

به نام خداوند بخشنده مهربان



آمار و روش تحقیق

مجموعه:

روانشناسی

مؤلف:

دکتر جعفر میببی

آمادگی آزمون دکتری

دکتر حبیبی، جعفر

آمار و روش تحقیق / دکتر جعفر حبیبی

تهران - مشاوران صعود ماهان: ۱۴۰۰

۱۷۲ص: جدول، نمودار، (آمادگی آزمون دکتری)

ISBN/N: 978-600-458-700 -6

شابک

وضعیت فهرست نویسی: فیا مختصر

فارسی - چاپ اول

۱- آمار و روش تحقیق

۲- آزمون دوره های تحصیلات تکمیلی

ج - عنوان

شماره کتابشناسی ملی



انتشارات مشاوران صعود ماهان



آمار و روش تحقیق	<input type="checkbox"/> نام کتاب:
مجید و هادی سیاری	<input type="checkbox"/> مدیران مسئول:
دکتر جعفر حبیبی	<input type="checkbox"/> مولف:
سمیه بیگی	<input type="checkbox"/> مدیر برنامه ریزی و تولید محتوا:
مشاوران صعود ماهان	<input type="checkbox"/> ناشر:
اول / ۱۴۰۰	<input type="checkbox"/> نوبت و تاریخ چاپ:
۱۰۰۰ نسخه	<input type="checkbox"/> تیراژ:
۱/۳۴۰/۰۰۰ ریال	<input type="checkbox"/> قیمت:
ISBN 978-600-458-700-6	<input type="checkbox"/> شابک:

انتشارات مشاوران صعود ماهان: تهران - خیابان ولیعصر، بالاتر از تقاطع ولیعصر مطهری، پلاک ۲۰۵۰

تلفن: ۸۸۱۰۰۱۱۳ و ۸۸۴۰۱۳۱۳

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به موسسه آموزش عالی آزاد ماهان می باشد. و هرگونه اقتباس و

کپی برداری از این اثر بدون اخذ مجوز پیگرد قانونی دارد.

بنام خدا

ایمان داریم که هر تغییر و تحول بزرگی در مسیر زندگی بدون تحول معرفت و نگرش میسر نخواهد بود. پس بیایید با اندیشه توکل، تفکر، تلاش و تحمل در توسعه دنیای فکریمان برای نیل به آرامش و آسایش توأمان اولین گام را برداریم. چون همگی یقین داریم دانایی، توانایی می آورد

شاد باشید و دلی را شاد کنید

برادران سیاری

پیشگفتار

آمار و روش تحقیق یکی از دروس تأثیرگذار برای کسب موفقیت در مقاطع ارشد و دکتری بسیاری از رشته‌ها از جمله روان‌شناسی و علوم تربیتی است. این درس دارای سرفصل‌هایی مشترک در تمامی گرایش‌های روان‌شناسی و علوم تربیتی بوده و در چند سال اخیر، سطح سؤالات کنکورهای ارشد و دکتری نیز یکسان و سؤالات از مباحثی مشترک طراحی شده است.

در کتاب حاضر سعی بر آن شده است که مطالب آماری و پژوهشی به‌طور جامع، با بیانی روان و با استفاده از تجربه سال‌ها تدریس در دروس ریاضی، آمار و روش‌های تحقیق، خدمت شما عزیزان ارائه شود که هم قابلیت استفاده برای آمادگی کنکورهای ارشد و دکتری را داشته باشد و هم بتواند به‌عنوان کتابی راهگشا در کنار منابع اصلی در دوره‌های ارشد و دکتری رشته‌های روان‌شناسی و علوم تربیتی مورد استفاده قرار گیرد.

آشنایی با روش‌های مختلف آماری و انواع روش‌های تحقیق، تنها به مرحله آمادگی کنکور محدود نشده، بلکه دانشجویان عزیز در دروس دانشگاهی در مقاطع مختلف، پایان‌نامه ارشد، آزمون جامع دکتری و همچنین در رساله دکتری، نیاز به تسلط بر آمار و تکنیک‌های تحقیق خواهند داشت. اما غالباً به دلایل مختلفی مانند ضعف پایه ریاضی، بیان نامفهوم کتاب‌ها، عدم تسلط کافی برخی از اساتید و ... یادگیری کامل، مفهومی و کاربردی این درس به مشکلی بزرگ برای اغلب دانشجویان علوم انسانی تبدیل شده است. لذا تلاش شده است نکات آماری و پژوهشی، به‌صورت مفهومی و با رویکردی کاربردی خدمت شما عزیزان ارائه شود.

ترتیب ارائه مطالب در کتاب حاضر، کمی متفاوت با کتب دیگر (منابع اصلی و کمک‌آموزشی) بوده و سعی بر آن شده تا بهترین نظم ممکن را برای یادگیری فراهم سازد. به‌طور خاص در قسمت روش‌های تحقیق، مباحث به‌گونه‌ای مطرح شده است که دانشجو بعد از آشنایی با مقدمات تحقیق، با دسته‌بندی کلی پژوهش‌های کمی و کیفی در ابتدا آشنایی کامل و عمیق پیدا کرده و سپس به ترتیب از ساده‌ترین تا پیچیده‌ترین روش تحقیق مورد بحث قرار بگیرد. به‌عنوان مثال روش تحقیق آزمایشی که به دقیق‌ترین روش پژوهشی معروف است، در آخرین فصل روش‌های تحقیق مورد بحث قرار گرفته است.

اگر بخواهیم مطابقت با محتوای کنکورهای ارشد و دکتری را مدنظر قرار دهیم، این کتاب دارای پوشش حداقل ۸۰ درصدی بوده و در کنار درسنامه، کتاب تست با پاسخنامه تشریحی کنکورهای ارشد و دکتری سال‌های اخیر نیز تدارک دیده شده تا نیاز عزیزان را در مسیر آمادگی این آزمون‌ها تا حدود زیادی به‌طرف سازد. لذا توصیه می‌شود در کنار این دو مجموعه کتاب و تست، اگر دانشجویان عزیز تسلط کافی پیدا کردند و علاقه به مطالعه گسترده‌تر داشتند، صرفاً از منابع اصلی (و نه کمک‌آموزشی) مانند

کتاب دلاور، فرگوسن، شیولسون، میرز و ... استفاده کنند.

در پایان شکر خالق را به‌جا آورده و از خداوند حکیم مسئلت دارم تا این توفیق را نصیب بنده کرده تا بتوانم برای دانش‌پژوهان عزیز، معلمی سالم، آگاه و راهنما باشم.

جعفر حبیبی - مدرس آمار، روش‌های تحقیق و نرم‌افزارهای آماری

[Instagram.com/Habibi_Res_Sta](https://www.instagram.com/Habibi_Res_Sta), t.me/Habibi_Res_Sta

فهرست مطالب

بخش اول - آمار

۶	فصل اول - شاخص‌های توزیع فراوانی و نمودار
۱۶	فصل دوم - شاخص مرکزی
۲۴	فصل سوم - شاخص‌های پراکندگی
۳۰	فصل چهارم - نمرات استاندارد و منحنی طبیعی
۳۶	فصل پنجم - همبستگی
۴۲	فصل ششم - پیش‌بینی
۴۷	فصل هفتم - برآورد (تعمیم)
۵۲	فصل هشتم - آزمون فرضیه
۵۷	فصل نهم - آزمون‌های آماری
۶۴	فصل دهم - آزمون‌های پارامتریک
۶۹	فصل یازدهم - آزمون مقایسه چندگروهه
۸۲	فصل دوازدهم - همبستگی چندمتغیره و انواع رگرسیون
۸۶	فصل سیزدهم - احتمالات
۹۳	فصل چهاردهم - پیوست

بخش دوم - روش تحقیق

۱۱۳	فصل اول - متغیرها
۱۱۷	فصل دوم - تحقیقات و منابع شناخت
۱۲۴	فصل سوم - موضوع، سوال و فرضیه‌های تحقیق
۱۲۹	فصل چهارم - ابزارهای اندازه‌گیری و طیف‌های سنجش
۱۳۸	فصل پنجم - نمونه‌گیری
۱۴۲	فصل ششم - تحقیقات کیفی
۱۴۷	فصل هفتم - روش‌های تحقیق کیفی
۱۵۴	فصل هشتم - روش‌های تحقیق کمی از نوع توصیفی
۱۶۲	فصل نهم - روش‌های تحقیق کمی از نوع تجربی

آمار

فصل اول شاخص‌های توزیع فراوانی و نمودارها

فصل دوم شاخص‌های مرکزی

فصل سوم شاخص‌های پراکندگی

فصل چهارم نمرات استاندارد و منحنی طبیعی

فصل پنجم همبستگی

فصل ششم پیش‌بینی

فصل هفتم برآورد (تعمیم)

فصل هشتم آزمون فرضیه

فصل نهم آزمون‌های آماری ناپارامتریک (غیر مشروط)

فصل دهم آزمون‌های پارامتریک (مشروط)

فصل یازدهم آزمون مقایسه چندگروهه (مقایسه چند میانگین)

فصل دوازدهم همبستگی چندمتغیره و انواع رگرسیون

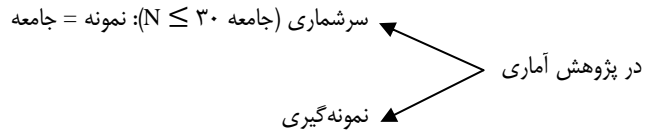
فصل سیزدهم احتمالات

فصل چهاردهم پیوست

فصل اول

شاخص‌های توزیع
فراوانی و نمودارها

تعریف آمارهای توصیفی و استنباطی



- در پژوهش‌های سرشماری آمار توصیفی کفایت می‌کند.
- آمار توصیفی نمونه را توصیف می‌کند.
- در تحقیقاتی که نمونه‌گیری انجام می‌شود، بعد از توصیف نمونه نتایج آن را به جامعه تعمیم می‌دهیم و از آمار استنباطی استفاده می‌کنیم.

آمار توصیفی: طبقه‌بندی، تلخیص و توصیف اطلاعات حاصل از نمونه

۱. جدول توزیع فراوانی
 ۲. نمودار
 ۳. شاخص‌های مرکزی (مد / میانه / میانگین)
 ۴. شاخص‌های پراکندگی
 ۵. نمرات استاندارد و منحنی طبیعی
 ۶. همبستگی و رگرسیون
- مهم‌ترین کارکرد آمار توصیفی چیست؟ تلخیص (خلاصه کردن)
 - چگونه به هدف می‌رسد؟ داده‌های عددی را در شاخص‌های آماری مثل میانگین و واریانس خلاصه می‌کند.
 - هدف آمار توصیفی: توصیف اطلاعات حاصل از نمونه

آمار استنباطی: به تحلیل و تفسیر و تعمیم نتایج حاصل از تنظیم و محاسبه مقدماتی آماری تکیه دارد.

هدف آمار استنباطی: تعمیم اصول و یافته‌ها برای پیش‌بینی حوادث
 آمار استنباطی (تحلیل آماری) به دو دسته آزمون فرضیه و تعمیم تقسیم می‌شود:

۱. آزمون فرضیه

آزمون‌های آماری مانند تحلیل واریانس وظیفه آزمودن فرضیه و بررسی معناداری را دارند؛ در واقع تأیید یا رد فرضیه‌ها را مشخص می‌کنند. به دلایل مختلفی، آزمون‌ها از گستردگی و تعدد بالایی برخوردارند. از مهم‌ترین این دلایل می‌توان به انواع فرضیه (همبستگی، مقایسه‌ای و علی) و انواع سطح سنجش متغیرها (اسمی، ترتیبی، فاصله‌ای و نسبی) اشاره کرد.

۲. تعمیم: برآورد ویژگی‌های جامعه از روی ویژگی‌های نمونه

حروف یونانی حروف لاتین
 به ویژگی‌های عددی جامعه، پارامتر و به ویژگی‌های عددی نمونه، آماره گفته می‌شود.

جدول ۱ علائم مربوط به پارامتر و آماره

ویژگی شاخص	میانگین	واریانس	انحراف یا معیار	نسبت	همبستگی	تعداد مشاهدات
آماره	\bar{X} یا M	S^2	S	P	r	n
پارامتر	μ	σ^2	σ	π	ρ	N

وجه مشترک آمار توصیفی و استنباطی: شاخص نمونه (از شاخص آماری نمونه جهت برآورد پارامتر جامعه استفاده می‌کنند) برآوردکننده: ویژگی نمونه‌ای که به صورت تصادفی از جامعه انتخاب شده باشد.

در واقع به کمک آماره‌ها ابتدا نمونه‌ای انتخاب شده از جامعه توصیف شده و سپس برآورد و فرض آزمایشی پیرامون ویژگی‌های جامعه صورت می‌گیرد.

حدود واقعی اعداد

طبق قرارداد علم آمار، در جهت سنجش و اندازه‌گیری دقیق‌تر، می‌بایست هر داده کمی را به صورت طیفی پیوسته از حد پایین تا حد بالا در نظر بگیریم (نیم واحد پایین‌تر تا نیم واحد بالاتر).

۱۲/۷۰	۱۲/۷۴۰	۱۲
۱۲/۶۵ ۱۲/۷۵	۱۲/۷۳۵ ۱۲/۷۴۵	۱۱/۵ ۱۲/۵

جدول توزیع فراوانی

۱. جدول غیرطبقاتی

نمره خام	فراوانی
X	f
۱۵	۲
۱۲	۳
۵	۱

۲. جدول طبقاتی (دارای خطای طبقه‌بندی)^۱

X	f
۵-۰	۲
۱۰-۵	۴
۱۵-۱۰	۳

زمانی که تعداد داده‌ها و همچنین پراکندگی آن‌ها زیاد باشد از جدول طبقاتی استفاده می‌کنیم. استفاده از جداول طبقاتی، باعث ایجاد خطایی در محاسبه شاخص‌های آماری خواهد شد که به آن خطای طبقه‌بندی گفته می‌شود. (خطای طبقه‌بندی عبارت است از اختلاف بین شاخص آماری محاسبه‌شده در استفاده از توزیع فراوانی طبقه‌بندی‌شده و توزیع فراوانی طبقه‌بندی‌نشده) **نکته:** خطای طبقه‌بندی با طول طبقات رابطه مستقیم و با تعداد طبقات رابطه عکس دارد.



به عنوان مثال، در جداول زیر که برای طبقه بندی داده های ۰ تا ۱۰۰ استفاده شده اند، جدول B مقدار خطای بیشتری دارد.

خطای بیشتر B		A	
۲۵-۰		۱۰۰-۰	
۵۰-۲۵		۲۰-۱۰	
.		.	
.		.	
.		۱۰۰-۹۰	

معرفی شاخص‌های توزیع فراوانی^۱

$$R = \text{Max} - \text{Min} + 1$$

به خاطر حدود واقعی

$$۶.۹.۱۰.۱۵.۲۶$$

$$R = ۲۶/۵ - ۵/۵ = ۲۱$$

$$R = ۲۶ - ۶ + ۱ = ۲۱$$

$$I = x_H - x_L + 1$$

بزرگ‌ترین داده طبقه
کوچک‌ترین داده طبقه
به خاطر
حدود
واقعی

x	f
۸-۱۳	
۱۴-۱۹	

$i = ۱۳ - ۸ + ۱ = ۶$

$$K = \frac{R}{I}$$

تعداد طبقات به کمک حاصل تقسیم دامنه تغییرات بر طول طبقات می‌توان تعداد طبقات جدول را محاسبه کرد.

به عنوان مثال، اگر دامنه تغییرات برابر ۱۰۰ و طول طبقات مساوی ۵ باشد، تعداد ۲۰ طبقه خواهیم داشت.

نحوه ساختن توزیع فراوانی طبقه‌بندی شده

اولین مرحله: محاسبه دامنه تغییرات

دومین مرحله: تعیین تعداد طبقات

معمولاً تعداد طبقات بین ۱۰ تا ۲۰ طبقه اختیار می‌شود، اما می‌توان از فرمول زیر که به قانون استرژ معروف است نیز استفاده کرد:

$$K = 1 + \sqrt[3]{\log(n)}$$

در فرمول بالا n و K به ترتیب عبارت‌اند از تعداد اعداد و طبقه‌ها، پایه لگاریتم بر مبنای ۱۰ است. به طور مثال، چنانچه تعداد کل اعداد جمع‌آوری شده مساوی ۶۰ باشد، تعداد طبقه‌ها فرمول مورد بحث، برابر است با:

$$(\log^{10} 60 \text{ در پایه } 10 \text{ مساوی } 1/7782 \text{ است})$$

$$K = 1 + \sqrt[3]{\text{Log}n}$$

$$K = 1 + \sqrt[3]{\log^{10} 60}$$

$$K = 1 + \sqrt[3]{(1/7782)}$$

$$K = 6/86806 \approx 7$$

$$I = \frac{R}{K}$$

سومین مرحله: تعیین طول طبقات

نمونه‌ای از یک جدول توزیع فراوانی غیرطبقاتی:

X	f (فراوانی مطلق)	Cf (فراوانی تراکمی/تجمعی)	$\frac{f}{n}$ فراوانی نسبی	$\frac{f}{n} \times 100$ فراوانی درصدی	$\frac{Cf}{n}$ فراوانی تراکمی نسبی	$\frac{Cf}{n} \times 100$ فراوانی تراکمی درصدی
۵	۲	۲	۰/۲	۲۰٪	۰/۲	۲۰٪
۸	۱	۳	۰/۱	۱۰٪	۰/۳	۳۰٪
۹	۳	۶	۰/۳	۳۰٪	۰/۶	۶۰٪
۱۳	۱	۷	۰/۱	۱۰٪	۰/۷	۷۰٪
۱۶	۳	10 (=n)	۰/۳	۳۰٪	۱	۱۰۰٪

$$\sum f = n$$

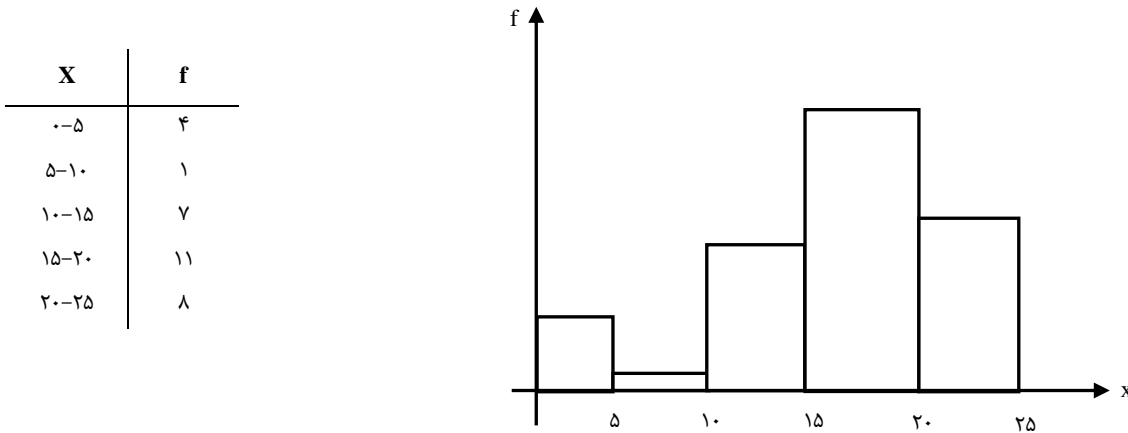
$$\sum \frac{f}{n} = 1$$

$$\sum \%f = \%100$$

نکته مهم در تنظیم جدول توزیع فراوانی این است که اگر داده‌ها یا طبقات از بزرگ به کوچک مرتب شوند، فراوانی تراکمی یا تجمعی از سمت پایین به بالای جدول محاسبه خواهد شد؛ در واقع فراوانی تراکمی همواره از سمت عدد یا طبقه کوچک شروع می‌شود.

« نمودارها » ← نمایش گرافیکی داده‌ها (ساده‌سازی ارائه‌ی داده‌ها)

۱. نمودار هیستوگرام^۱

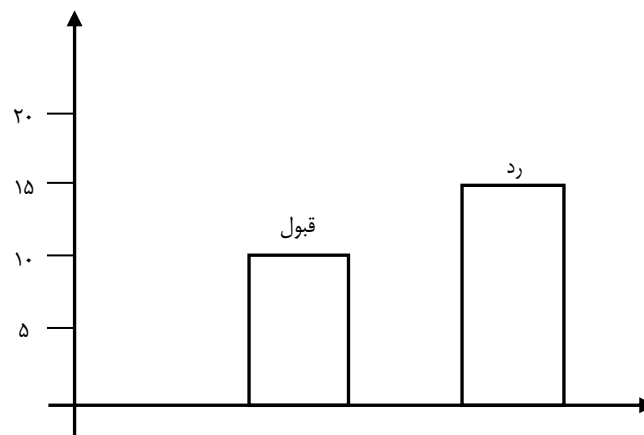


- این نمودار در مقیاس‌های فاصله‌ای و نسبی (کمی و پیوسته) استفاده شده و کاربرد مهم آن در آمار، بررسی تقارن توزیع است.

۲. نمودار ستونی^۲ (میله‌ای)

جدول ۲-۱ توزیع فراوانی نمره‌های ۲۵ نفر در یک آزمون فیزیک

درجه‌بندی	فراوانی (f)	درصد (p)
قبول	۱۰	۴۰
رد	۱۵	۶۰



کاربرد نمودار ستونی همانند هیستوگرام بوده (بررسی تقارن توزیع) با این تفاوت که دارای مقیاس اسمی است (حتی ترتیب طبقات در این نمودار اهمیتی ندارد).

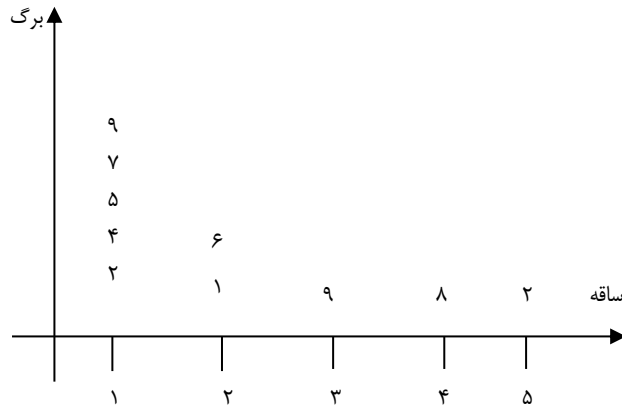
1 - histogram

2 - bargraph



۳. نمودار ساقه و برگ (شاخه و برگ)^۱

۱۷ ۳۹ ۱۲ ۵۲ ۲۶
۱۵ ۲۱ ۱۹ ۴۸ ۱۴

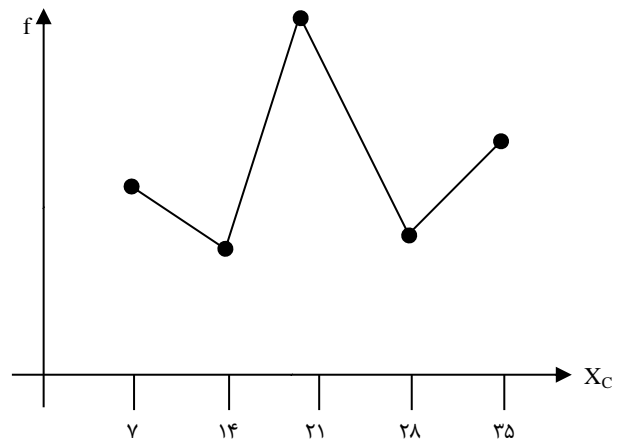


از نظر مقیاس و کاربرد، این نمودار کاملاً همانند هیستوگرام است (کاربرد: بررسی تقارن - سطح سنجش: فاصله ای یا نسبی)، با این تفاوت که اگر تعداد داده‌ها کم باشد اطلاعات جزئی‌تری نسبت به هیستوگرام در اختیار قرار می‌دهد.

۴. نمودار چندضلعی^۲

نقطه میانی طبقه یا $X_C = \frac{x_L + x_H}{2}$
میانگین طبقه

X	f	x_C
۱۰-۴	۴	۷
۱۷-۱۱	۱	۱۴
۲۴-۱۸	۱۰	۲۱
۳۱-۲۵	۲	۲۸
۳۸-۳۲	۵	۳۵



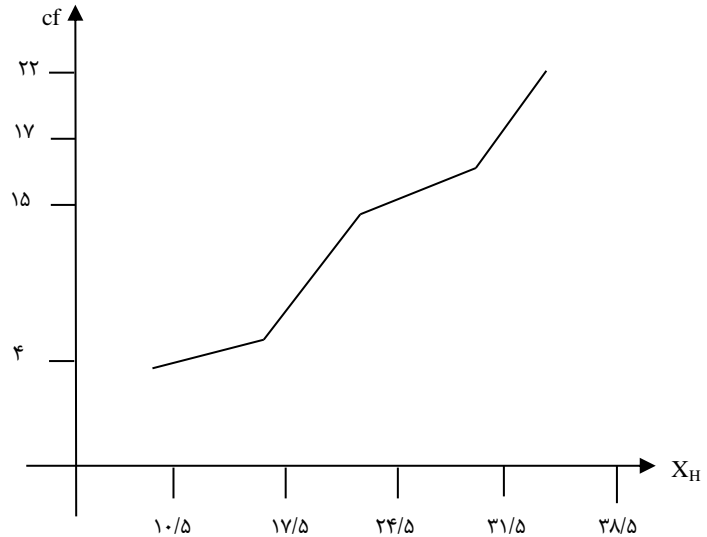
این نمودار نیز برای داده‌های کمی و پیوسته استفاده می‌شود و پرکاربردترین نمودار به شمار می‌رود، زیرا جهت مقایسه دو یا چند توزیع از آن استفاده می‌شود.

1 - Stem and leaf plot

2 - polygon

۵. نمودار چندضلعی تراکمی (اجایو)^۱

X	f	cf	X _H
۱۰-۴	۴	۴	۱۰/۵
۱۷-۱۱	۱	۵	۱۷/۵
۲۴-۱۸	۱۰	۱۵	۲۴/۵
۳۱-۲۵	۲	۱۷	۳۱/۵
۳۸-۳۲	۵	۲۲	۳۸/۵



این نمودار کمی و پیوسته است و جهت نمایش وضعیت یک داده نسبت به سایر داده‌ها (گروه) استفاده می‌شود.

۶. نمودار دایره‌ای^۲

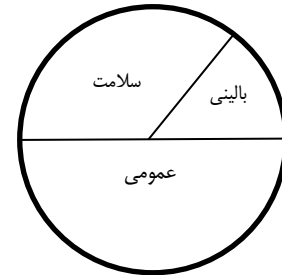
x	f
بالینی	۲۰
عمومی	۶۰
سلامت	۴۰

$$\frac{f}{n} \times ۳۶۰ = \text{اندازه قطاع}$$

$$\frac{۲۰}{۱۲۰} \times ۳۶۰ = ۶۰ \text{ بالینی}$$

$$\frac{۶۰}{۱۲۰} \times ۳۶۰ = ۱۸۰ \text{ عمومی}$$

$$\frac{۴۰}{۱۲۰} \times ۳۶۰ = ۱۲۰ \text{ سلامت}$$



نمودار دایره‌ای دارای مقیاس اسمی - ترتیبی است و جهت نمایش نسبت جزء به کل استفاده می‌شود.

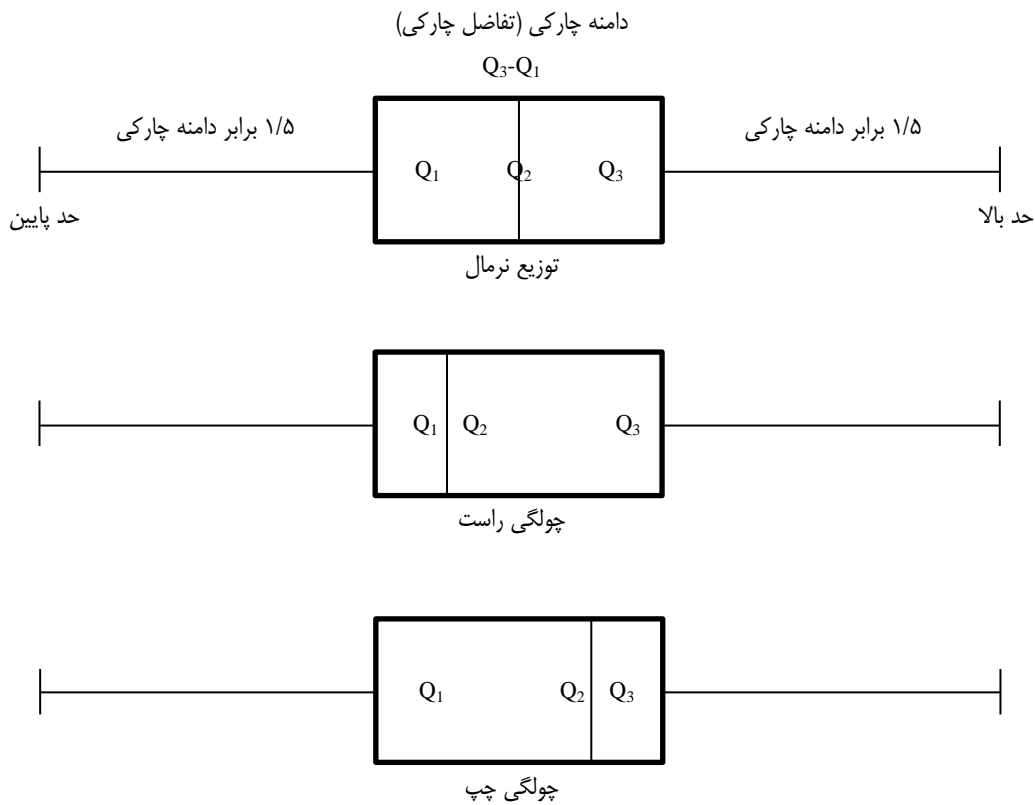
1 - cumulative (Ogive)

2 - Pie chart

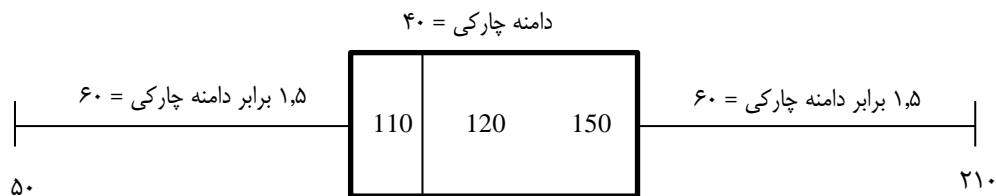
۷. نمودار جعبه‌ای^۱

مهم‌ترین کاربرد نمودار جعبه‌ای، یافتن داده پرت است.

به طوری که ۱/۵ برابر دامنه چارکی محاسبه و از مقدار چارک اول کاسته و به مقدار چارک سوم افزوده می‌شود. دامنه به دست آمده، دامنه نرمال بوده و اعداد بیرون از این دامنه، داده پرت به شمار می‌روند.



- به عنوان مثال اگر در توزیع داده های یک پژوهش، مقدار چارک اول برابر ۱۱۰، چارک دوم ۱۲۰ و چارک سوم ۱۵۰ باشد، خواهیم داشت:



بدین ترتیب در این پژوهش، داده های مابین ۵۰ و ۲۱۰ داده پرت نبوده اما چنانچه بیرون از این بازه، عدد یا داده ای داشته باشیم، به عنوان داده پرت شناسایی و معرفی خواهد شد. ضمناً از آنجایی که مقدار چارک دوم به چارک اول نزدیکتر است، می توان نتیجه گرفت که بیشتر تراکم توزیع سمت چپ بوده و با این حساب، توزیع دارای چولگی راست یا + است.

فصل دوم

شاخص‌های مرکزی

۱. مد^۱ یا نما M_0

مد شاخصی مبنی بر تکرار است و به طبقه‌ای اطلاق می‌شود که دارای بیشترین فراوانی باشد. این شاخص ضعیف‌ترین و بی‌ثبات‌ترین شاخص مرکزی به شمار می‌رود، زیرا حتی ویژگی ترتیب برای آن مهم نیست (مقیاس اسمی) و لزوماً در مرکز توزیع قرار نمی‌گیرد. از مد می‌توان در تمامی مقیاس‌ها استفاده کرد و کاربرد آن زمانی است که قصد محاسبه سریع و آسان یک شاخص مرکزی را داشته باشیم.

محاسبات نما:

زمانی که دو عدد یا دو طبقه متوالی، دارای بیشترین فراوانی و به مقدار یکسان باشند، میانگین این دو عدد یا طبقه، به‌عنوان مد یا نما معرفی خواهد شد.

طرز محاسبه مد در داده‌های طبقه‌بندی شده (پیوسته)

برای محاسبه مد مراحل زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم:

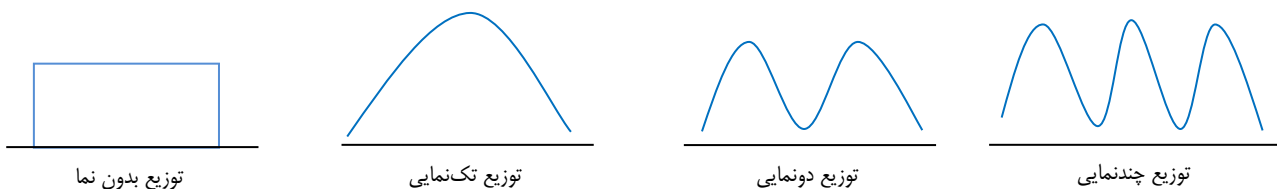
۱- ابتدا طبقه‌ای که بیشترین فراوانی مطلق را دارد انتخاب می‌کنیم.

۲- از فرمول مقابل مد را محاسبه می‌کنیم:

$$MO = L + \frac{f_a}{f_a + f_b} \times i$$

↖ فراوانی مطلق طبقه بالایی نما
↘ فراوانی مطلق طبقه پایینی نما

نکته: توزیع‌های آماری مورد توجه در این کتاب، توزیع‌های تک‌نمایی هستند؛ اما لازم به ذکر است که توزیع فراوانی داده‌ها می‌تواند دو نمایی یا چند نمایی باشد:



۲. میانه^۲ M_d

میانه نقطه وسط یا پنجاه درصدی داده‌ها است.

این شاخص مبتنی بر ترتیب و دارای مقیاس ترتیبی است؛ پس در مقیاس‌هایی می‌توان از آن استفاده کرد که ویژگی ترتیب را داشته باشند؛ یعنی مقیاس‌های ترتیبی، فاصله‌ای و نسبی.

میانه برخلاف میانگین شاخصی کیفی است که تحت تأثیر ارزش عددی یا حجم داده‌ها قرار نمی‌گیرد. لذا میانه به داده‌های پرت کوچک یا بزرگ حساس نیست؛ بنابراین می‌توان گفت اگر توزیع داده‌ها چولگی یا داده پرت داشته باشد، بهترین و مناسب‌ترین شاخص مرکزی میانه است.

$$\sum |x - m_d| \leq \sum |x - A|$$

همواره و در هر توزیعی مجموع قدر مطلق انحراف داده‌ها از میانه حداقل است.

«محاسبه میانه»

۱. وقتی تعداد داده‌ها فرد باشد.

۵، ۹، ۱۰، ۱۵، ۱۸

۲. وقتی تعداد داده‌ها زوج باشد.

۵، ۸، ۱۰، ۱۴، ۱۷، ۲۰

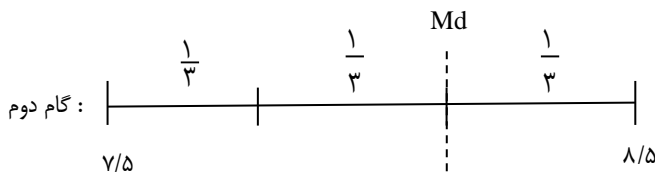
از این دو میانگین می‌گیریم (۱۲)

۳. زمانی که در میانه توزیع داده تکراری داشته باشیم.

Md

۵، ۷، ۸، ۸، ۸، ۱۲، ۱۵، ۲۰

$$\text{مکان میانه: گام اول} \quad \frac{n}{2} = \frac{8}{2} = 4$$



$$Md = 7/5 + \frac{2}{3} = 8/16$$

$$Md = \text{حد پایین عدد تکراری} + \frac{\text{تعداد تکرارهای قبل از میانه}}{\text{تعداد کل تکرارها}}$$

x	f
۱۵	۱
۱۹	۳
۲۶	۴
۳۲	۲

Md
۱۵ ۱۹ ۱۹ ۱۹ ۲۶ | ۲۶ ۲۶ ۲۶ ۳۲ ۳۲

$$\text{مکان میانه: } \frac{10}{2} = 5$$

$$Md = 25/5 + \frac{1}{4} = 25/75$$

Md

۱۲، ۱۵، ۱۸، ۱۸، ۱۸، ۱۸، ۲۰

$$\text{مکان میانه: } \frac{n}{2} = \frac{7}{2} = 3/5$$

$$Md = 17/5 + \frac{1/5}{2} = 17/87$$

۴. زمانی که تعداد داده‌ها زیاد باشد یا جدول طبقه‌بندی شده داشته باشیم:

$$Md = L + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \quad (i)$$

L = پایین حد واقعی طبقه‌ای که میانه در آن قرار دارد

cf = فراوانی تراکمی طبقه قبل از طبقه میانه

f = فراوانی مطلق طبقه‌ای که میانه در آن قرار دارد

i = فاصله طبقات

n = تعداد نمره‌ها

به طور مثال:

جدول توزیع فراوانی نمره‌های یک آزمون

طبقات	f	Cf
۴۸-۵۰	۲	۵۰
۴۵-۴۷	۳	۴۸
۴۲-۴۴	۴	۴۵
۳۹-۴۱	۶	۴۱
۳۶-۳۸	۸	۳۵
۳۳-۳۵	۸	۲۷
۳۰-۳۲	۷	۱۹
۲۷-۲۹	۶	۱۲
۲۴-۲۶	۳	۶
۲۱-۲۳	۲	۳
۱۸-۲۰	۱	۱

محاسبه میانه برای توزیع فراوانی بالا، شامل پنج مرحله به شرح زیر است:

$$50 \div 2 = 25$$

۱. تقسیم تعداد کل نمره‌ها بر ۲

۲. مراجعه به ستون فراوانی تراکمی و پیدا کردن اولین طبقه‌ای که فراوانی تراکمی آن مساوی یا بزرگ‌تر از $\frac{N}{2}$ یعنی ۲۵ است. با مراجعه به جدول اولین طبقه‌ای

است که فراوانی تراکمی آن بزرگ‌تر از ۲۵ است (برای پیدا کردن این طبقه از پایین‌ترین طبقه شروع می‌کنیم).

$$L = 32/5$$

۳. حد پایین واقعی این طبقه یا L را تعیین می‌کنیم.

۴. مقادیر cf و f را از جدول توزیع فراوانی استخراج می‌کنیم (به ترتیب ۱۹ و ۸).

۵. مقادیر تعیین شده به شرح فوق را در فرمول زیر جایگزین می‌کنیم.


$$Md = 32/5 + \frac{\frac{50}{2} - 19}{8} (3) = 34/75$$

۳. میانگین^۱ [حسابی] \bar{X} یا M

ویژگی‌های میانگین

۱. میانگین دارای مقیاس فاصله‌ای است و در مقیاس‌های فاصله‌ای و نسبی می‌توان از آن استفاده کرد.
۲. اگر توزیع داده‌ها نرمال باشد بهترین و مناسب‌ترین شاخص مرکزی میانگین است.
۳. همواره و در هر توزیعی مجموع انحراف داده‌ها از میانگین برابر صفر است، به همین دلیل است که میانگین را مرکز ثقل یا نقطه تعادل توزیع می‌نامند.

$$X = 2 \quad 3 \quad 5 \quad 14 \qquad \bar{X} = 6 \qquad X - \bar{X} = -4 \quad -3 \quad -1 \quad 8$$



همواره و در هر توزیعی: $\sum(x - \bar{x}) = 0$

۴. همواره و در هر توزیعی مجموع مجذور انحراف داده‌ها از میانگین حداقل است:

$$\sum(x - \bar{x})^2 \leq \sum(x - a)^2$$

هر عدد دلخواهی: a

محاسبه میانگین:

برای داده‌های خام: $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$

جدول غیر طبقاتی: $\bar{x} = \frac{\sum f x}{n}$

X	f
۱۵	۳
۱۶	۴
۱۰	۲

جدول طبقاتی: $\bar{x} = \frac{\sum f x_c}{n}$

X	f	X_c
۱۵-۲۳	۳	۱۹
۲۴-۳۲	۱	۲۸
۳۳-۴۱	۴	۳۷

مثال: کلاس ۱۰ نفره‌ای دارای میانگین ۱۵ و کلاس ۴۰ نفره‌ای دارای میانگین ۱۰

$$\bar{X} = 15 \quad \bar{X} = 10$$

$$n = 10 \quad n = 40$$

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2 + \dots}{n_1 + n_2 + \dots}$$

(میانگین وزنی (میانگین کل، میانگین مرکب، میانگین میانگین‌ها)

$$\text{میانگین کل} = \frac{10 \times 40 + 15 \times 10}{50} = \frac{550}{50} = 11$$

فرمول تجربی پیرسون (رابطه میان شاخص‌های مرکزی):

$$m_s = 3m_d - 2\bar{x}$$

مثال: در توزیعی با میانگین ۲۰ و نمای ۵، میانه چند است؟

$$m_d = 15$$

میانگین هندسی^۱

برای محاسبه میانگین درصدها، نسبت‌ها یا نرخ‌ها استفاده می‌شود.

$$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

مثال: میانگین هندسی اعداد ۸ ۲۷ ۱۲۵

$$G = \sqrt[3]{8 \times 27 \times 125} = 30$$

میانگین هارمونیک^۲ یا همساز

برای محاسبه میانگین داده‌هایی با واحد ترکیبی (مانند $\frac{m}{s}$) استفاده می‌شود.

$$HM \text{ یا } H = \left(\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \right)$$

نکته: در صورت محاسبه میانگین‌ها برای یک توزیع فراوانی، میانگین حسابی از نظر عددی بزرگ‌تر از میانگین هندسی و هارمونیک است:

$$\bar{x} > G > HM$$

فرمول محاسبه میانگین همساز از طریق میانگین‌های هندسی و حسابی.

$$HM = \frac{G^2}{\bar{X}}$$

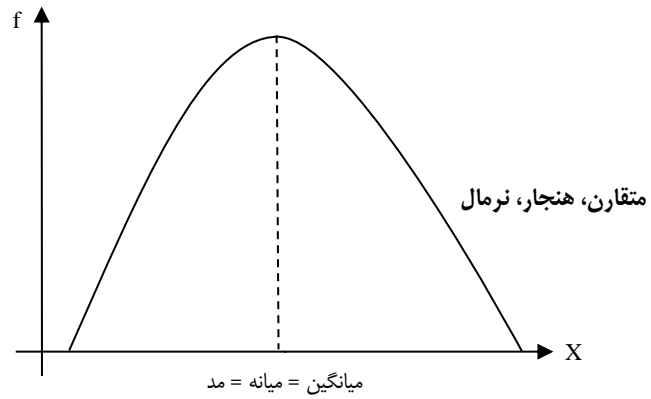
1 - Geometric mean

2 - Harmonic mean

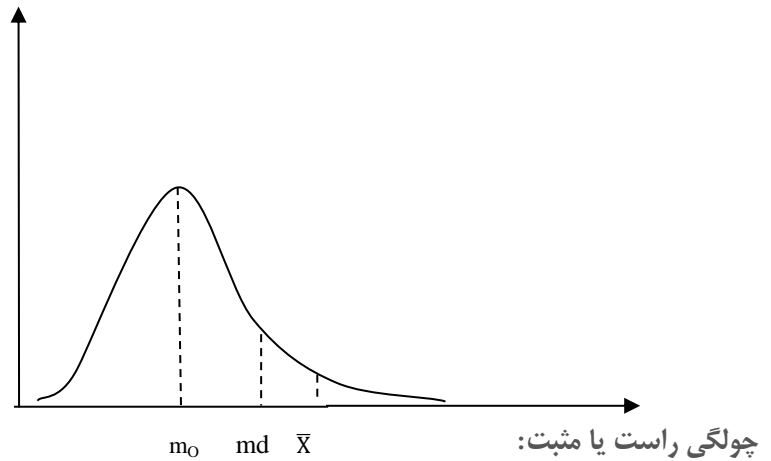
چولگی^۱ (کجی)

شاخص چولگی تحت تأثیر داده پرت است و جهت بررسی تقارن توزیع استفاده می‌شود.

X	f
۰	۲
۳	۴
۵	۷
۸	۹
۱۱	۱۵
۱۴	۸
۱۷	۷
۲۰	۱



X	f
۰	۴
۲	۱۷
۳	۱۲
۵	۸
۷	۵
۸	۵
۱۹	۱
۲۰	۱

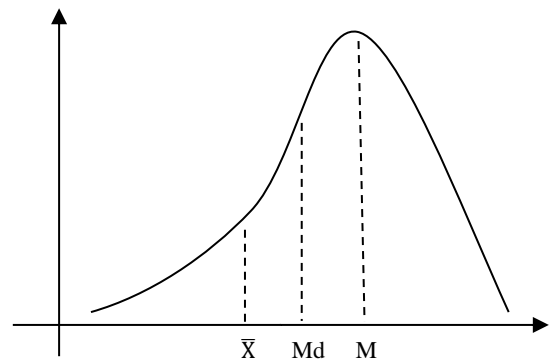


باینکه اکثریت نمره کم دارند، به خاطر چند تا نمره بزرگ میانگین بزرگ‌تر از نما و میانه شده است.

داده پرت بزرگ ← میانگین را بزرگ می‌کند ← چولگی راست

مثال برای چولگی راست: توزیع درآمد در تهران

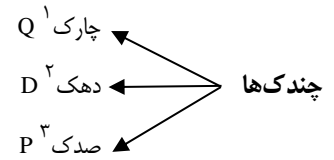
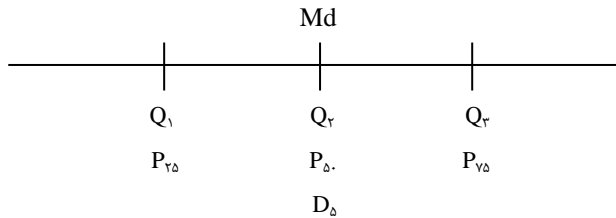
X	f
۰	۲
۲	۱
۱۳	۴
۱۴	۶
۱۵	۶
۱۶	۱۰
۱۷	۱۵
۱۸	۶
۲۰	۴



چولگی چپ یا منفی

داده پرت کوچک ← میانگین را کوچک می‌کند ← چولگی چپ

$$sk = \frac{\bar{x} - m}{s} \quad |sk| \leq 1 \text{ نرمال}$$



چندک‌ها شاخص‌های وضعی و هم‌خانواده میانه هستند، به طوری که همانند میانه دارای مقیاس ترتیبی بوده و محاسبات این شاخص‌ها نیز بسیار شبیه یافتن میانه است.

از جمله معروف‌ترین شاخص‌های وضعی می‌توان به چارک، دهک و صدک اشاره کرد که به ترتیب، توزیع را به چهار قسمت، ده قسمت و صد قسمت مساوی تقسیم می‌کنند.

مثال: چارک‌ها را در توزیع زیر پیدا کنید.

$$7, 9, 9, 9, 12, 18, 20, 25, 25, 25, 25, 25$$

$$Q_1 = 8/5 + \frac{2}{3} \quad Q_2 = 19 \quad Q_3 = 24/5 + \frac{2}{5}$$

فرمول محاسبه چندک‌ها:

همان فرمول محاسبه میانه است، با این تفاوت که به جای n تقسیم بر ۴، باید نسبت مورد نظر را جای‌گذاری کرد. برای مثال برای محاسبه چارک اول خواهیم داشت:

$$Q_1 = L + \left[\frac{\frac{n}{4} - CF}{F} \right] i$$

یا اگر قصد محاسبه چارک سوم را داشته باشیم، کافی است به جای $\frac{n}{4}$ مقدار $\frac{3n}{4}$ استفاده کنیم.

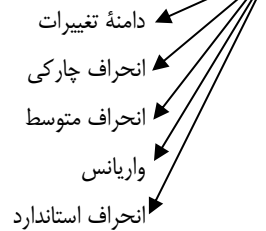
یا برای محاسبه دهک هفتم: $\frac{7n}{10}$

برای محاسبه نقطه ۸۴ درصدی: $\frac{84n}{100}$

فصل سوم

شاخص‌های پراکندگی

شاخص‌های پراکندگی^۱ (فاصله‌ای)



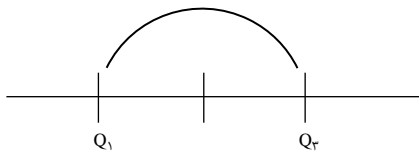
۱. دامنه تغییرات^۲ $R = \max - \min + ۱$

پراکنده‌تر: $R = ۱۸$: کلاس A و ۱۹ و و ۳ و ۲

همگن‌تر: $R = ۵$: کلاس B و ۱۸ و و ۱۴ و ۱۴

نه تنها دامنه تغییرات بلکه تمامی شاخص‌های پراکندگی به دنبال فاصله میان داده‌ها و دارای مقیاس فاصله‌ای هستند. دامنه تغییرات ضعیف‌ترین و بی‌ثبات‌ترین شاخص پراکندگی به شمار می‌رود، در محاسبه آن فقط از دو عدد ابتدایی و انتهایی استفاده شده و با تغییر یکی از این اعداد مقدار R نیز شدیداً تغییر می‌کند؛ لذا در میان شاخص‌های پراکندگی، دامنه تغییرات بیشترین حساسیت را به داده پرت دارد. پس زمانی در آمار از این مقیاس استفاده می‌شود که بدون داشتن داده پرت قصد محاسبه سریع و آسان یک شاخص پراکندگی را داشته باشیم.

۲. انحراف چارکی^۳



$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{۲} \quad (\text{چارک متوسط})$$

انحراف چارکی نشان می‌دهد داده‌ها به‌طور متوسط چقدر از میانه یا مرکز توزیع انحراف دارند. در واقع انحراف چارکی میزان پراکندگی را در ۵۰٪ وسط توزیع بررسی کرده لذا به داده‌های پرت کوچک یا بزرگ حساس نیست. پس می‌توان گفت زمانی که توزیع داده‌ها چولگی قابل‌ملاحظه‌ای داشته باشد، بهترین و مناسب‌ترین شاخص پراکندگی انحراف چارکی خواهد بود.

۳. انحراف متوسط^۴ $AD \text{ یا } MD = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n}$

انحراف متوسط عبارت است از متوسط قدر مطلق انحراف داده‌ها از میانگین. این شاخص نشان می‌دهد که داده‌ها به‌طور متوسط چقدر از میانگین انحراف دارند. انحراف متوسط یک ایراد اساسی دارد و آن اینکه به کمک قراردادی به نام قدر مطلق علائم جبری را از بین برده و در عملیات ریاضی و آماری نمی‌توان از آن استفاده کرد.

مثال: در یک توزیع ۳۰ تایی چنان چه مجموع انحرافات منفی از میانگین برابر ۶۰ شده باشد، مقدار انحراف متوسط چند است؟ از آنجایی که میانگین مرکز ثقل بوده و مقدار انحرافات منفی و مثبت از آن به یک اندازه است، خواهیم داشت:

$$AD = \frac{۶۰ + ۶۰}{۳۰} = \frac{۱۲۰}{۳۰} = ۴۰$$

1 - variability

2 - range

3 - Quartile deviation

4 - Mean deviation

$$S^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n} \quad \text{۴. واریانس}^1$$

واریانس عبارت است از متوسط مجذور انحراف داده‌ها از میانگین.

$$\sum(x - \bar{x})^2 = \text{مجموع مجذورات} \quad \text{SS} \longrightarrow S^2 \quad \text{دلیل نام‌گذاری واریانس:}$$

واریانس پرکاربردترین شاخص پراکنندگی است، اما یک ایراد اساسی دارد و آن اینکه به دلیل مجذور کردن انحراف‌ها، اختلاف واحد اندازه‌گیری ایجاد می‌کند. مثلاً $m^2 \longrightarrow m$

برای رفع این ایراد است که از واریانس، جذر یا رادیکال گرفته شده و شاخصی به نام انحراف استاندارد ساخته شده است.

تفاوت واریانس‌های نمونه و جامعه: در آمار استنباطی (قضیه حد مرکزی) به طور تجربی اثبات شده است که واریانس نمونه تصادفی از واریانس کل جامعه کوچک‌تر است (داشتن اریب یا سوگیری). به همین دلیل برای اینکه در محاسبه واریانس نمونه این اریب را از بین ببریم لازم است در مخرج فرمول از $n-1$ استفاده کنیم:

$$S^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n-1}$$

تست: واریانس برآورد (تعمیم) داده‌های مقابل چقدر است؟

واریانس نمونه
 $X = 2 \quad 3 \quad 6 \quad 8 \quad 16$

نمونه است و می‌خواهیم تعمیم دهیم.

$$\bar{X} = \frac{35}{5} = 7$$

$(x - \bar{x})$	$(x - \bar{x})^2$	$\sum(x - \bar{x})^2 = 124$
$2 - 7 = -5$	25	$\left. \begin{array}{l} -10 \\ +10 \end{array} \right\}$
$3 - 7 = -4$	16	
$6 - 7 = -1$	1	
$8 - 7 = 1$	1	
$16 - 7 = 9$	81	

$$S^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{124}{1-5} = 31 \quad \text{نمونه (برآورد، تعمیم)}$$

$$S^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n} = \frac{124}{5} = 24.8 \quad \text{جامعه (واریانس واقعی)}$$

واریانس

$$S^2 = \frac{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}{n-1} = \frac{369 - \frac{1225}{5}}{4} = \frac{124}{4} = 31$$

محاسبه واریانس به کمک اعداد خام

۵. انحراف استاندارد^۱ (معیار) $S = \sqrt{S^2}$

انحراف معیار برابر است با جذر یا رادیکال واریانس یعنی جذر یا ریشه دوم میانگین مجذور انحراف داده‌ها از میانگین. زمانی که توزیع داده‌ها نرمال باشد، یعنی داده پرت یا چولگی شدیدی نداشته باشیم، بهترین و مناسب‌ترین شاخص پراکندگی انحراف استاندارد خواهد بود.

سوال: در توزیعی با کجی $SK = -0.73$ چنانچه بهترین شاخص گرایش به مرکز، میانگین انتخاب شده باشد. بهترین شاخص پراکندگی کدام خواهد بود؟ پاسخ: S : زمانی که میانگین بهترین شاخص مرکزی است، توزیع نرمال بوده و بهترین شاخص پراکندگی انحراف معیار خواهد بود:

	مرکزی	پراکندگی
نرمال	\bar{X}	S
غیرنرمال	Md	Q

مقدار SK یا چولگی نیز در این سوال کمتر از یک بوده و نشان از نرمال بودن توزیع دارد.

نکته: بین انحراف معیار (S)، انحراف متوسط (MD) و انحراف چارکی همواره رابطه روبه‌رو برقرار است: $Q < MD < S$ (مقدار انحراف چارکی از سایر شاخص‌های پراکندگی کمتر بوده و مقدار انحراف معیار (S) نیز همواره کمی بیشتر از انحراف متوسط (MD) است) در واقع، در یک توزیع طبیعی، تقریباً ۵۰ درصد داده‌ها در فاصله‌ی $\pm 1Q$ ، ۵۸ درصد در فاصله‌ی $\pm 1MD$ و ۶۸ درصد داده‌ها در فاصله‌های $\pm 1S$ از میانگین قرار دارند.

$$S = \sqrt{S^2 - \frac{i^2}{12}} \quad \text{تصحیح شپرد}^2$$

در جدول طبقاتی، زمانی که میانگین را محاسبه می‌کنیم به دلیل استفاده از x_c مقدار خطا بسیار ناچیز شده و از نظر آماری اهمیتی ندارد اما در محاسبه انحراف استاندارد به دلیل مجذور شدن انحراف‌ها، این خطا افزایش می‌یابد و لازم است به کمک تصحیح شپرد مقدار آن تعدیل شود. ضمناً این تصحیح را زمانی استفاده می‌کنیم که تعداد طبقات کمتر از ۱۲ باشد: $k < 12$

سوال: در جدول طبقاتی با تعداد ۹ طبقه و طول طبقات ۶ چنانچه واریانس ۲۸ به دست آمده باشد مقدار انحراف استاندارد چقدر است؟

$$S = \sqrt{28 - \frac{36}{12}} = \sqrt{25} = 5$$

$$i = 6$$

$$S^2 = 28$$

$$9 < 12$$

اگر $K > 12$ بود دیگر نیازی به تصحیح نداشت: $S = \sqrt{28}$

ضریب تغییرات^۳ (ضریب پراکندگی) $V = \frac{S}{\bar{X}}$ یا c.v

برای مقایسه پراکندگی یک ویژگی در گروه‌های مختلف، می‌توان از S یا S^2 استفاده کرد؛ اما برای مقایسه پراکندگی دو یا چند ویژگی مختلف با واحدهای متفاوت می‌بایست از شاخصی به نام ضریب تغییرات که مستقل از واحد اندازه‌گیری است استفاده کرد.

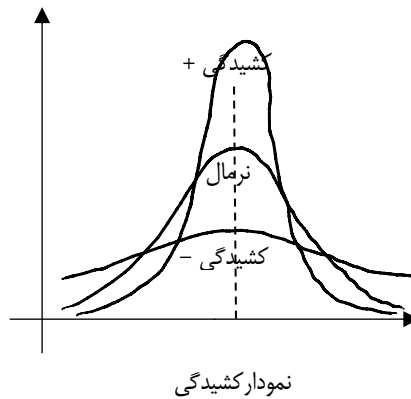
1 - Standard deviation
2 - Sheppard's correction
3 - Coefficient of variation

برای مثال:

دانش‌آموزان یک کلاس	وزن	$S = 20$ $\bar{X} = 50$	$V = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{20}{50} = 0.4$ یا 40% پراکنده‌تر
	قد	$S = 30$ $\bar{X} = 100$	$V = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{30}{100} = 0.3$ یا 30% همگن‌تر

کشیدگی^۱

تحت تأثیر انحراف معیار
↓
Kurtosis کشیدگی
↓
بررسی تراکم



تحت تأثیر داده پرت
↓
چولگی Skewness
↓
بررسی تقارن

کشیدگی، تحت تأثیر مقدار انحراف استاندارد بوده و جهت بررسی تراکم توزیع از آن استفاده می‌شود؛ به طوری که مقدار کشیدگی، با میزان تراکم توزیع رابطه مستقیم اما با میزان پراکندگی (S) رابطه عکس دارد. به طوری که در کشیدگی منفی یا پخ (هموار)، مقدار انحراف معیار زیاد بوده (تراکم کم) در حالی که در کشیدگی مثبت یا قله ای، مقدار انحراف معیار کم اما تراکم زیادی در توزیع داده ها وجود دارد. نکته: توزیع نرمال به توزیعی گفته می‌شود که نه چولگی شدید و نه کشیدگی شدید داشته باشد.

گشتاور^۲:

$$\sum(x - \bar{x}) = 0 : m_1$$

گشتاور مرتبه اول

$$\sum(x - \bar{x})^2 > 0 : m_2$$

گشتاور مرتبه دوم

و به همین ترتیب تا مرتبه n ام.

$$Ku = \frac{m_4}{S^4} - 3 : \text{کشیدگی}$$

$$Sk = \frac{m_3}{S^3} : \text{چولگی}$$

فرمول های چولگی و کشیدگی بر حسب گشتاور:

همان طور که ملاحظه می‌شود، چولگی (کجی)، تحت تأثیر گشتاور مرتبه سوم بوده و کشیدگی، از گشتاور مرتبه چهارم تأثیر می‌پذیرد.

1 - kurtosis
2 - moment

تأثیر اعمال ریاضی بر شاخص‌های مرکزی و پراکندگی:

به‌طور کلی شاخص‌های مرکزی به تمامی اعمال ریاضی حساس بوده در حالی که شاخص‌های پراکندگی فقط به ضرب و تقسیم حساس هستند. چنانچه تمامی داده‌های یک توزیع را در عدد ثابتی ضرب یا تقسیم کنیم، شاخص‌های پراکندگی نیز در همان عدد ضرب یا تقسیم خواهند شد به جز واریانس که در مجذور آن عدد ضرب یا تقسیم می‌شود.

تست: اگر به بزرگ‌ترین داده یک توزیع ۱۰ نمره اضافه شود، کدام یک از شاخص‌های زیر بدون تغییر باقی می‌ماند؟

- (۱) میانگین (۲) انحراف استاندارد (۳*) میانه (۴) انحراف متوسط

سؤال: تمامی داده‌های یک توزیع دو برابر شده، سپس به اضافه ۵ شده و میانگین و واریانس حاصل ۲۵ و ۳۶ به دست آمده است. میانگین و انحراف استاندارد اولیه چه قدر بوده است؟

$$2X+5$$

$$2\bar{X}+5=25 \quad 2\bar{X}=20 \quad \bar{X}=10$$

$$2^2 s^2 = 36 \rightarrow s^2 = 9 : S = 3$$

سؤال: اگر مقدار انحراف معیار x_n و ... و x_2 و x_1 برابر ۴ باشد، مقدار واریانس $5x_n + 10$ و ... و $5x_1 + 10$ چقدر است؟

$$\begin{array}{c}
 S = 4 \\
 \downarrow \times 5 \\
 S_x = 4 \times 5 = 20 \quad S = 20 : S^2 = 400
 \end{array}$$

مثال: فراوانی تمامی داده‌ها را در عدد ۳ ضرب کرده‌ایم، کدام تغییر درباره میانگین اتفاق می‌افتد؟

- (۱) افزایش (۲) کاهش (۳) تغییر نمی‌کند (۴) تغییر می‌کند

نکته مهم: در صورتی که فراوانی تمام داده‌ها به شکل یکسانی تغییر کند هیچ شاخص آماری تغییر نمی‌کند.

سؤال: اگر داده‌های یک توزیع، همگی با عدد ثابت مثبتی جمع شوند، مقدار ضریب تغییرات چه تغییری خواهد کرد؟

پاسخ: کاهش می‌یابد.

از آنجاکه تنها شاخص‌های مرکزی به جمع و تفریق حساس هستند، پس در صورت اضافه شدن یک عدد به تمامی داده‌ها، در فرمول ضریب تغییرات مقدار مخرج (میانگین) افزایش پیدا می‌کند، در حالی که انحراف معیار بدون تغییر باقی می‌ماند، به همین دلیل مقدار ضریب تغییرات کاهش پیدا خواهد کرد.

فصل چهارم

نمرات استاندارد و
منحنی طبیعی