بسم الله الرحمن الرحیم

ساختمان‌های گسسته

سری کتاب‌های کمک آموزشی کارشناسی ارشد

مجموعه مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات

مؤلفان: داوود حیدری‌کانی ـ علی‌اصغر فضل‌اللهی آقاملکی

سرشناسه	: حیدری‌کانی، داوود،۱۳۶۸
عنوان	: ساختمان‌های گسسته
مشخصات نشر	: تهران: مشاوران صعود ماهان، ۱۴۰۱
مشخصات ظاهری	: ۱۴۳ ص
فروست	: سری کتاب‌های کمک آموزشی کارشناسی ارشد
شابک	: ۹۷۸-۶۰۰-۴۵۸-۸۰۶-۵
وضعیت فهرست نویسی	: فیپای مختصر
یادداشت	:این مدرک در آدرس http://opac.nlai.ir قابل دسترسی است.
شناسه افزوده	: فضل‌اللهی آقا ملکی، علی‌اصغر، ۱۳۶۸
شماره کتابشناسی ملی	: ۳۷۲۶۷۷۶

نام کتاب: .... **ساختمان‌های گسسته**

مولفان:..................**داوود حیدری‌کانی، علی‌اصغر فضل‌اللهی آقا ملکی**

ناشر:.. ....**مشاوران صعود ماهان**

مدیر تولید محتوی: ....**سمیه بیگی**

نوبت و تاریخ چاپ: .... **اول ۱۴۰۱**

تیراژ: .... **۱۰۰۰ نسخه**

قیمت:.. **۲/۰۹۰/۰۰۰ ریال**

شابک: **ISBN۹۷۸-۶۰۰-۴۵۸-۸۰۶-۵**

انتشـــارات مشاوران صعود ماهان: خیابان ولیعصر، بالاتر از تقـاطع مطهری،

روبروی قنادی هتل بزرگ تهـــران، جنب بانک ملی، پلاک ۲۰۵۰

تلفن: ۴- ۸۸۱۰۰۱۱۳

سخن ناشر

«ن والقلم و ما یسطرون»

کلمه نزد خدا بود و خدا آن را با قلم بر ما نازل کرد.

به پاس تشکر از چنین موهبت الهی، موسسه ماهان درصدد برآمده است تا در راستای انتقال دانش و مفاهیم با کمک اساتید مجرب و مجموعه کتب آموزشی خود برای شما داوطلبان ادامه تحصیل در مقطع کارشناسی ارشد گام موثری بردارد. امید است تلاش‌های خدمتگزاران شما در این موسسه پایه‌گذار گام‌های بلند فردای شما باشد.

مجموعه کتاب‌های کمک آموزشی ماهان به‌منظور استفاده داوطلبان کنکور کارشناسی ارشد سراسری و آزاد تالیف شده‌اند. در این کتاب‌ها سعی کرده‌ایم با بهره‌گیری از تجربه اساتید بزرگ و کتب معتبر داوطلبان را از مطالعه کتاب‌های متعدد در هر درس بی‌نیاز کنیم.

دیگر تالیفات ماهان برای سایر دانشجویان به‌صورت ذیل می‌باشد.

- **مجموعه کتاب‌های ۸ آزمون:** شامل ۵ مرحله کنکور کارشناسی ارشد ۵ سال اخیر به همراه ۳ مرحله آزمون تالیفی ماهان همراه با پاسخ تشریحی می‌باشد که برای آشنایی با نمونه سوالات کنکور طراحی شده است. این مجموعه کتاب‌ها با توجه به تحلیل ۳ ساله اخیر کنکور و بودجه‌بندی مباحث در هریک از دروس، اطلاعات مناسبی جهت برنامه‌ریزی درسی در اختیار دانشجو قرار می‌دهد.
- **مجموعه کتاب‌های کوچک:** شامل کلیه نکات کاربردی در گرایش‌های مختلف کنکور کارشناسی ارشد می‌باشد که برای دانشجویان جهت جمع‌بندی مباحث در ۲ ماهه آخر قبل از کنکور مفید می‌باشد.

بدین‌وسیله از مجموعه اساتید، مولفان و همکاران محترم خانواده بزرگ ماهان که در تولید و به‌روزرسانی تالیفات ماهان نقش موثری داشته‌اند، صمیمانه تقدیر و تشکر می‌نماییم.

دانشجویان عزیز و اساتید محترم می‌توانند هرگونه انتقاد و پیشنهاد درخصوص تالیفات ماهان را از طریق سایت ماهان به آدرس mahan.ac.ir با ما در میان بگذارند.

موسسه آموزش عالی آزاد ماهان

سخن مولف

کتاب ساختمان گسسته که پیش روی شماست، بر اساس منابع اصلی و همچنین منابعی که در سال‌های قبل از آنها سوالاتی مطرح شده (که در انتهای این کتاب نیز آورده شده است). همچنین با توجه به جدیدترین تغییراتی که در سوالات کنکور سراسری و آزاد صورت گرفته، طراحی شده که پس از چندین ویرایش به عنوان یک کتاب کمک آموزشی برای داوطلبان کارشناسی ارشد در رشته‌های مهندسی کامپیوتر، مهندسی فناوری اطلاعات و همچنین علوم کامپیوتر در اختیار داوطلبین این رشته‌ها قرار گرفته است.

این کتاب شامل ۷ فصل به همراه پیوست می‌باشد که در انتها، نکات کلیدی مرتبط به همان فصل آورده شده است که علاوه بر آن سوالات کنکور سراسری و آزاد مربوط به همان فصل قرار داده شده است.

از شما داوطلبان گرامی تقاضا داریم تا در صورت مشاهده مطالبی که قابل فهم برای شما نمی‌باشد و یا اینکه وجود اشکالات ویرایشی، ما را مطلع سازید تا بتوانیم در ویرایش‌های بعدی این اشکالات را برطرف سازیم.

در انتها نیز از دکتر اله بخش یزدانی به خاطر راهنمایی‌هایی که در راستای تالیف این کتاب انجام دادند، کمال تشکر را داریم.

داوود حیدری کانی – علی اصغر فضل‌اللهی

فهرست

فصل اول

منطق ریاضی

- گزاره
- رابط‌های منطقی
- هم‌ارزی
- تابع ارزشی
- مینترم‌ها و ماکسترم‌ها
- سورها

منطق ریاضی

اگر بخواهیم معتبر بودن یک استدلال را تشخیص دهیم، برای این کار می‌توان از مجموعه قواعدی استفاده کرد که به این مجموعه قواعد، منطق گفته می‌شود.

گـزاره

به جمله‌های خبری گفته می‌شود که ممکن است درست یا نادرست باشند ولی نه هر دو؛ یعنی همزمان نمی‌توانند درست یا نادرست باشند. مثلا: ۱۳ یک عدد اول است و جمله چه عصر زیبایی و یا برخیز و به کار خود ادامه بده که جمله‌ای امری می‌باشد گزاره نیستند.

گزاره‌ای که درست باشد را با T (True) و گزاره‌ای که نادرست باشد را با F (False) نشان می‌دهیم.

گزاره‌نما

اگر در یک گزاره از متغیر استفاده کنیم که این گزاره به‌ازای بعضی از مقادیر درست و به‌ازای بعضی مقادیر دیگر نادرست باشد، آنگاه به این گزاره، گزاره‌نما می‌گویند.

انواع گزاره

۱- گزاره ساده: گزاره‌ای که هیچ راهی برای تجزیه آن به گزاره ساده‌تر وجود ندارد.

۲- گزاره مرکب: هرگاه دو یا چند گزاره ساده به کمک رابطه‌های منطقی تشکیل یک گزاره را دهند، گزاره مرکب گویند.

نکته: به $\leftrightarrow$ ، $\rightarrow$ ، $\cup$، $\cap$، $\neg$ نمادهای رابط جمله‌ای گویند که به همراه پرانتزها رابطه‌های منطقی را تشکیل می‌دهند.

رابطهای منطقی

۱) نقیض: [نماد منفی] (Negation): تبدیل گزاره‌هایی مانند P به گزاره $\neg P$ که نقیض آن را نشان می‌دهد گفته می‌شود. این عملگر، یک عملوندی می‌باشد.

P	$\neg P$
F	T
T	F

۲) ترکیب خطی(فصلی)(Disjunction): دو گزاره p و q با $p\cup q$ نشان داده می‌شوند، و زمانی ارزش F دارد که هر دو گزاره p و q، F باشد. که جدول درستی آن به این صورت است:

P	q	$p\cup q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

۳) ترکیب عطفی (Conjunction): دو گزاره دلخواه p و q با $p\cap q$ نشان داده می‌شوند و زمانی ارزش T دارد که هر دو گزاره p و q، T باشند.

P	q	$p\cap q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

۴) ترکیب شرطی (Conditional): دو گزاره p و q با $p\to q$ نشان داده می‌شوند و زمانی ارزش F دارد که q ارزش F و p ارزش T باشد. به p مقدم و به q تالی گویند.

P	q	$p\to q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

۵) ترکیب دو شرطی (bi Conditional): دو گزاره p و q با $p\leftrightarrow q$ نشان داده می‌شوند و زمانی ارزش T دارد که هر دو گزاره p و q هم‌ارزش باشند یعنی هر دو F یا هر دو T باشند.

P	q	$p\leftrightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

۶) ترکیب xor (exclusive or): هر دو گزاره p و q با $p\bar{\cup}q$ نشان داده می‌شوند و زمانی ارزش T دارد که دو گزاره p و q هم‌ارزش نباشند. بنابراین معادل $\neg(p\leftrightarrow q)$ می‌باشند.

P	q	$p\bar{\cup}q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

نام رابط	نمادها	توضیحات
نقیض	$\neg$ و $\sim$ و NOT	
فصلی	$\cup$ و OR	یا
عطفی	$\cap$ و AND	و
شرطی	$\rightarrow$	P شرط کافی برای q، q شرط لازم برای p، اگر p آنگاه q، اگر q آنگاه p.
دوشرطی	$\leftrightarrow$ و $\leftrightarrows$	اگر p آنگاه q و بالعکس، p شرط لازم و کافی است برای q، p اگر و تنها اگر q.

نکته: گزاره راستگو (Tautology): گزاره مرکبی که همیشه ارزش T داشته باشد را [تاتولوژی] گویند.
مانند گزاره $q \rightarrow q$ یا $p \vee \sim p$ همواره درست هستند.

نکته: در منطق گزاره‌ها هر قضیه یک گزاره راستگوست و بالعکس.

نکته: گزاره تناقض (Contradiction): گزاره مرکبی که همیشه ارزش F داشته باشد را تناقض گویند، مانند $\neg p \cap p$

فرمول‌های درست ساخت (well formed formula): به فرمول‌هایی گفته می‌شود که ساخت دستوری درستی دارند. این تعریف دارای نتایج زیر می‌باشد:

الف) هر گزاره نما یک WFF است.

ب) اگر α و β، WFF باشند آن‌گاه $(\neg\alpha)$, $(\alpha \cap \beta)$, $(\alpha \cup \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ نیز WFF است.

ج) هیچ عبارتی WFF نخواهد بود مگر اینکه اجباراً بر طبق الف و ب به‌دست آمده باشد.

نکته: در هر WFF تعداد پرانتزهای چپ و راست برابرند.

مثال: $((A_1 \cap A_2) \rightarrow ((\pi A_3) \cup (A_4 \leftrightarrow A_5)))$ **یک WFF است.**

اما گزاره $(A_1 \cap A_2) \rightarrow A_3$ **یک WFF نیست.**

مثال: تعداد زیر فرمول‌های درست ساخت $(A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow (\neg A_3)$ را به‌دست آورید.

حل: می‌دانیم هر گزاره نما یک فرمول درست ساخت می‌باشد پس A_1، A_2، A_3 هر کدام یک فرمول درست ساخت می‌باشند و نیز $(A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow (\neg A_3)$.

$A_1 \rightarrow A_2, \neg A_3$ هر کدام یک فرمول درست ساخت هستند، پس جمعاً ۶ فرمول درست ساخت داریم.

هم‌ارزی

هرگاه دو گزاره α و β دارای جدول درستی یکسانی باشند، آن‌گاه این گزاره‌ها را هم‌ارز گویند و می‌نویسیم $\alpha \rightleftarrows \beta$.

مثال: $(\sim p \cap \sim q) \leftrightarrows \sim (p \cup q)$

نکته: اگر α و β هم‌ارز باشند، آن‌گاه ترکیب دو شرطی $(\alpha \leftrightarrow \beta)$، نیز همواره درست است.

مثال: یک گزاره هم‌ارز با گزاره $(\neg q \cap (p \to q)) \to \neg p$ بیابید.

حل: از روابط $\neg p \cup q$.$\leftrightarrow (p \to q)$, $\neg(p \cup q) \leftrightarrow (\neg p \cap q)$ استفاده می‌کنیم:

$$(\neg q \cap (\neg p \cup q)) \to \neg p$$
$$(\neg(\neg q \cap (\neg p \cup q))) \cup \neg p$$
$$q \cup (p \cap \neg q) \cup \neg q$$

با استفاده از مفاهیم هم‌ارزی منطقی، راستگو و تناقض، فهرست قانون‌های جبر گزاره‌ها را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

قانون نقیض مضاعف	$\neg\neg p \Leftrightarrow p$
قانون دمرگان	$\neg(p \cup q) \Leftrightarrow \neg p \cap \neg q \quad , \quad \neg(p \cap q) \Leftrightarrow \neg p \cup \neg q$
قانون تعویض‌پذیری	$p \cup q \Leftrightarrow q \cup p \quad , \quad p \cap q \Leftrightarrow q \cap p$
قانون شرکت‌پذیری	$p \cup (q \cup r) \Leftrightarrow p \cup q \cup r \quad , \quad p \cap (q \cap r) \Leftrightarrow p \cap q \cap r$
قانون پخش‌پذیری	$p \cup (q \cap r) \Leftrightarrow (p \cup q) \cap (p \cup r) \quad , \quad p \cap (q \cup r) \Leftrightarrow (p \cap q) \cup (r \cap r)$
قانون خودتوانی	$p \cup p \Leftrightarrow p \quad , \quad p \cap p \Leftrightarrow p$
قانون همانی	$p \cup F \Leftrightarrow p \quad , \quad p \cap T \Leftrightarrow p$
قانون وارون	$p \cup \neg p \Leftrightarrow T \quad , \quad p \cup \neg p \Leftrightarrow F$
قانون غلبه	$R \cup T \Leftrightarrow T \quad , \quad p \cap F \Leftrightarrow F$
قانون جذب	$P \cup (p \cap q) \Leftrightarrow p \quad , \quad p \cap (p \cup q) \Leftrightarrow p$

اصل همگانی «هم‌ارزی»

ابتدا با مفهوم دوگان یک گزاره آشنا می‌شویم و بعد اصل دوگانگی را بیان می‌کنیم.

فرض کنید β گزاره‌ای است که در آن فقط رابطه منطقی $\cup$ و $\cap$ وجود داشته باشد، آنگاه دوگان β که با βd نشان داده می‌شود، از گذاشتن $\cup$ و $\cap$ به ترتیب به‌جای $\cap$ و $\cup$، تبدیل همه Tها به Fها و بالعکس به‌دست می‌آید.

مثال: $\beta = (\sim q \cup T) \Rightarrow \beta d = (\sim q \cap F)$

اصل دوگانگی:

اگر ۲ گزاره α و β هم‌ارز باشند آنگاه αd و βd نیز هم‌ارز می‌باشند.

استلزام منطقی:

اگر $\alpha \to \beta$ راستگو باشد « همواره درست باشد » آنوقت می‌گوییم:

گزاره α مستلزم گزاره β است و به‌صورت $\alpha \Rightarrow \beta$ نشان می‌دهیم.

مثال: $\sim (p \to q) \Rightarrow \sim q$

نکته: اگر $\alpha \Rightarrow \beta$ و $\beta \Rightarrow \gamma$ آنگاه $\alpha \Rightarrow \gamma$

نکته: اگر $\alpha \Rightarrow \beta$ و $\alpha \Rightarrow \gamma$ آنگاه $\alpha \Rightarrow \beta . \cap \gamma$

نکته: برای بررسی استلزام $\alpha \Rightarrow \beta$ سه روش وجود دارد:

۱) فرض می‌کنیم β نادرست باشد؛ آن‌گاه نشان می‌دهیم α نیز نادرست است.

۲) فرض می‌کنیم α درست باشد؛ آن‌گاه نشان می‌دهیم β نیز درست است.

۳) نشان می‌دهیم ترکیب شرطی $\alpha \rightarrow \beta$ یک تاتولوژی است.

تابع ارزش

عباراتی که به‌وسیله گزاره‌ها و روابط منطقی نشان داده می‌شوند، دارای یکی از ارزش‌های درستی (T) یا نادرست (F) می‌باشند. تابع V این ارزش‌ها را به‌صورت زیر نشان می‌دهد:

$$V(p) = \begin{cases} ۱ & \text{if } p = T \\ ۰ & \text{if } p = F \end{cases}$$

می‌توان ارزش‌های زیر را نتیجه گرفت:

$$V(\neg p) = ۱ - V(p)$$

$$V(p \cap q) = \min\{V(p), V(q)\} = V(p) . V(q)$$

$$V(p \cup q) = \max\{V(p), V(q)\}$$

$$V(p \rightarrow q) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } V(p) \text{ کوچکتر مساوی } V(q) \text{ باشد} \\ ۰ & \text{اگر } V(p) \text{ بزرگتر از } V(q) \text{ باشد} \end{cases}$$

$$V(p \leftrightarrow q) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } V(p) \text{ مساوی } V(q) \text{ باشد} \\ ۰ & \text{اگر } V(p) \text{ نامساوی } V(q) \text{ باشد} \end{cases}$$

استنتاج: اگر $n+۱$ گزاره داشته باشیم که استلزام زیر را تشکیل دهند:

$$\mathbf{p_۱ \cap p_۲ \cap \ldots \cap p_n \Rightarrow q}$$

که به گزاره‌های سمت چپ، روابط شرطی مقدم‌های استدلال و به گزاره‌های سمت راست حکم استدلال می‌گویند.

استدلال بالا در صورتی معتبر است، وقتی که هر یک از مقدم‌های $p_۱$ و $p_۲$ و ... p_n راست باشد، آنگاه حکم q نیز راست است.

نکته: استلزام گفته را می‌توان به این صورت نیز نوشت:

$$\begin{array}{l} \mathbf{p_۱} \\ \mathbf{p_۲} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{p_n}} \\ \therefore \mathbf{q} \end{array}$$

۱	قاعده انتزاع (قیاس استثنایی)	$[p \cap (p \to q)] \to q$	p $p \to q$ $\therefore q$
۲	قانون قیاس صوری	$[(p \to q) \cap (q \to r)] \to p \to r$	$p \to q$ $q \to r$ $\therefore p \to r$
۳	قاعده نقیض انتزاع	$[(p \to q) \cap (\neg q)] \to \neg p$	$p \to q$ $\neg q$ $\therefore \neg p$
۴	قاعده ترکیب عطفی		p q $\therefore p \cap q$
۵	قاعده قیاس فصلی	$[(p \cup q) \cap (\neg p)] \to q$	$p \cup q$ $\neg p$ $\therefore q$
۶	قاعده تناقض	$(\neg p \to F) \to p$	$\neg p \to F$ $\therefore p$
۷	ساده‌سازی عطفی	$p \cap q \to p$	$p \cap q$ $\therefore p$
۸	اثبات بوسیله حالات	$[(p \to r) \cap (q \to r)] \to [(p \cup q) \to r]$	$p \to r$ $q \to r$ $\therefore (p \cup q) \to r$

مثال: اعتبار استدلال زیر را بررسی کنید:

۱) $(\neg p \cup \neg p) \to (r \cap s)$
۲) $r \to t$
۳) $\neg t$
۴) $\therefore p$

مرحله ۱: با استفاده از خط ۲ و ۳ و قاعده نقیض انتزاع $\neg r$ را نتیجه می‌گیریم.

مرحله ۲: با استفاده از مرحله ۱ و قاعده تفصیل فصلی $\neg r \cap \neg s$ را نتیجه می‌گیریم.

مرحله ۳: با استفاده از مرحله قبل و قانون‌های دمرگان $\neg(r \cup s)$ را نتیجه می‌گیریم.

مرحله ۴: با توجه به خط ۳ و مرحله ۳ و با استفاده از قاعده نقیض انتزاع $\neg(\neg p \cup \neg q)$ را نتیجه می‌گیریم.

مرحله ۵: با توجه به مرحله ۴ و با استفاده از قانون‌های دمرگان و قانون نقیض مضاعف، $p \cap q$ را نتیجه می‌گیریم.

مرحله ۶: با توجه به مرحله ۵ و با استفاده از قاعده ساده‌سازی عطفی، $\therefore p$ را نتیجه می‌گیریم.

DNF	گزاره مرکب به‌صورت جمع حاصل ضرب‌ها	$(p \cap q) \cup (r \cap s)$	$(p \,.\, q) + (r \,.\, s)$
CNF	گزاره مرکب به‌صورت جمع حاصل جمع‌ها	$(p \cup q) \cap (r \cup s)$	$(p + q) \,.\, (r + s)$

مینترم‌ها و ماکسترم‌ها

مینترم‌ها: عبارتی است که به‌صورت ضرب متغیرهای دلخواه است که در آن هر متغیر فقط یک بار خودش یا مکمل آن حضور دارند.

مثلاً برای هر دو متغیر p و q

۱) $\bar{p} \cap \bar{q}$ ۲) $\bar{p} \cap q$ ۳) $p \cap \bar{q}$ ۴) $p \cap q$

ماکسترم‌ها: عبارتی است که به‌صورت جمع متغیرهای دلخواه است که در آن هر متغیر فقط یک بار خودش یا مکمل آن حضور دارند.

۱) $\bar{p} \cup \bar{q}$ ۲) $\bar{p} \cup q$ ۳) $p \cup \bar{q}$ ۴) $p \cup q$

نکته: با n متغیر می‌توان ۲^n ماکسترم یا مینترم نوشت.

PCNF , PDNF

PDNF	گزاره مرکب به‌صورت جمع تعدادی مینترم‌ها
PCNF	گزاره مرکب به‌صورت ضرب تعدادی ماکسترم‌ها

مثال: فرم PDNF گزاره زیر را به‌دست آورید.

$$(\neg p \cap q) \cup q$$

گزاره بالا شامل دو گزاره است:

۱)$(\neg p \cap q)$ ۲)q

گزاره شماره ۲ متغیر p را ندارد که باید به آن اضافه شود.

$$(\neg p \cap q) \cup (q \cap (p \cup \neg p)) \Leftrightarrow (\neg p \cap q) \cup (q \cap p) \cup (q \cap \neg p)$$
$$\Leftrightarrow (\bar{p} . q) + (q . p) + (q . \bar{p}) = \bar{p} . q + q . p$$

راه‌حل دیگر با استفاده از جدول درستی است که به‌صورت زیر می‌باشد:

	p	q	$\neg p \cap q$	$(\neg p \cap q) \cup q$	
۰ ۰	F	F	F	F	۰
۰ ۱	F	T	T	T	۱
۱ ۰	T	F	F	F	۲
۱ ۱	T	T	F	T	۳

سطرهایی که گزاره، ارزش T داشته باشد مینترم‌ها را تشکیل می‌دهد پس:

$$PDNF = \bar{p} . q + p . q$$

نکته: PDNF را می‌توان با استفاده از نماد $\sum$ نشان داد.

شماره سطرهایی که در آن گزاره ارزش T دارد، جلوی $\sum$ می‌نویسیم پس PDNF مثال فوق به‌صورت $\sum(m_۱ , m_۳)$ می‌باشد.

نکته: در مثال قبل، PCNF برابر است با سطرهایی که ارزش F دارند که به‌صورت Π نشان می‌دهند: $\Pi(M_۰ , M_۲)$

نکته: در جدول درستی یک عبارت سطرهایی که جزء مینترم‌ها نیستند «ارزش F دارند» ماکسترم حساب می‌شوند و بالعکس.

سورها

۴ نوع سور وجود دارد:

نام	نماد سور	توضیحات
سور عمومی	$\forall$	به‌ازای همه مقادیر؛ برای همه
سور وجودی	$\exists$	به‌ازای بعضی مقادیر؛ وجود دارد
سور یکتا	$\exists!$	فقط یک عضو دارد
سور صفر	$\nexists$	به‌ازای هیچ مقدار

مثال: جمله زیر را به زبان منطق بیان کنید:

«برخی از دانشجویان کلاس، فوتبال یا والیبال بازی می‌کنند»

حل:

x = دانشجویان کلاس

V(x)= x والیبال بازی می‌کنند

F(x)= x فوتبال بازی می‌کند

با توجه به اینکه در جمله از کلمه «برخی» استفاده شده پس باید از سور وجودی استفاده کنیم:

$\exists(x)=?$

$\exists X\,(F(x) \cup V(x))$

قاعده‌های به‌دست آوردن نقیض گزاره‌های یک سور:

در حالت کلی داریم:

۱) $\neg[\forall X\, p(x)] \Leftrightarrow \exists x \neg p(x)$

۲) $\neg[\exists X\, p(x)] \Leftrightarrow \forall x \neg p(x)$

۳) $\neg[\forall X \neg p(x)] \Leftrightarrow \exists x \neg\neg p(x) \leftrightarrow \exists X\, p(x)$

۴) $\neg[\exists X \neg p(x)] \Leftrightarrow \forall x \neg\neg p(x) \leftrightarrow \forall X\, p(x)$

اعمال سورها بر روی ترکیبات فصلی و عطفی:

۱) $\exists x\,[p(x) \cap q(x)] \Rightarrow [\exists x\, p(x) \cap \exists x\, q(x)]$

۲) $\exists x\,[p(x) \cup q(x)] \Leftrightarrow [\exists x\, p(x) \cup \exists x\, q(x)]$

۳) $\forall x\,[p(x) \cap q(x)] \Leftrightarrow [\forall x\, p(x) \cap \forall x\, q(x)$

۴) $[\forall x\, p(x) \cup \forall x\, q(x)] \Rightarrow \forall x\,[p(x) \cup q(x)]$

نکته:

۱) $\forall x\, \forall y\; p(x,y) \Leftrightarrow \forall y\, \forall x\, p(x,y)$

۲) $\exists x\, \exists y\; p(x,y) \Leftrightarrow \exists y\, \exists x\, p(x,y)$

نکات کلیدی فصل اول

۱- دو نوع دیگر از رابطه‌های منطقی عبارتند از:

الف) NAND که آن را به‌صورت $(p \uparrow q)$ نشان می‌دهیم که معادل $\sim p(\cap\ q)$ است.

ب) NOR که آن را به‌صورت $(p \downarrow q)$ نشان می‌دهیم که معادل $\sim(p \cup q)$ است.

۲- در بحث هم‌ارزی خواص زیر حائز اهمیت است:

$$۱)\ p \to (q \to r) \Leftrightarrow q \to (p \to r) \Leftrightarrow (p \cap q) \to r$$

$$۲)\ (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \to q) \cap (q \to p) \Leftrightarrow (\neg p \cup q) \cap (\neg q \cup p)$$

۳- استلزام‌های منطقی مهم:

$$۱)\ p \Rightarrow p \cup q \quad , \quad q \Rightarrow p \cup q$$

$$۲)\ \neg (p \to q) \Rightarrow p$$

$$۳)\ (p \to q) \cap (q \to r) \Rightarrow (p \to r)$$

$$۴)\ (p \cup q) \cap (p \to r) \cap (q \to r) \Rightarrow r$$

مثال: صورت نرمال عطفی (CNF) فرمول $(p \to q)$ عبارت است از:

۱) $\neg((p \to q) \cap (q \to p))$

۲) $\neg p \cap q$

۳) $(p \to q) \cap (\neg p \to \neg q)$

۴) $(p \cup q) \cap (\neg p \cup \neg q)$

حل:

$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \to q) \cap (q \to p)) \Leftrightarrow ((\neg p \cup q) \cap (\neg q \cup p))$$

در نتیجه $= \neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \cap \neg q) \cup (q \cap \neg p))$

$$\Leftrightarrow ((p \cap \neg q) \cup q) \cap ((p \cap \neg q) \cup (\neg p))$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{((p \cup q) \cap (\overbrace{\neg q \cup q}^{\text{مرجع}}))}_{(p \cup q)} \cap \underbrace{((\overbrace{p \cup (\neg p)}^{\text{مرجع}}) \cap ((\neg q) \cup (\neg p))}_{(\neg q \cup \neg p)} \Leftrightarrow (p \cup q) \cap (\neg q \cup \neg p)$$

پس گزینه ۴ جواب صحیح است.

مثال: مجموعه گزاره‌های $\{p_0 \to p_1,\ p_1 \to p_2,\ p_2 \to p_3,\ p_3 \to p_0\}$:

۱) سازگار نیست.

۲) بستگی به صدق یا کذب آیتم‌های p_1، p_2، p_3 دارد.

۳) سازگار است.

۴) بستگی به صدق یا کذب آیتم p_0 دارد.

حل: ابتدا سازگاری را تعریف می‌کنیم:

هرگاه ترکیب عطفی از مجموعه گزاره‌های A_1، A_2 ،... A_n به‌ازای حداقل یک مورد از ارزش‌های متغیرهای ساده A_1، A_2 ،... A_n درست باشد، مجموعه A_1 ،...، A_n را سازگار می‌گویند، ولی اگر به اندازه همه مقادیری از متغیرهای ساده A_1 ،...، A_n ترکیب عطفی F شد، A_1 ،...، A_n را ناسازگار گویند.

حال در تست بالا داریم:

با استفاده از نکاتی که در استلزام‌های منطقی وجود دارد:

$$(p_0 \to p_1) \cap (p_1 \to p_2) \cap (p_2 \to p_3) \cap (p_3 \to \neg p_0) \Leftrightarrow (p_0 \to \neg p)$$

حال چون گزاره $p_0 \to \neg p_0$ دو حالت دارد که یکی از حالات آن $(V(p_0) = F)$ درست می‌باشد پس مجموعه گزاره داده شده سازگار می‌باشد. پس گزینه «۳» جواب صحیح است.

۴- با استفاده از مفهوم سازگاری روشی برای اثبات معتبر بودن یک استنتاج بیان می‌کنیم. روش برهان خلف که مفهوم سازگاری را در آن به‌کار می‌بریم:

برای اثبات حکم C از مقدمات A_1 ،...، A_n، فرض می‌کنیم که C نادرست است و $(\neg C)$ را به مقدمات اضافه می‌کنیم. حال اگر این مجموعه مقدمات جدید ناسازگار باشند، آن‌گاه فرض $\neg C$ نمی‌تواند هم زمان با T بودن A_1،...، A_n، T باشد، پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

گزاره‌های زیر تاتولوژی می‌باشند:

۱) $(A \to \neg A) \to \neg A$

۲) $[(A \to B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$

۳) $\neg [(P \cap Q) \to \neg (Q \cup R \to S)] \cup [(P \cap Q \to Q \cup R)] \to [(P \cap Q \to S)]$

نکته:

۱) $\exists x\, p(x) \cap \exists x\, q(x) \nRightarrow \exists x\, [p(x) \cap q(x)]$

۲) $\forall x\, [p(x) \cup q(x)] \nRightarrow \forall x\, p(x) \cup \forall x\, q(x)$

۳) $\forall x\, \exists y\, p(x,y) \nLeftrightarrow \exists y\, \forall x\, p(x,y)$

با توجه به‌عبارت $\forall x\, [p(x) \to q(x)]$ داریم:

عکس نقیض	$\forall x\, [\neg q(x) \to \neg p(x)]$
عکس	$\forall x\, [q(x) \to p(x)]$
وارون	$\forall x\, [\neg p(x) \to \neg q(x)]$

نکته: تعداد صورت‌های گزاره‌ای که می‌توان با n متغیر گزاره‌ای «نماد جمله‌ای» ساخت، نامتناهی و تعداد توابع 2^{2^n} است.

سوالات چهارگزینه‌ای سراسری فصل اول

۱- اگر دامنه متغیرهای **x** و **y** اعداد صحیح غیرمنفی باشد مقادیر درستی عبارت **a** و **b** را تعیین کنید. **(مهندسی کامپیوتر ۸۳)**

۱) $b = T , a = T$ ۲) $b = F , a = F$ ۳) $b = F , a = T$ ۴) $b = T , a = F$

۲- در منطق ۳ مقداری به دو مقداری، درست و نادرست و نمی‌دانم وجود دارد یعنی $\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$. اگر برای $A = 1$ و $B = \frac{1}{2}$ مقادیر $A \cap B = \frac{1}{2}$ و $A \cup B = 1$ گردد، نتیجه گزاره‌های منطقی زیر در منطق ۳ مقداری $A = 1$ و $B = \frac{1}{2}$ و $C = 0$ و $D = \frac{1}{2}$ به ترتیب چیست؟ **(فناوری اطلاعات ۸۴)**

۱) $\begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} \frac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

۳- اگر گزاره **P** فقط تابع **x** و گزاره **Q** فقط تابع **y** باشند، عبارت زیر با کدام عبارت داده شده معادل است؟ **(فناوری اطلاعات ۸۴)**

$(\forall x\, (p \Rightarrow \exists y{:}\ Q)) \Rightarrow ((\forall x{:}\ p) \Rightarrow (\exists y{:}Q))$

۱) True ۲) $\forall x\ \exists y\ Q$ ۳) $\exists y\ \forall x\ p$ ۴) $\forall x\ \exists y\ p \cap Q$

۴- شکل اصلی عطفی عادی **(PCNF)** یک عبارت منطقی با سه متغیر **R , Q , P** برابر است با $\prod(m_0, m_3, m_6)$ شکل اصلی فصلی عادی **(PDNF)** آن کدام‌یک از پاسخ‌های زیر است؟ **(مهندسی کامپیوتر ۸۵)**

۱) $\sum m_0, m_3, m_6$ ۲) $\sum m_0, m_2, m_4, m_6$

۳) $\sum m_1, m_3, m_5, m_7$ ۴) $\sum m_1, m_2, m_4, m_5, m_7$

۵- کدام استدلال زیر نامعتبر است؟ **(فناوری اطلاعات ۸۵)**

۱) $\begin{array}{l} p \cup q \\ r \cup \neg p \\ \underline{\neg r} \\ \therefore q \end{array}$ ۲) $\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ \neg q \to \neg p \\ \underline{p} \\ \therefore r \end{array}$ ۳) $\begin{array}{l} p \cap q \\ p \to (r \cap q) \\ r \to (s \cup t) \\ \underline{\neg s} \\ \therefore t \end{array}$ ۴) $\begin{array}{l} p \\ p \to r \\ p \to (q \cup \neg r) \\ \underline{\neg q \cup \neg s} \\ \therefore s \end{array}$

۶- گزاره $p \cup \bar{q} \cup r$ $p \cup q$ آنگاه با کدام‌یک از گزاره‌های زیر معادل است؟ **(علوم کامپیوتر ۸۵)**

۱) $p \cup \bar{q} \cup r$ ۲) $(\bar{p} \cup q) \cap \bar{r}$ ۳) $(p \cup \bar{q}) \cup \bar{r}$ ۴) $(\bar{p} \cup q) \cup r$

۷- از راست بودن گزاره‌های $\mathbf{p \cap q , p \to r \cap q , r \to s \cup t , {\sim}s}$ کدام گزینه نتیجه می‌دهد؟ **(علوم کامپیوتر ۸۶)**

۱) T ۲) F ۳) $q \cap t$ ۴) $q \cap {\sim}t$

۸- فرض کنید در بررسی مفهوم علیت نماد $p \mapsto q$ به معنای آن است که **p** تنها علت **q** است. همچنین **V** تابع ارزش‌گذاری بوده و به هر جمله ارزش ۰ یا ۱ را نسبت می‌دهد. در این صورت $\mathbf{V\ (p) \cap (q) \mapsto q}$ کدام است؟ **(فناوری اطلاعات ۸۶)**

۱) 0 ۲) $V(q)\ (1 - V(p))$

۳) $1 - V(q)\ (1 - V(p))$ ۴) $1 - V(p) - (V(q) + 2\ V(p)V(q))$

۹- فرض کنید $\mathbf{f\ (P, Q, R){:}\ (P \cup Q) \cap (P \cap \neg Q)}$ کدام‌یک از گفته‌های زیر صحیح است؟ **(مهندسی کامپیوتر ۸۶)**

۱) $\Pi\, m_0, m_1$ ۲) $\Sigma m_2, m_3$ ۳) $\Pi\, m_4, m_5, m_6, m_7$ ۴) $\Sigma\, m_0, m_1, m_2, m_3$

۱۰- کدام‌یک از استدلال‌های زیر نامعتبر است؟ (فناوری اطلاعات ۸۷)

۱) $\dfrac{\forall x[p(x)] \cup \forall y[q(x)]}{\therefore \forall x[p(x) \cup q(x)]}$

۲) $\begin{array}{c} p \to (q \to r) \\ p \cup s \\ t \to q \\ \neg s \\ \hline \therefore \neg r \to \neg t \end{array}$

۳) $\begin{array}{c} p \cap q \\ p \to (r \cap q) \\ r \to (s \cup t) \\ \neg s \\ \hline \therefore t \end{array}$

۴) $\begin{array}{c} p \\ p \to r \\ p \to (q \cup \neg r) \\ \neg s \cup \neg q \\ \hline \therefore s \end{array}$

۱۱- گزاره $p(x,y): 2y - x = y + x_2$ را که در آن عالم برای هر یک از متغیرهای x و y شامل همه اعداد صحیح است در نظر بگیریم. کدام مورد درست است؟ (فناوری اطلاعات ۸۸)

۱) $\forall y\ \exists x\ p(x,y)$ ۲) $\forall x\ \exists y\ p(x,y)$ ۳) $\exists x\ \forall y\ p(x,y)$ ۴) $\exists y\ \forall x\ p(x,y)$

۱۲- می‌خواهیم نشان دهیم استدلال زیر در منطق گزاره‌ها معتبر نیست:

$\{(p \cap q) \cup r,\ q \to (r \cup s),\ \sim p \to q\} \Rightarrow p \cup s$

کدام ارزش‌دهی به گزاره‌های پایه (p, q, r, s) این نامعتبر بودن را نشان می‌دهد؟ (مهندسی کامپیوتر ۸۸)

۱) (F,T,T,T) ۲) (T, T, F,T) ۳) (F ,T, T, F) ۴) (F , T, F , F)

۱۳- اگر R, Q, P سه گزاره باشند در این صورت گزاره

$(\sim Q \cap (\sim P \cap R)) \cup ((Q \cap R) \cup (P \cap R)) \Rightarrow Q \cup R$ با کدام‌یک از گزاره‌های زیر معادل است؟ (علوم کامپیوتر ۸۹)

۱) T (درست) ۲) F (نادرست) ۳) Q ۴) R

۱۴- کدام‌یک از موارد زیر نادرست است؟ (مهندسی فناوری اطلاعات ۹۰)

۱) گزاره‌های $\exists X \in A[P(X)]$ و $\exists X[X \in A \to P(x)]$ معادل هستند.

۲) جمله «فقط و فقط یک عنصر با خاصیت P وجود دارد» را می‌توان در قالب نمادهای منطق مرتبه اول به‌صورت $\exists X[P(X)] \wedge \forall x \forall y[P(X) \wedge P(y) \to X = y]$ نوشت.

۳) جمله «کوچک‌ترین عدد حقیقی مثبت وجود ندارد» را می‌توان در قالب نمادهای منطق مرتبه اول به‌صورت $\forall x \in \mathbb{R}^+ \exists y \in \mathbb{R}^+[y < x]$ نوشت.

۴) $[(p \to q) \wedge ((q \cap r) \to s) \wedge v] \to (p \to s)$ بیان‌کننده یک بحث منطقی معتبر است.

۱۵- در منطق گزاره‌ها، گزاره φ را «راستگو» می‌نامیم اگر به‌ازای هر ارزش‌گذاری دلخواه true یا false به گزاره‌های اتمی تشکیل‌دهنده آن، φ همواره ارزش true داشته باشد. هم‌چنین گزاره φ را «ارضاشدنی» می‌نامیم اگر ارزش‌دهی (true یا fase) به اتم‌های آن وجود داشته باشد که ارزش φ را true کند. اگر $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ رشته‌ای از گزاره‌ها باشد، آن‌گاه به چه شرطی φ_n نتیجه منطقی (محصول یک استدلال معتبر) از مقدمات $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ است؟ (مهندسی کامپیوتر ۹۱)

۱) اگر $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}) \vee \varphi_n$ ارضاپذیر باشد.

۲) اگر $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}) \to \varphi_n$ یک راستگو باشد.

۳) اگر $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}) \to \varphi_n$ ارضاپذیر باشد.

۴) اگر $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}) \vee \varphi_n$ یک راستگو باشد.

۱۶- کدام‌یک از موارد زیر درست هستند؟ (مهندسی کامپیوتر ۹۳)

الف) $|\forall x p(x) \Rightarrow \forall x q(x)| \Rightarrow \forall x |p(x) \Rightarrow q(x)|$

ب) $\forall x |p(x) \Rightarrow q(x)| \Rightarrow |\forall x p(x) \Rightarrow \forall x q(x)|$

۱) تنها الف ۲) تنها ب ۳) هیچ‌کدام از الف و ب ۴) هر دو الف و ب

۱۷- با فرض آن که هر فرد یا راستگو یا همیشه دروغ‌گو است، براساس گزاره‌های زیر کدام گزینه درست است؟

(فناوری اطلاعات ۹۳)

مهران می‌گوید: «فقط من و سعید راست می‌گوییم.»

فرهاد می‌گوید: «سعید یک دروغ‌گو است.»

سعید می‌گوید: «فرهاد راست می‌گوید یا مهران دروغ می‌گوید.»

۱) مهران: راستگو، سعید: راستگو، فرهاد: دروغ‌گو
۲) مهران: راستگو، سعید: دروغ‌گو، فرهاد: راستگو
۳) مهران: دروغ‌گو، سعید: دروغ‌گو، فرهاد: دروغ‌گو
۴) مهران: دروغ‌گو، سعید: راستگو، فرهاد: دروغ‌گو

پاسخنامه سوالات چهارگزینه‌ای سراسری فصل اول

۱- گزینه «۲»

☜ برای a اگر $x = 0$ قرار دهیم آنگاه هیچ مقداری برای y وجود ندارد که کوچکتر از x باشد پس $a = F$.
برای b اگر مثلا $x = 4$ باشد آنگاه به‌ازای هر مقداری از y، x بزرگتر از y نیست. پس $b = F$ است.

۲- گزینه «۲»

$$\neg A = 0$$
$$\neg B = \frac{1}{2}$$
$$\neg C = 1\,1$$
$$\neg D = \frac{1}{2}$$

$$1: (((A \to B) \cup C) \to D)$$
$$A \to B \Leftrightarrow A \to B = \frac{1}{2} \qquad (\frac{1}{2} \cup C) = \frac{1}{2}$$
$$(\frac{1}{2} \to D) \Leftrightarrow \neg\left(\frac{1}{2}\right) \cup \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$2: [((\neg A \cap B) \to C) \cup \neg D]$$
$$\neg A \cap B = 0 \cap \frac{1}{2} = 0 \qquad 0 \to C \Leftrightarrow (0) \cup C = (1 \cup 0)$$
$$(1 \cup 0) \cup (\frac{1}{2}) = 1$$

۳- گزینه «۱»

☜ از آن‌جایی‌که در صورت سوال گفته شده است: x فقط متغیر تابع p است و y فقط متغیر تابع Q است پس می‌توانیم $(\forall x: (p \Rightarrow \exists y: Q))$ را به‌صورت $((\forall x:p) \Rightarrow (\exists y: Q))$ بنویسیم.

۴- گزینه «۴»

☜ با توجه به نکته گفته شده در بخش مینترم‌ها و ماکسترم‌ها گزینه ۴ صحیح است.

۵- گزینه «۴»

☜ در $p \to r$ با توجه به درستی p، درستی r را نتیجه می‌گیریم. از درستی r و p ، در جمله $p \to (q \cup \neg r)$ درستی q را و از درستی q، در جمله $\neg q \cup \neg s$ نادرستی s را نتیجه می‌گیریم. پس این استدلال نامعتبر است.

۶- گزینه «۱»

$$(p \cup q \Rightarrow p \cup \bar{q} \cup r) \Leftrightarrow \neg(p \cup p) \cup (p \cup \bar{q} \cup r) \Leftrightarrow (\bar{p} \cap \bar{q}) \cup (p \cup \bar{q} \cup r)$$
$$\Leftrightarrow (\bar{p} \cup (p \cup \bar{q} \cup r) \cap (\bar{q} \cup (p \cup \bar{q} \cup r) \Leftrightarrow M. \cap (\bar{q} \cup p \cup r) \Leftrightarrow \bar{q} \cup p \cup r$$

۷- گزینه «۳»

☜ از فرض $p \cap q$ درستی p و q نتیجه می‌شود که با توجه به آن در جمله $p \to r \cap q$، درستی r را نتیجه می‌گیریم:
حال با توجه به نادرستی S در جمله $r \to s \cup t$، t بایستی ارزش درستی داشته باشد.

۸- گزینه «۳»

☜ وقتی گفته می‌شود p تنها علت q است یعنی $p \rightarrow q$. حال جدول درستی $V((p \cap q) \rightarrow q)$ را رسم می‌کنیم:

p	q	$P \cap q \rightarrow q \Leftrightarrow q \rightarrow p \cap q$
۰	۰	۱
۰	۱	۰
۱	۰	۱
۱	۱	۱

با توجه به جدول درستی گزینه ۳ صحیح است.

۹- گزینه صحیح وجود ندارد.

☜ عبارت $(P \cup Q) \cap (p \cap \neg Q)$ را به‌صورت جمع مینترم‌ها در می‌آوریم:

$$P \,.\, P \,.\, \bar{Q} + Q \,.p.\, \bar{Q} = P \,.\, \bar{Q}$$

چون f سه متغیره است پس باید مینترم بالا را کامل کنیم:

$$P \,.\, \bar{Q} \,.\, \bar{V} + P \,.\, \bar{Q} \,.\, V = \sum(m_۴ \,,\, m_۵) = \Pi(M_۰, M_۱, M_۳, M_۶, M_۷)$$

گزینه صحیح وجود ندارد.

۱۰- گزینه «۴»

☜ در جمله $p \rightarrow r$، با توجه به درستی p، درستی r را نتیجه می‌گیریم و در جمله $p \rightarrow (q \cup \neg r)$ درستی q را نتیجه می‌گیریم پس با توجه به $\neg q \cup \neg s$، نادرستی s را نتیجه می‌گیریم. پس اعتبار استدلال نامعتبر است.

۱۱- گزینه «۲»

☜ به‌ازای هر مقداری از x که در نظر بگیریم یک y وجود دارد که تساوی عبارت بالا باید برقرار باشد مثلا:

به‌ازای $x = ۴$:

$$۲y - ۴ = y + ۱۶ \Rightarrow y = ۲۰$$

۱۲-گزینه «۳»

☜ با استفاده از روش برهان خلف باید مقدمات ارزش T و حکم ارزش F بگیرد. پس کافیست $(p \,,\, q \,,\, r, \, s)$ به ترتیب ارزش‌های (F, T, T, F) گیرند.

۱۳- گزینه «۱»

$$(\neg Q \cap (\neg p \cap R)) \cup ((Q \cap R) \cup (p \cap R)) \Rightarrow (Q \cup R)$$
$$((Q \cap P) \cap R) \cup ((Q \cup P) \cap R) \Rightarrow (Q \cup R) \Leftrightarrow ((\neg Q \cap \neg p) \cup (Q \cup p)) \cap R$$
$$\Rightarrow (Q \cup R) \Leftrightarrow R \Rightarrow Q \cup R \Leftrightarrow T$$

۱۴- گزینه «۱»

☜ درستی گزینه ۴ را بررسی می‌کنیم

$$(q \wedge r \rightarrow S) \wedge r \quad \leftrightarrow \quad q \rightarrow S$$
$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow S) \quad \leftrightarrow \quad p \rightarrow S \quad \Rightarrow \quad (p \rightarrow S \leftrightarrow p \rightarrow S)$$

گزینه‌های ۲ و ۳ نیز صحیح می‌باشند پس گزینه ۱ نادرست است.

۱۵- گزینه «۲»

۱۶- گزینه «۲»

☜ قبل از حل این تست دقت کنید که همیشه از کل به جزء می‌توانیم استنتاج کنیم و عکس این عبارت یعنی جزء به کل نمی‌شود استنتاج کرد.

گزاره الف غلط است زیرا:

$$[\forall x p(x) \to \forall x q(x)] \to \forall x[p(x) \to q(x)]$$
$$\equiv [\neg(A x p(x) \vee \forall x q(x)] \to \forall x[\neg p(x) \vee q(x)]$$
$$\equiv \exists x \neg p(x) \vee \forall x q(x) \to \forall x \neg p(x) \vee \equiv \exists x \neg p(x) \vee \forall x q(x) \to \forall x q(x)$$
$$\frac{\exists x \neg p(x) \vee \forall x q(x)}{\forall x \neg p(x) \vee \forall x q(x)}$$

این رابطه را به این صورت هم می‌توانیم بنویسیم:

همان‌طور که در بالا اشاره کردیم از جزء به کل(سور وجودی به سور عمومی) نمی‌توان استنتاج کرد.

گزاره ب درست است زیرا از جزء به کل می‌توان استنتاج کرد.

$$\frac{\forall x[p(x) \to q(x)]}{\forall x p(x) \to \forall x q(x)} \equiv \frac{\forall x[\neg p(x) \vee q(x)]}{\neg(\forall x p(x)) \vee \forall x q(x)} \equiv \frac{\forall x \neg p(x) \vee \forall x q(x)}{\exists x \neg p(x) \vee \forall x q(x)}$$

۱۷- گزینه «۴»

☜گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱) مهران راستگو ← سعید راستگو

سعید راستگو } ۱− فرهاد راستگو / یا / ۲− مهران دروغگو

می‌دانیم مهران راستگو است پس بایستی فرهاد راستگو باشد ← سعید دروغگو است. ※

گزینه ۲) مهران راستگو ← سعید راستگو ※

گزینه ۳) مهران دروغگو ← فرهاد دروغگو ← سعید راستگو ※

گزینه ۴) مهران دروغگو

سعید راستگو ← } فرهاد راستگو / یا / مهران دروغگو✓

پس بایستی فرهاد دروغگو باشد ← فرهاد راستگو ✓

پس گزینه ۴ صحیح است.

سوالات چهارگزینه‌ای آزاد فصل اول

۱- فرض کنید $p(x,y)$ تابع گزاره‌ای $x \leq y$ باشد، حوزه سخن مجموعه اعداد صحیح مثبت است. ارزش گزاره‌های $\exists x\ \exists y\ (p(x,y)),\ \exists x\ \forall y\ p(x,y),\ \forall x\ \exists y\ p(x,y),\ \forall x\ \forall y\ p(x,y)$ از راست به چپ کدام است؟

(فناوری اطلاعات ۸۸)

۱) نادرست ـ درست ـ نادرست ـ درست
۲) نادرست ـ نادرست ـ درست ـ درست
۳) نادرست ـ درست ـ درست ـ درست
۴) نادرست ـ نادرست ـ نادرست ـ درست

۲- کدام گزینه یک گزاره مرکب راستگو نیست؟ (مهندسی کامپیوتر ۹۰)

۱) $q \leftrightarrow (\neg P \cup \neg q)$
۲) $\neg(P \cup \neg q) \to \neg P$
۳) $[P \cap (P \to q)] \to q$
۴) $[(P \to q) \cap (q \to r)] \to (P \to r)$

۳- اگر P، q ، r گزاره‌های اولیه باشد، کدام گزینه معتبر نمی‌باشد؟ (فناوری اطلاعات ۹۰)

۱) $P \uparrow (q \uparrow r) \leftrightarrow P \uparrow (\neg(q \wedge r))$
۲) $P \downarrow (q \downarrow r) \leftrightarrow \neg q \wedge (q \vee r)$
۳) $P \vee (q \vee r) \leftrightarrow (P \vee q) \vee r$
۴) $P \to (q \vee r) \leftrightarrow (P \to q) \vee (P \to r)$

۴- اگر P، q، r گزاره‌های اولیه باشند، کدام گزینه معتبر نمی‌باشد؟ (فناوری اطلاعات ۹۰)

۱) $[(P \vee q) \vee r] \leftrightarrow [P \vee (q \vee r)]$
۲) $[P \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)] \leftrightarrow [(P \leftrightarrow q) \leftrightarrow r]$
۳) $[P \vee (q \to r)] \leftrightarrow [(q \vee p) \to (q \vee r)]$
۴) $P \leftrightarrow q \leftrightarrow (P \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

۵- کدام‌یک از جملات زیر معادل منطقی با جمله $\exists X \forall Y \overline{P(X,Y)}$ می‌باشد؟ (مهندسی کامپیوتر ۹۱)

۱) $\overline{\forall X \exists Y P(X,Y)}$
۲) $\exists X \overline{\forall Y P(X,Y)}$
۳) $\forall X \overline{\exists Y P(X,Y)}$
۴) $\exists X \exists Y \overline{P(X,Y)}$

۶- اگر نماد $\uparrow$ نشان‌دهنده NAND و $\downarrow$ نشان دهنده NOR باشد کدام‌یک از روابط هم‌ارزی زیر درست است؟

(مهندسی کامپیوتر ۹۲)

۱) $P \uparrow P \equiv P$
۲) $(P \uparrow q) \uparrow (P \uparrow q) \equiv P \wedge q$
۳) $(p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q) = P \wedge q$
۴) $(P \downarrow P) \downarrow (P \downarrow q) = P \wedge q$

۷- کدام‌یک از DNFهای زیر معادل با عبارت بولی $(\overline{x+y} + \overline{\bar{x}+\bar{y}})(z+y)$ است؟ (مهندسی نرم‌افزار ۹۳)

۱) $\bar{x}\,\bar{y}\,z + xyz + xy\bar{z}$
۲) $x\,y\,z + \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} + xy\bar{z}$
۳) $\bar{x}\,\bar{y}\,z + xyz + \bar{x}y\bar{z}$
۴) $x\,y\,z + x\bar{y}z$

۸- حاصل عبارت مقابل کدام است؟ (مهندسی نرم‌افزار ۹۳)

$$(A \Delta B) \cup [(A \cup B)' \cup (A \cap B)] = ?$$

۱) تهی
۲) M
۳) $A \Delta B$
۴) $B - A$

پاسخنامه سوالات چهارگزینه‌ای آزاد فصل اول

۱- گزینه «۳»

☜ ارزش گزاره‌ای $\forall x\ \forall y\ (p(x\ ,\ y))$ بدیهی است که نادرست است چون بایستی به‌ازای هر مقدار x رابطه $x \le y$ بـرای تمـام مقـادیر y برقرار باشد که این‌طور نیست. ارزش گزاره $\forall x\ \exists y\ p(x\ ,\ y)$ درست است. چون برای هر مقدار x حداقل یک مقدار y وجود دارد که از آن x بزرگتر یا مساوی باشد. ارزش گزاره‌ای $\exists x\ \forall y\ p(x\ ,\ y)$ درست است زیرا حداقل یک x وجود دارد $(x = 0)$ که به‌ازای تمام مقـادیر y در رابطه $x \le y$ صدق کند. ولی اگر رابطه به‌صورت $x < y$ می‌بود، این گزاره ارزش نادرست داشت $(x = 0)$

۲- گزینه «۱»

☜ گزاره مرکب راستگو گزاره‌ای است که همیشه ارزش درست داشته باشد. باتوجه به گزینه‌ها (به یک‌طرفه یا دوطرفه بودن رابطه توجه شود) گزینه ۱. در حالتی که q ارزش T و P ارزش F داشته باشد، F خواهد شد. پس یک گزاره راستگو (توتولوژی) نمی‌باشد.

۳- جواب صحیح وجود ندارد.

☜ تمام گزینه‌ها معتبر می‌باشد.

$$(P \uparrow q) = \neg\ (P \wedge q)$$
$$\neg(P \vee q) = \neg P \wedge \neg q$$

به‌عنوان مثال گزینه ۲ صحیح می‌باشد چون:

$$P \downarrow (q \downarrow r) \leftrightarrow \neg(P \vee \neg(q \vee r)) \leftrightarrow \neg P \wedge (q \vee r)$$

۴- گزینه صحیح وجود ندارد.

☜ تمام گزینه‌ها معتبر است.

۵- گزینه «۱»

☜ طبق مطالب گفته شده در فصل منطق ریاضی، گزینه ۱ صحیح است.

$$\neg(\exists X P(X)) \leftrightarrow \forall X \neg P(X)$$
$$\neg(\forall X P(X)) \leftrightarrow \exists X \neg P(X) \Rightarrow \neg(\forall X \exists Y\ P(X,Y)) \leftrightarrow \exists X \forall Y \neg P(X,Y)$$

۶- گزینه «۲»

گزینه ۱) $P \uparrow P \leftrightarrow \neg(P \wedge P) \leftrightarrow \neg P \not\equiv P$

گزینه ۲) $\neg(\neg(P \wedge q) \wedge \neg(P \wedge P)) \equiv P \wedge P$

گزینه ۳) $\neg(\neg(P \wedge P) \wedge \neg(q \wedge q)) = \neg(\neg P \wedge \neg P) = P \vee q \not\equiv P \wedge P$

گزینه ۴) $\neg(\neg(P \vee P) \vee \neg(P \vee P)) = P \vee P \not\equiv P \wedge q$

۷- گزینه «۱»

$$(\overline{x + y} + \overline{x + y})(z + y)$$
$$(\overline{x}.\overline{y} + x.y)(z + y) = \overline{x}\,\overline{y}\,z + \overline{x}\,\overline{y}z + xyz + xyy = \overline{x}\,\overline{y}z + 0 + xyz + xy + \overline{x}\,\overline{y}\,z + xyz + xy\overline{z}$$

۸- گزینه «۲»

$$(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$$
$$(A \cup B) \cup (A \cup B)' = M$$

فصل دوم

روابط و نظریه مجموعه‌ها

- مجموعه
- قوانین نظریه مجموعه‌ها
- رابطه
- هم‌ارزی
- افراز
- بستارها
- ماتریس روابط
- توابع

روابط و نظریه مجموعه‌ها

مجموعه

گردایه‌ای خوش تعریف از اشیاء است که این اشیاء را عنصرهای مجموعه می‌نامند.

نکته: تکرار و ترتیب عناصر در مجموعه جایز نیست:

$A= \{ ۲,۱,۴,۶,۱,۲,۴ \} = \{ ۱,۲,۴,۶ \}$

برای نشان دادن مجموعه از حروف بزرگ و برای عضوهای آن از حروف کوچک لاتین استفاده می‌کنیم:

$A= \{ ۱,۲,۳,۴,۵,۶ \}$, $B= \{a, b, c, \dots , z\}$

مجموعه‌های A و B مثال‌هایی از مجموعه‌های متناهی می‌باشند. درحالی‌که مجموعه‌ای مانند مجموعه اعداد صحیح یا مجموعه اعداد طبیعی نامتناهی هستند.

نکته: C زیر مجموعه‌ای از D است اگر هر عضو مجموعه C در مجموعه D باشد که آن را به‌صورت $C \subseteq D$ نشان می‌دهیم، اگر C زیرمجموعه D باشد ولی با آن مساوی نباشد به‌صورت $C \subset D$ نشان می‌دهیم که C را یک زیرمجموعه سره D می‌نامیم:

$Z =$ مجموعه اعداد صحیح $= \{\dots,-۲,-۱,۰,۱,۲,\dots\}$

$B= \{۲,۴,۶,۸,\dots\}$ $\Rightarrow B \subset Z$

نکته: مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد را مجموعه تهی گویند که آن را به‌صورت $\{\ \} = \varnothing$ نشان می‌دهند.

نکته: تهی زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است.

مجموعه توانی

مجموعه توانی A که با $p(A)$ نشان داده می‌شود و شامل n عضو است عبارت است از: مجموعه همه زیرمجموعه‌های A که دارای ۲^n عضو است.

اعمال مجموعه‌ای:

نام	نماد	عبارت ریاضی	توضیحات
اجتماع	$\cup$	$A \cup B= \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B \}$	شامل عضوهایی که یا در A یا در B یا در هر دو وجود دارد
اشتراک	$\cap$	$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ and } x \in B \}$	شامل عضوهایی که در A و B مشترک است
تفاضل	-	$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ and } x \notin B \}$	شامل عضوهایی که در A هست ولی در B نیست

نکته: تفاضل متقارن: شامل عضوهایی است که در اجتماع A و B است ولی در اشتراکشان وجود ندارد: $A \Delta B$

نکته: مجموعه مرجع «جهانی» به مجموعه‌ای گفته می‌شود که تمام مجموعه‌ها، زیرمجموعه آن باشند که آن را با نماد $\cup$ یا E یا M یا S نشان می‌دهند.

قوانین نظریه مجموعه‌ها

۱) قانون متمم مضاعف : $\bar{\bar{A}} = A$

۲) قوانین دمورگان : $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad , \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

۳) قوانین تعویض‌پذیری : $A \cup B = B \cup A \quad , \quad A \cap B = B \cap A$

۴) قوانین شرکت‌پذیری : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad , \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

۵) قوانین بخش‌پذیری : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \, , \, A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

۶) قوانین خودتوانی : $A \cup A = A \quad , \quad A \cap A = A$

۷) قوانین همانی : $A \cup \emptyset = A \quad , \quad A \cap M = A$

۸) قوانین وارون : $A \cup \bar{A} = M \quad , \quad A \cap \bar{A} = \emptyset$

۹) قوانین غلبه : $A \cup M = M \quad , \quad A \cap \emptyset = \emptyset$

۱۰) قوانین جذب : $A \cup (A \cap B) = A \quad , \quad A \cap (A \cup B) = A$

۱۱) قوانین شبه جذب : $A \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B \quad , \quad A \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B$

۱۲) $A \Delta B = B \Delta A$

۱۳) $A \Delta A = \emptyset \quad , \quad A \Delta \bar{A} = M$

۱۴) $A \cap B = A \cap C \not\Rightarrow B = C \quad , \quad A \cup B = A \cup C \not\Rightarrow B = C$

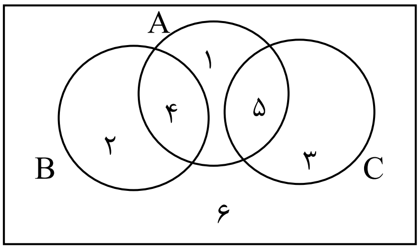
۱۵) $A \subset B \, , B \subseteq C \rightarrow A \subset C$

۱۶) $A \subseteq B \leftrightarrow \bar{A} \cup B = M$

۱۷) $A \cup B = M \leftrightarrow \bar{A} \subseteq B$

۱۸) $A \cap B \subset \emptyset \leftrightarrow B \subseteq \bar{A}$

مثال:



$A \cup B = (۱,۴,۵,۲)$

$A \cup C = (۱,۴,۵,۳)$

$B \cup C = (۲,۴,۳,۵)$

$A \cup B \cup C = (۱,۲,۳,۴,۵)$

$A \cap B = ۴ \quad , \quad A \cap C = (۵) \quad , \quad (B \cap C) = \varnothing \quad , \quad A \cap B \cap C = \varnothing$

$A - B = (۱,۵) \quad , \quad A - C = (۱,۴) \quad , \quad B - C = (۲,۴) = B$

مثال: با استفاده از قوانین مجموعه‌ها عبارات زیر را ساده کنید.

(۱) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap \bar{C} \cap D) \cup (\bar{A} \cap B)$

با استفاده از قانون جذب عبارت داده شده به‌صورت زیر درمی‌آید:

پاسخ (۱) $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) = B$

(۲) $(A - B) \cup (A \cap B)$

پاسخ (۲) $(A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) = A \cap (\bar{B} \cup B) = A \cap M = A$

مثال: عبارت زیر را ثابت کنید:

اگر $(A, B, C \subseteq M)$ باشد: $A \Delta C = B \Delta C \Rightarrow A = B$

حل: فرض کنیم $x \in A$ باشد که ۲ حالت پیش می‌آید:

(۱) $x \in C \Rightarrow x \notin A \Delta C \Rightarrow x \notin B \Delta C \Rightarrow x \in B$

(۲) $x \notin C \Rightarrow x \in A \Delta C \Rightarrow x \notin B \Delta C \Rightarrow x \in B$

در هر دو حالت داریم: $A \subseteq B$، به همین ترتیب داریم که $A \subseteq B$ و در نتیجه $A = B$ است.

ضرب دکارتی مجموعه‌ها

برای مجموعه‌های (مرجع) $A, B \subseteq M$، حاصل ضرب دکارتی این ۲ مجموعه با $A \times B$ نشان داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A, y \in B \}$

$B \times A = \{ (x, y) \mid x \in B, y \in A \}$

$A \times A = A_۲ = \{ (x, y) \mid x, y \in A \}$

مثال:

$A = \{a, b\}$ $\qquad B = \{a, d\}$

$A \times B = \{ (a, a), (a, d), (d, a), (b, d) \}$

$B \times A = \{ (a, a), (a, b), (d, a), (d, b) \}$

پس نتیجه می‌گیریم: $A \times B \neq B \times A$

خواص ضرب دکارتی یا چلیپایی

۱) $A \times B \neq B \times A$

۲) $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$

۳) $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$

۴) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

۵) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

۶) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

۷) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

۸) $A \times C = B \times C \ , \ \text{if} \ \ C \neq \varnothing \rightarrow A = B$

نکته: اگر $\begin{cases} |A| = \text{تعداد اعضای } A \\ |B| = \text{تعداد اعضای } B \end{cases}$ باشد آنگاه:

۱) $|A \times B| = |B \times A| = |A| \times |B|$

۲) $|(A \times B) \cap (B \times A)| = |A \cap B|^۲$

۳) $|(A \times B) \cup (B \times A)| = |A \times B| + |B \times A| - |(A \times B) \cap (B \times A)| = ۲|A| \times |B| - |A.B|^۲$

۴) $|(A \times B) - (B \times A)| = |A \times B| - |(A \times B) \cap (B \times A)| = |A| \times |B| - |A \cap B|^۲$

مثال: اگر $A=\{۸,...,۱۵\}$ **و** $B=\{۱,...,۱۰\}$ **جواب‌های زیر را به‌دست آورید.**

۱) $|A \cup (A\times B)|$

۲) $|A\cap (A\times B)|$

۳) $|A-(A\times B)|$

حل:

(۱)

$$|A\cup (A\times B)| = |(A\times A)\cup (A\times B)| = |A\times (A\cup B)| = |A| . |A\cup B|$$
$$= (|A| . (|A| + |B| - |A\cap B|))$$
$$= |A| = ۸ \quad , \quad |A\cup B| = ۸+۱۰-۳ = ۱۵ \quad , \quad ۸\times ۱۵ = ۱۲۰$$

(۲)

$$|A\cap (A\times B)| = |A\times (A\cap B)| = |A| . (A\cap B) = ۸\times ۳ = ۲۴$$

(۳)

$$|A - A\times B| = |A\times (A-B)| = |A| . (|A| - (A\cap B)) = ۸\times(۸-۳) = ۴۰$$

رابطه

به زیرمجموعه $(A\times B)$ رابطه‌ای از A در B گویند، آن را با R نشان می‌دهند و به هر زیر مجموعه $A\times A$ رابطه‌ای دوتایی روی A می‌گویند.

نکته: اگر $|A|=m$ و $|B|=n$ باشد، آنگاه $2mn$ رابطه، از جمله $\varnothing$ و خود رابطه $A\times B$ از A در B وجود دارد.

مثال: رابطه R را روی مجموعه Z به این صورت تعریف می‌کنیم که $a\,R\,b$ یا $R \in (a, b)$، در صورتی که $a\le b$ باشد.

نکته: در خواصی که در ادامه گفته می‌شود فرض بر این است که روابط روی A تعریف شده اند یعنی $(R\subseteq A\times A)$ است.

خواص روابط

(۱) خاصیت بازتابی (Reflexive): رابطه R روی مجموعه A را بازتابی گویند هرگاه:

$$\forall x\in A , (x , x)\in R$$

بازتابی بودن به این معناست که هر عنصر مجموعه A با خود در رابطه است.

(۲) خاصیت ضد بازتاب (Ir Reflexive): رابطه R روی مجموعه A را ضد بازتاب گویند هرگاه:

$$\forall x\in R ; (x , x)\notin R$$

مثال: با فرض اینکه $A=\{a, b, c, d\}$:

$R_1=\{(a , a) , (b , b) , (c , c) , (d , d)\}$، رابطه R_1 بازتابی است.

$R_2=\{(a , a) , (b , b)\}$، رابطه R_2 بازتابی نیست چون $(c , c) ; (d , d)\notin R$

$R_3=\{(a , b) , (b , a) , (c , d)\}$، رابطه R_3 ضد بازتاب است.

$R_4=\{(a , a) , (b , b) , (c , d)\}$، R_4 ضد بازتاب و بازتابی نیست.

⇦ **نتیجه**: برخی روابط وجود دارند که می‌توانند نه بازتاب باشند و نه ضد بازتاب.

(۳) خاصیت تقارنی (Symmetric): رابطه R را روی مجموعه A متقارن گویند هرگاه:

$$\forall\ x ; y \in R ; (x , y) \in R \leftrightarrow (y , x) \in R$$

مثال:

$R_5 = \{ (a , b) , (b , a) , (c , c) \} \leftarrow$ رابطه R_5 متقارن است.

$R_6 = \{ (a , b) , (b , c) , (b , a) \} \leftarrow$ رابطه R_6 متقارن نیست چون $(b , c) \in R_6$ ولی $(c , b) \notin R_6$.

(۴) خاصیت پادتقارنی (unti stmmetric): رابطه R روی مجموعه A را پادمتقارن گویند هرگاه:

$$\forall x ; y \in R ; (x , y) \in R\ ,\ (y , x) \in R \Rightarrow x = y$$

یعنی تنها هنگامی هم x در رابطه با y است و هم y در رابطه با x است که x , y عنصر واحدی از A باشند.

مثال:

$R_7 = \{ (a , a) , (b , b) , (c , d) , (d , a) \}$، رابطه R_7 پادمتقارن است.

$R = \{ (a , b) , (d , d) , (b , a) \}$، رابطه R_8 پاد متقارن نیست زیرا: $(b , a) \in R$ $(a , b) \in R$ ولی $a \neq b$

(۵) خاصیت تعدی (Transitive): رابطه R روی مجموعه A را تعدی گویند هرگاه:

$$\forall x, y, z \in A ; (x,y) \in R , (y , z) \in R \rightarrow (x , z) \in R$$

مثال: $R_9 = \{ (a , b) , (b , b) , (a , c) , (b ,c) \}$، رابطه R_9 تعدی است.

مثال: اگر $A = \{۱,۲,۳\}$ باشد رابطه R را طوری بیابید که کمترین تعداد زوج ممکن را داشته باشد:

۱- فقط بازتابی باشد.

۲- فقط پادمتقارن باشد.

۳- فقط بازتاب و پادمتقارن.

۴- فقط پادمتقارن و متعدی.

۵- فقط سه خاصیت داشته باشد.

۶- هیچ خاصیتی نداشته باشد.

حل:

۱) $R_1 = \{ (۱,۱) , (۲,۲) , (۳,۳) , (۱,۳) , (۳,۱) , (۲,۳) \}$

۲) $R_2 = \{(۱,۳) , (۲,۳)\}$

۳) $R_3 = \{ (۱,۱) , (۲,۲) , (۳,۳) , (۱,۳), (۳,۲)\}$

۴) $R_4 = \{ (۲,۳) \}$

۵) سه حالت وجود دارد.

(الف) = فقط بازتاب، متقارن، متعدی = $\{(۱,۱) , (۲,۲) , (۳,۳) , (۱,۳) , (۳,۱)\}$

(ب) = فقط بازتاب، پادمتقارن، متعدی = $\{(۱,۱) , (۲,۲) , (۳,۳) , (۱,۳)\}$

(ج) = فقط متقارن، پادمتقارن، متعدی = $\{\ \}$

۶) $R_6 = \{(۱,۳) , (۳,۱) , (۱,۲)\} \Rightarrow$ رابطه‌ای که هیچ خاصیتی ندارد، حداقل ۳ زوج دارد.