبدیل فعال (active) نام دارد که این بردار می‌تواند معرف کمیت فیزیکی ما باشد.

ماتریس دوران در سه بُعد: ماتریس دوران به اندازه زاویه ϕ در جهت پادساعتگرد حول محور بعد z عبارت است از:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نکته: عناصر ماتریس تبدیل در دستگاه دکارتی با رابطه زیر داده می‌شوند:

$$a_{ij}=\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}$$

نکته: برای یک تبدیل فعال می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} x_j=\sum\limits_{i=1}^{2} a_{ij}x_i' \\ \dfrac{\partial x_j}{\partial x_i'}=a_{ij} \end{cases}$$

تبدیل متعامد:

همانگونه که می‌دانیم ویژگی محورهای مختصات دکارتی این بود که سه بردار یکه $(\hat{k},\hat{j},\hat{i})$ که پایه‌های فضا هستند بر هم عمودند و یک دستگاه راستگرد تشکیل می‌دهند. حال تبدیلاتی که بر روی این دستگاه‌ها عمل کنند به عنوان مثال دوران دوبعدی و سه بعدی که بحث کردیم این عمود بودن را حفظ می‌کنند و یکی از پیامدهای این تعامد، ثابت ماندن و یا ناوردا ماندن طول بردارها (به عنوان کمیتی اسکالر) خواهد بود.

به عبارتی تبدیلاتی که طول بردار را ناوردا می‌گذارند تبدیل متعامد (orthogonal) نام دارند. می‌توان از همین شرط ثابت ماندن طول یک بردار، رابطه زیر را به عنوان شرط تعامد استخراج کرد:

$$\sum_i a_{ij}a_{ik}=\delta_{jk}$$

نکته: نماد δ_{jk} تابع دلتای کرونکر نام دارد که اینگونه تعریف می‌شود:

$$\delta_{jk}=\begin{cases} 1 & , \quad j=k \\ 0 & , \quad j\neq k \end{cases}$$

مثال: در دوران محورهای مختصات به اندازه زاویه ϕ در جهت پادساعتگرد در دو بعد حول محور z کدام یک از روابط زیر بین عناصر ماتریس تبدیل برقرار نیست:

۱) $a_{11}a_{11}+a_{21}a_{21}=1$ ۲) $a_{11}a_{12}+a_{12}a_{22}=0$

۳) $a_{12}a_{12}+a_{22}a_{22}=1$ ۴) $a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0$

پاسخ: گزینه ۲ صحیح است.

ماتریس تبدیل این سوال عبارت است از:

$$\begin{cases} x_1'=x_1\cos\phi+x_2\sin\phi \\ x_2'=-x_1\sin\phi+x_2\cos\phi \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

در واقع پاسخ را به دو روش می‌توان فهمید. اول از روی رابطه تعامد:

$$\sum_i a_{ij}a_{ik}=\delta_{jk}$$

$$j=k \Rightarrow \delta_{jk}=1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{2} a_{ij}a_{ij}=1$$

$$\Rightarrow j=1,2 \begin{cases} a_{11}a_{11}+a_{21}a_{21}=1 \\ a_{12}a_{12}+a_{22}a_{22}=1 \end{cases}$$

$$j \neq k \Rightarrow \delta_{jk}=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{2} a_{ij}a_{ik}=0$$

$$\Rightarrow a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0$$

از طرفی طبق ماتریس تبدیل، روابط بالا معادل روابط زیر هستند:

$$\begin{cases} \cos^2\phi+\sin^2\phi=1 \\ \sin^2\phi+\cos^2\phi=1 \\ \cos\phi\sin\phi-\sin\phi\cos\phi=0 \end{cases}$$

ولی گزینه شماره ۲ به رابطه نادرست $\cos\phi\sin\phi=\sin\phi\cos\phi$ منجر می‌شود. (غلط است)

ولی گزینه شماره ۲ به رابطه نادرست $\cos\phi\sin\phi+\cos\phi\sin\phi=0$ منجر می‌شود. (صحیح است)

مثال: شرط تعامدی $\sum_i a_{ij}a_{ik}=\delta_{jk}$ را ثابت کنید.

پاسخ: در تبدیل مختصات از دستگاه پریم‌دار به بدون پریم می‌توان نوشت:

$$x_j=\sum_i a_{ij}x'_i$$

و همین‌طور در تبدیل مختصات از دستگاه بدون پریم به پریم‌دار می‌توان نوشت:

$$x'_j=\sum_k a_{jk}x_k$$

با ترکیب این دو رابطه خواهیم داشت:

$$x_j=\sum_i a_{ij}\ x'_i=\sum_i a_{ij}\sum_k a_{ik}\ x_k$$

$$x_j=\sum_{i,k} a_{ij}\ a_{ik}\ x_k$$

برای این‌که به رابطه بدیهی $x_j=x_j$ برسیم باید:

$$\sum_i a_{ij}\ a_{ik}=\delta_{jk}$$

حتماً برقرار شود. اگر در اثبات این رابطه از دستگاه پریم‌دار شروع می‌کردیم به رابطه زیر می‌رسیدیم:

$$x'_j=\sum_{i,k} a_{ji}\,a_{ki}\ x'_k$$

و برای این‌که این رابطه به رابطه بدیهی $x'_j=x'_j$ منجر شود باید:

$$\sum_i a_{ji}\ a_{ki}=\delta_{jk}$$

حتماً برقرار باشد.

نکته: در رابطه $\sum_i a_{ij}\ a_{ik}=\delta_{jk}$ تعامد دو ستون ماتریس $A=[a]_{ij}$ نشان داده شده است در حالی که در رابطه

$$\sum_i a_{ji}\ a_{ki}=\delta_{jk}$$

تعامد دو سطر ماتریس $A=[a]_{ij}$ نشان داده شده است.

تعمیم مطالب دوران و چرخش محورهای مختصات باعث می‌شود که دید روشنی از شکل کلی‌بردارها داشته باشیم. در حالت کلی بردار، موجودی است که تحت دوران مثل مختصات عمل کند.

یعنی:

$$V'_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\ V_j$$

که $a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$ است. این شرط، شرط لازم برای تعریف بردار است یعنی اگر برداری تحت دوران این گونه رفتار نکند قطعاً بردار نیست ولی اگر تحت دوران این‌گونه رفتار کرد باید معیارهای دیگری را نیز از جمله تبدیل تحت تبدیلات آینه‌ای (پاریته) و چیزهای دیگر را هم حتماً امتحان کنیم.

مثال: نشان دهید که ضرب داخلی دو بردار کلی تحت دوران ناوردا است.

پاسخ:

ضرب داخلی $v.w = \sum_i v^i w_i \rightarrow$ در دستگاه بدون پریم

$v'.w' = \sum_j v'^j w'_j \rightarrow$ در دستگاه پریم‌دار

باید نشان دهیم که: $v.w = v'.w'$ است.

$$v'.w' = \sum_j v'_j\ w'^j = \sum v^i w_i = v.w$$

از آنجا که v و w هر دو بردار هستند پس هر دو تحت دوران مانند مختصات عمل می‌کنند.

$$v'.w' = \sum_i v'^i w'_i = \sum_i \sum_j a_{ij} v_j \sum_k a_{ik} w_k$$

$$v'.w' = \sum_i \sum_{j,k} a_{ij}\ a_{ik}\ v_j\ w_k$$

اما از آنجایی که $\sum_i a_{ij}\ a_{ik} = \delta_{jk}$ بود پس (طبق رابطه تعامد)

$$v'.w' = \sum_{j,k} \delta_{jk}\ v_j\ w_k = \sum_j v_j w^j = v.w$$

نکته: در حضور δ_{jk} در عبارت‌های جمعی یکی از اندیس‌های دامی جمع (به دلخواه j یا k) حذف می‌شود و در عبارت مربوطه هرجا که j باشد، k می‌شود یا بالعکس

مثال:

$$\sum_{j,k} \delta_{jk} A_j B_k = \sum_k A_k B_k = \sum_j = A_j B_j$$

مثال: نشان دهید اندازه بردار تحت دوران ناوردا باقی می‌ماند. (دوبُعد)

پاسخ:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|\vec{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

$$x' = x\cos\phi + y\sin\phi$$

$$y' = -x'\sin\phi + y'\cos\phi$$

$$\rightarrow x'^2 + y'^2 = (x\cos\phi + y\sin\phi)^2 + (-x'\sin\phi + y'\cos\phi)^2$$
$$= x^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + y^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi)$$
$$+ 2xy(\cos\phi\sin\phi - \sin\phi\cos\phi) = x^2 + y^2$$
$$\Rightarrow |r| = |\vec{r}'|$$

ضرب برداری:

ضرب داخلی: برای دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ اینگونه تعریف می‌شود:

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$$

۱) $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$

نکته: ضرب داخلی تحت دوران ناوردا می‌باشد.

۲) $\vec{A}.(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$

۳) $\vec{A}.(\alpha\vec{B}) = \alpha\vec{A}.\vec{B}$

α یک اسکالر است.

نکته: تصویر بردار $\vec{A}$ روی بردار $\vec{B}$ برابر است با $\vec{A}.\hat{b}$ که $\hat{b}$ برداری در جهت $\vec{B}$ است.

یک تعبیر فیزیکی برای ضرب داخلی: (کار) $W = \vec{F}.\vec{d} = Fd\cos\theta$ که جابجایی ضرب در تصویر نیرو در راستای جابجایی است.

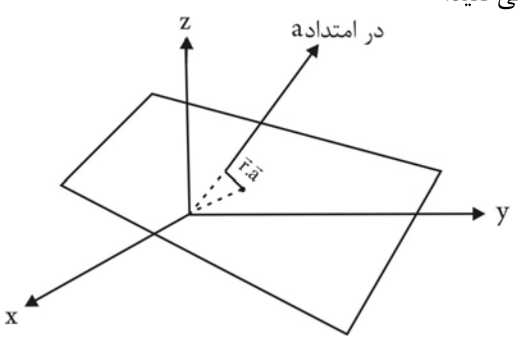
اگر $\vec{A}.\vec{B} = 0$ باشد یعنی دو بردار برهم عمودند. درصورتی که $\vec{A}$ یا $\vec{B}$ هیچ‌کدام بردارهای صفر نباشند و در غیر این‌صورت با یکدیگر زاویه می‌سازند که آن زاویه:

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

خواهد بود.

مثال: به کمک ضرب داخلی معادلات حاکم بر نقاط واقع بر یک صفحه و یک کره را به‌دست آورید.

پاسخ: فرض کنید بردار $\vec{r}$ برداری باشد که از مبدأ به نقطه (x, y, z) وصل شود و $\vec{a}$ نیز بردار دلخواه دیگری باشد. زیرا نقاط واقع بر صفحه و بردارهای آنها بر بردار عمود بر سطح‌شان عمود هستند، لذا اگر این بردار همان بردار $\vec{a}$ باشد پس نقاط واقع بر صفحه از معادله $(\vec{r} - \vec{a}).\vec{a} = 0$ به‌دست می‌آیند که در شکل زیر ملاحظه می‌کنید.



اما کره مکان هندسی نقاطی است که در هر نقطه بردار عمود بر آنها همان بردار خودشان یعنی r است پس $(\vec{r} - \vec{a}).\vec{r} = 0$ مشخص کننده مکان هندسی نقاط واقع بر کره است.

مثال: انرژی بر هم‌کنش بین دو دوقطبی الکتریکی توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$U=-\frac{m_1.m_2}{r^3}+\frac{3m_1.r\ m_2.r}{r^5}$$

که m_1 و m_2 بردارهای دوقطبی و r فاصله بین آنهاست. اگر θ_1 و θ_2 به‌ترتیب زاویه این دو دوقطبی با r باشد، U را برحسب اندازه‌های m_1 و m_2 و زاویه‌های θ_1 و θ_2 بنویسید.

پاسخ:

$$m_1.m_2=m_1m_2\cos(m_1,m_2)=m_1m_2\cos(-\theta_1+\theta_2)$$
$$m_1.r=m_1r\cos\theta_1$$
$$m_2.r=m_2r\cos\theta_2$$
$$\Rightarrow U=-\frac{m_1m_2}{r^3}\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)+\frac{3m_1m_2\cos\theta_1\cos\theta_2}{r^3}$$
$$U=\frac{m_1m_2}{r^3}\left(2\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\right)$$

مثال: اگر θ_1 و φ_1 به‌ترتیب زاویه‌های بردار r_1 با محور z و محور x و بردار r_2 با محور z و x زاویه‌های θ_2 و φ_2 بسازد، زاویه بین r_1 و r_2 را برحسب θ_2,θ_1 و φ_2,φ_1 بازنویسی کنید.

پاسخ:

$$\cos(r_1,r_2)=\frac{\vec{r}_1,\vec{r}_2}{|r_1||r_2|}$$
$$\vec{r}_1.\vec{r}_2=r_1r_2\left(\sin\theta_1\sin\varphi_1\hat{j}+\sin\theta_1\cos\varphi_1\hat{i}+\cos\theta_1\hat{k}\right)\left(\sin\theta_2\sin\varphi_2\hat{j}+\sin\theta_2\cos\varphi_2\hat{i}+\cos\theta_2\hat{k}\right)$$
$$=r_1r_2\left(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\right)$$
$$\Rightarrow\cos(r_1,r_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)$$

حاصل ضرب خارجی دو بردار: برای دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ اینگونه تعریف می‌شود:

۱) $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=AB\ \sin\theta$

جهت بردار $\vec{C}$ عمود بر صفحه بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ است. این سه بردار یک دستگاه راستگرد تشکیل می‌دهند.

۲) $\vec{A}\times\vec{B}=-(\vec{B}\times\vec{A})$

برای بردارهای یکه داریم:

۳) $\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0$

نکته: از لحاظ هندسی اندازه حاصل ضرب خارجی دو بردار سطح متوازی الاضلاعی است که بر روی این بردارها بنا می‌شود.

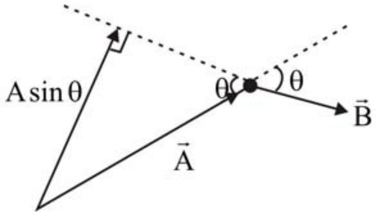
۴) $\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}$$

یک مثال فیزیکی برای حاصل ضرب خارجی اندازه حرکت زاویه‌ای است:

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$$

تعبیر فیزیکی ضرب‌خارجی، ساختن یک بردار عمود بر بردارهای سازنده آن است و اندازه آن برابر است با ضرب یک بردار در فاصله عمودی بردار دیگر از بردار اولی. به شکل زیر دقت کنید.



$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ ، $|C| = A\sin\theta$ ، $B = A\sin\theta\ B$

نکته: برای ضرب خارجی بهتر است از فرمول زیر استفاده کنید:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \ \Rightarrow\ C_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} A_j B_k$$

که ε_{ijk} تانسور مرتبه ۳ است که اگر i ، j ، k به‌صورت دوری تغییر کنند (دورزوج) ۱ است و اگر به‌صورت دور فرد باشند ۱- است و در غیر این‌صورت صفر است.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} ۱ & \text{در جایگشت زوج باشند. } i, j, k \\ -۱ & \text{درجایگشت فرد باشند. } i, j, k \\ ۰ & \text{اگر دو تا از } i, j, k \text{ ها برابر باشند.} \end{cases}$$

مثال: نشان دهید ضرب خارجی دو بردار، بردار است.

پاسخ: برای این‌که نشان دهیم ضرب خارجی دوبردار، بردار است باید نشان دهیم که تحت دوران مانند مختصات عمل می‌کنند. پس:

$$\begin{aligned} C'_i &= \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} A'_j B'_k \\ &= \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \sum_m a_{jm} A_m \sum_n a_{kn} B_n \\ &= \sum_{j,k,m,n} \varepsilon_{ijk}\ a_{jm}\ a_{kn}\ A_m\ B_n \end{aligned}$$

برای یک مولفه خاص مثلاً $i = ۳$ این را اثبات می‌کنیم:

$$C'_۳ = \sum_{j,k} \varepsilon_{۳jk} A'_j B'_k$$

و این نشان می‌دهد که k و j باید ۱ یا ۲ باشند.

$$\begin{aligned} C'_i &= A'_j B'_k - A'_k B'_j \\ &= \sum_\ell a_{j\ell} A_\ell \sum_m a_{km} B_m - \sum_\ell a_{k\ell} A_\ell \sum_m a_{jm} B_m \\ &= \sum_{\ell,m} (a_{j\ell} a_{km} - a_{k\ell} a_{jm}) A_\ell B_m \end{aligned}$$

ℓ و m نیز باید مخالف هم باشند و آنها هم ۱ یا ۲ یا ۳ باشند پس ۶ حالت امکان‌پذیر است.

۱) $a_{۱۱}\ a_{۲۲} - a_{۲۱}\ a_{۱۲}$

۲) $a_{۱۳}\ a_{۲۱} - a_{۲۳}\ a_{۱۱}$

۳) $a_{۲۱}\ a_{۲۳} - a_{۲۲}\ a_{۱۳}$

۴) $a_{۲۱}\ a_{۱۲} - a_{۱۱}\ a_{۲۲}$

۵) $a_{۲۳}\ a_{۱۱} - a_{۱۳}\ a_{۲۱}$

۶) $a_{۲۲}\ a_{۱۳} - a_{۲۳}\ a_{۱۲}$

اما طبق روابط تعامد ماتریس دوران رابطه‌های زیر برقرار است:

۱) $a_{۱۱}\ a_{۲۲} - a_{۲۱}\ a_{۱۲} = a_{۳۳}$

۲) $a_{۱۳}\ a_{۲۱} - a_{۲۳}\ a_{۱۱} = a_{۳۲}$

۳) $a_{۱۲}\ a_{۲۳} - a_{۲۲}\ a_{۱۳} = a_{۳۱}$

پس:

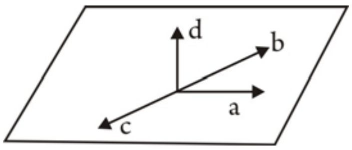
$$C'_۳ = a_{۳۳}\left(A_۱B_۲ - A_۲B_۱\right) + a_{۳۲}\left(A_۳B_۱ - A_۱B_۳\right) + a_{۳۱}\left(A_۲B_۳ - A_۳B_۲\right) = a_{۳۱}C_۱ + a_{۳۲}C_۲ + a_{۳۳}C_۳ \Rightarrow C'_۳ = \sum_n a_{۳n}C_n$$

و برای مولفه‌های دیگر نیز همین برقرار است. پس ضرب خارجی دو بردار، مثل بردار عمل می‌کند.

مثال: اگر a ، b ، c ، d همه در یک صفحه باشند نشان دهید که:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right) = ۰$$

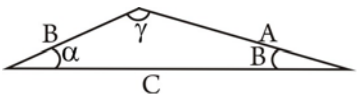
☑**پاسخ:** بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ برداری است که بر a و b عمود است. هم‌چنین بردار $\vec{c}\times\vec{d}$ نیز برداری است که بر c و d عمود است و از آنجا که همه این بردارها در یک صفحه هستند پس بردار عمود بر a و b و بردار عمود بر c و d در یک صفحه هستند و لذا ضرب خارجی‌شان صفر است چون در یک صفحه قرار دارند.



مثال: قانون سینوس‌ها را در مثلثات به کمک ضرب خارجی اثبات کنید.

$$\frac{\sin\alpha}{|A|} = \frac{\sin\beta}{|B|} = \frac{\sin\gamma}{|C|}$$

که α ، β و γ و اضلاع $|A|$, $|B|$ و $|C|$ در شکل زیر نشان داده شده‌اند.



☑**پاسخ:** از آنجا که $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|$ مساحت مثلث ساخته شده از این دو ضلع و ضلع C را نشان می‌دهد. پس:

$$S = \left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = AB\sin\gamma$$

اما می‌توان از ضرب‌های خارجی $\left|\vec{B}\times\vec{C}\right|$, $\left|\vec{C}\times\vec{A}\right|$ نیز همان مساحت را ساخت پس:

$$S = \left|\vec{B}\times\vec{C}\right| = BC\sin\alpha$$

$$S = \left|\vec{C}\times\vec{A}\right| = CA\sin\beta$$

این سه مساحت یکی هستند. پس:

$$AB\sin\gamma = BC\sin\alpha = CA\sin\beta$$

و با تقسیم بر ABC خواهیم داشت:

$$\frac{\sin\gamma}{|C|} = \frac{\sin\alpha}{|A|} = \frac{\sin\beta}{|B|}$$

نکته: از ضرب خارجی دو بردار $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|$ مساحت مثلثی بدست می‌آید که از این دوضلع و بردار $\vec{C} = \vec{A}+\vec{B}$ حاصل می‌شود.

نکته: در مورد تانسورهای ε_{ijk} و ضرب بین آنها رابطه زیر برقرار است:

$$۱)\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnp} = \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{ip} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} & \delta_{jp} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{kp} \end{vmatrix} = \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kp} - \delta_{im}\delta_{jp}\delta_{kn} + \delta_{in}\delta_{jp}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kp} + \delta_{ip}\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{ip}\delta_{jn}\delta_{km}$$

و در سه بعد داریم:

$$۲)\ \varepsilon_{ijk}\ \varepsilon_{inp} = \delta_{jn}\delta_{kp} - \delta_{jp}\delta_{kn}$$

$$۳)\ \varepsilon_{ijk}\ \varepsilon_{ijp} = ۲\delta_{kp}$$

مثال: اتحادهای برداری زیر را ثابت کنید:

۱) $\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C}=\vec{B}(\vec{A}.\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$

۲) $(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{C}\times\vec{D})=(\vec{A}.\vec{C})(\vec{B}.\vec{D})-(\vec{A}.\vec{D})(\vec{B}.\vec{C})$

پاسخ:

۱) $(\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C})_i=\varepsilon_{ijk}A_j(B\times C)_k=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}A_jB_mC_n$

در اینجا از قاعده جمع انیشتین استفاده شده است که طی آن اگر دو اندیس تکراری باشند به معنای جمع بستن روی آن اندیس است. با استفاده از دومین رابطه خواهیم داشت:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}=\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}$$

$$\to\left(\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}\right)A_jB_mC_n=A_nC_nB_i-C_iA_jB_j$$

یا درنوتاسیون برداری داریم:

$$\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C}=\vec{B}(\vec{A}.\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$$

۲) $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right).\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)=\left(A\times B\right)_i\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)_i$

$$=\varepsilon_{ijk}A_jB_k\varepsilon_{imn}C_mD_n$$

$$=\left(\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km}\right)A_jB_kC_mD_n$$

$$=A_jC_jB_kD_k-A_jD_jB_kC_k$$

$$\Rightarrow\left(\vec{A}\times\vec{B}\right).\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)=\left(\vec{A}.\vec{C}\right)\left(\vec{B}.\vec{D}\right)-\left(\vec{A}.\vec{D}\right)\left(\vec{B}.\vec{C}\right)$$

مثال: کدام رابطه برقرار نیست:

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$$

۱) $\vec{A}.\vec{C}=0$

۲) $\vec{B}.\vec{C}=0$

۳) $(\vec{A}-\vec{B})\times(\vec{A}+\vec{B})=2\vec{A}\times\vec{B}$

۴) $(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{A}\times\vec{B})=AB\sin\theta$

پاسخ: گزینه ۴ صحیح است.

زیرا $\vec{A}$ بر $\vec{A}\times\vec{B}$ عمود است.

۱) $\vec{A}.\vec{C}=\vec{A}.(\vec{A}\times\vec{B})=0$ ✓

۲) $\vec{B}.\vec{C}=\vec{B}.(\vec{A}\times\vec{B})=0$ ✓

۳) $(\vec{A}-\vec{B})\times(\vec{A}+\vec{B})=\vec{A}\times\vec{A}-\vec{B}\times\vec{A}+\vec{A}\times\vec{B}-\vec{B}\times\vec{B}=2\vec{A}\times\vec{B}$ ✓

۴) $(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{A}\times\vec{B})=A^2B^2-(\vec{A}.\vec{B})^2=A^2B^2-A^2B^2\cos^2\theta=A^2B^2\sin^2\theta$

ضرب سه گانه اسکالر: $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})$

از لحاظ هندسی این ضرب حجم متوازی السطوحی را نشان می‌دهد. که روی بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ساخته می‌شود.

۱) $\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}.\vec{C}$

که روی بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ ساخته می‌شود.

$$\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C}=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$

۲) $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{C}=\vec{B}.(\vec{C}\times\vec{A})$

نکته: گاهی اوقات از رابطه زیر استفاده خواهیم کرد که در یادآوری روابط مفید است:

$$(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{C}=\left[\vec{A},\vec{B},\vec{C}\right]$$

$$\left[\vec{A},\vec{B},\vec{C}\right]=\left[\vec{B},\vec{C},\vec{A}\right]=\left[\vec{C},\vec{A},\vec{B}\right]=-\left[\vec{A},\vec{C},\vec{B}\right]=-\left[\vec{C},\vec{B},\vec{A}\right]$$

نکته: ضرب سه‌گانه اسکالر $\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C}$ حجم جسمی را نشان می‌دهد که توسط اضلاع A وB و C ساخته می‌شود.

ضرب سه گانه برداری:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}.\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$$

ضرب چهارگانه اسکالر:

$$(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{C}\times\vec{D})=(\vec{C}.\vec{A})(\vec{B}.\vec{D})-(\vec{C}.\vec{B})(\vec{A}.\vec{D})$$

ضرب چهارگانه برداری:

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D})=\left[\vec{C},\vec{D},\vec{A}\right]\vec{B}-\left[\vec{C},\vec{D},\vec{B}\right]\vec{A}$$

مثال: اتحاد ژاکوبی را در مورد ضرب خارجی بردارها ثابت کنید.

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=0$$

پاسخ:

$$\begin{aligned}
&\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}.\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}.\vec{b})\\
&\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}(\vec{a}.\vec{b})-\vec{a}(\vec{b}.\vec{c})\\
+\;&\underline{\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})}=\vec{a}(\vec{b}.\vec{c})-\vec{b}(a.\vec{c})\\
&\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=0
\end{aligned}$$

مثال: بردار $\vec{A}$ را در راستای بردار دلخواهی مانند $\hat{r}$ تجزیه کرده‌ایم. مولفه‌های موازی و عمود بردار $\mathbf{A}$ بر $\hat{r}$ را پیدا کنید.

پاسخ: طبق رابطه مقابل داریم:

$$\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C}=\vec{B}(\vec{A}.\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$$

اگر $\vec{A}=\vec{B}\equiv\hat{r}$ و $\vec{C}\equiv\vec{A}$ باشد و $\hat{r}.\hat{r}=1$ آنگاه:

$$\hat{r}\times\hat{r}\times\vec{A}=\hat{r}(\vec{A}.\hat{r})-\vec{A}$$

$$\Rightarrow\vec{A}=\hat{r}(\vec{A}.\hat{r})-\hat{r}\times(\hat{r}\times\vec{A})$$

پس مولفه موازی $\hat{r}$ همان $\vec{A}.\hat{r}$ است و مولفه عمود $-\hat{r}\times\hat{r}\times\vec{A}$ است.

مثال: اگر بردار D را برحسب بردارهای غیر هم صفحه A و B و C به‌صورت

$$\vec{D}=a\vec{A}+b\vec{B}+c\vec{C}$$

تجزیه کنیم، ضرایب a و b و c را پیدا کنید.

پاسخ: از آنجا که $C.(B\times C)=B.(B\times C)=0$ پس:

$$\vec{D}.(\vec{B}\times\vec{C})=a\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})\Rightarrow a=\frac{\vec{D}.(\vec{B}\times\vec{C})}{A.\vec{B}\times\vec{C}}$$

و همین‌طور برای b یا c هم از همین واقعیت استفاده می‌کنیم که در ضرب سه‌گانه اسکالر اگر دو تا از بردارها یکی باشند، حاصل صفر است پس:

$$b=\frac{\vec{D}.(\vec{C}\times\vec{A})}{\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C}}$$

$$c=\frac{\vec{D}.(\vec{A}\times\vec{B})}{\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C}}$$