بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضی عمومی ۲

سری کتاب‌های کمک آموزشی کارشناسی ارشد

مجموعه ریاضی

مؤلف: فرشاد احسانی

ریاضی عمومی ۲ / فرشاد احسانی
مشاوران صعود ماهان، ۹۵
۵۸۷ ص: جدول: نمودار (آمادگی آزمون کارشناسی ارشد)
ISBN: ۹۷۸ -۶۰۰ -۷۴۶۶ -۱۶ -۲
فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا
فارسی – چاپ اول
۱–ریاضی عمومی ۱
۲– آزمونها و تمرینها (عالی)
۳– آزمون دوره‌های تحصیلات تکمیلی
۴– دانشگاه‌ها و مدارس عالی – ایران– آزمونها
فرشاد احسانی
ج– عنوان
LB ۲۳۵۳ / الف ۲۴۶ V ۱۳۹۳۹
رده‌بندی دیویی: ۳۷۸/۱۶۶۴
شماره کتابشناسی ملی: ۳۵۰۰۲۲۸

نام کتاب: ریاضی عمومی ۲
مولف: فرشاد احسانی
ناشر: مشاوران صعود ماهان
نوبت و تاریخ چاپ: اول/ ۱۳۹۵
تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه
قیمت: ۴۱۰/۰۰۰ ریال
شابک: ISBN :۹۷۸-۶۰۰-۷۴۶۶-۱۶-۲

انتشارات مشاوران صعود ماهان: خیابان ولیعصر، بالاتر از تقاطع مطهری،
روبروی قنادی هتل بزرگ تهران، جنب بانک ملی، پلاک ۲۰۵۰
تلفن: ۴- ۸۸۱۰۰۱۱۳

سخن ناشر

آیا آنانکه می‌دانند با آنانکه نمی‌دانند برابرند؟ (قرآن کریم)

پس از حمد و سپاس و ستایش به درگاه بی همتای احدیت و درود بر محمد مصطفی، عالی نمونه بشریت که در تاریک دور تاریخ، بنا به فرمان نافذ صمدیت از میان مردمی برخاست که خود بودند در پست‌ترین حد توحش و ضلال و بربریت و آنگاه با قوانین شامل خویش هم ایشان را راهبری نمود و رهانید از بدویت و استعانت جوییم از قرآن کریم، کتابی که هست جاودانه و بی‌نقص تا ابدیت.

کتابی که در دست دارید آخرین ویرایش از مجموعه کتب خودآموز مؤسسه آموزش عالی آزاد ماهان است که برمبنای خلاصه درس و تأکید بر نکات مهم و کلیدی و تنوع پرسش‌های چهار گزینه‌ای جمع‌آوری شده است. در این ویرایش ضمن توجه کامل به آخرین تغییرات در سرفصل‌های تعیین شده جهت آزمون‌های ارشد تلاش گردیده است که مطالب از منابع مختلف معتبر و مورد تأکید طراحان ارشد با ذکر مثال‌های متعدد بصورت پرسش‌های چهار گزینه‌ای با کلید و در صورت لزوم تشریح کامل ارائه گردد تا دانشجویان گرامی را از مراجعه به سایر منابع مشابه بی نیاز نماید.

لازم به ذکر است شرکت در آزمون‌های آزمایشی ماهان که در جامعه آماری گسترده و در سطح کشور برگزار می‌گردد می‌تواند محک جدی برای عزیزان دانشجو باشد تا نقاط ضعف احتمالی خود را بیابند و با مرور مجدد مطالب این کتاب، آنها را برطرف سازند که تجربه سال‌های مختلف موکد این مسیر به عنوان مطمئن‌ترین راه برای موفقیت می‌باشد.

لازم به ذکر است از پورتال ماهان به آدرس www.mahanportal.ir می‌توانید خدمات پشتیبانی را دریافت دارید.

و نیز بر خود می‌بالیم که همه ساله میزان تطبیق مطالب این کتاب با سؤالات آزمون‌های ارشد- که از شاخصه‌های مهم ارزیابی کیفی این کتاب‌ها می‌باشد- ما را در محضر شما سربلند می‌نماید.

در خاتمه بر خود واجب می‌دانیم که از همه اساتید بزرگوار و دانشجویان ارجمند از سراسر کشور و حتی خارج از کشور و همه همکاران گرامی که با ارائه نقطه نظرات سازنده خود ما را در پربارتر کردن ویرایش جدید این کتاب یاری نمودند سپاسگزاری نموده و به پاس تلاش‌های بی چشمداشت، این کتاب را به محضرشان تقدیم نماییم.

مؤسسه آموزش عالی آزاد ماهان
معاونت آموزش

فهرست

فصل اول

ماتریس و جبر خطی

- تعریف ماتریس و انواع آن
- ضرب ماتریس‌ها
- ماتریس متقارن، پادمتقارن
- دترمینان، ماتریس معکوس
- مقادیر ویژه، بردارهای ویژه، اثر ماتریس
- رتبه ماتریس
- قطری شدن، معادله مشخصه
- دستگاه معادلات خطی، روش گاوس
- ماتریس مثبت و منفی و نامعین، تشابه ماتریس‌ها
- شکل استاندارد مقطع مخروطی

فصل اول

ماتریس و جبر خطی

بخش اول: تعریف ماتریس و انواع آن

ماتریس آرایشی از اعداد به صورت $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ است. هر یک از اعداد a_{11}، ....، a_{mn} را درایه یا عضو ماتریس می‌نامند. در حالت کلی ماتریس به صورت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ است. a_{ij} عضوی از ماتریس می‌باشد که در سطر iام و ستون jام قرار گرفته است. m و n نشان دهنده تعداد سطر و ستون‌های ماتریس A است.

ماتریس مربعی: ماتریسی که تعداد سطر و ستون‌های آن برابر است $(m=n)$. در ماتریس مربعی درایه‌های a_{11}، a_{22}، .... و a_{nn} اعضای قطر اصلی و درایه‌های a_{1n}، $a_{2(n-1)}$، .... و a_{m1} اعضای قطر فرعی هستند.

تساوی دو ماتریس: دو ماتریس A و B را مساوی گویند هرگاه هم‌مرتبه باشند و درایه‌های متناظر آنها مساوی باشند.

$$A=B \Leftrightarrow \forall i,j \quad , \quad a_{ij}=b_{ij}$$

ماتریس سطری: ماتریسی است که دارای یک سطر $(m=1)$ و n ستون است.

ماتریس ستونی: ماتریسی است که دارای m سطر و یک ستون $(n=1)$ است.

ماتریس قطری: ماتریس مربعی A را قطری می‌نامند هرگاه درایه‌های طرفین قطر اصلی صفر باشند.

$$\forall (i\neq j)\rightarrow a_{ij}=0$$

ماتریس اسکالر: ماتریس قطری است که تمام درایه‌های قطر اصلی آن مساوی هستند.

ماتریس همانی یا واحد: ماتریس قطری است که درایه‌های قطر اصلی آن برابر یک است و آن را با I نمایش می‌دهند.

$$A\times I=I\times A=A$$

ماتریس بالا مثلثی: ماتریس مربعی که درایه‌های واقع در زیر قطر اصلی همگی صفرند.

$$A=[a_{ij}]_{n\times n} \quad ; \quad \forall\, i>j\rightarrow a_{ij}=0$$

ماتریس پایین مثلثی: ماتریس مربعی که درایه‌های واقع در بالای قطر اصلی همگی صفرند.

$$A=[a_{ij}]_{n\times n} \quad ; \quad \forall\, i<j\rightarrow a_{ij}=0$$

ضرب ماتریس‌ها

هرگاه $A=[a_{ij}]_{m\times n_1}$ و $B=[b_{ij}]_{n_2\times p}$ ماتریس $A\times B$ زمانی وجود دارد که تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد، به عبارت دیگر $n_1=n_2$. اگر C ضرب ماتریس A و B باشد داریم $C=[c_{ij}]_{m\times p}$

مثال ۱: هرگاه $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&-1&2\end{bmatrix}$ **و** $B=\begin{bmatrix}2&-2\\4&3\\1&0\end{bmatrix}$ **باشد،** $A\times B$ **را به‌دست آورید.**

$$AB=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-2\\4&3\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times2+2\times4+0\times1 & 1(-2)+2\times3+0\times0\\3\times2+(-1)\times4+2\times1 & 3(-2)-1\times3+2\times0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&4\\4&-9\end{bmatrix}$$

نکته ۱: هرگاه A یک ماتریس باشد برای محاسبه ماتریس A^n بصورت زیر عمل می‌کنیم.

$$A^2=A\times A\quad,\quad A^3=A\times A^2\quad,\quad A^4=A\times A^3\quad,\quad\dots\quad,\quad A^n=A\times A^{n-1}$$

نکته ۲: اگر A یک ماتریس قطری باشد برای محاسبه ماتریس A^n کافی است درایه‌های قطر اصلی ماتریس A را به توان n برسانیم.

نکته ۳: برای محاسبه سطر i ام ماتریس $A\times B$ کافی است سطر i ام ماتریس A در کل ماتریس B ضرب شود.

نکته ۴: برای محاسبه ستون j ام ماتریس $A\times B$ کافی است کل ماتریس A در ستون j ام ماتریس B ضرب شود.

نکته ۵: اگر حاصلضرب دو ماتریس صفر شود نمی‌توان نتیجه گرفت که یکی از دو ماتریس برابر صفر است.

نکته ۶: دستور حذف در ماتریس‌ها برقرار نیست یعنی از $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $B=C$.

$$AB=AC\not\Rightarrow B=C\quad,\quad B=C\Rightarrow AB=AC$$

نکته ۷: ضرب ماتریس‌ها شرکت‌پذیر است یعنی $(AB).C=A.(BC)$

نکته ۸: ضرب ماتریس‌ها نسبت به عمل جمع از چپ و راست دارای خاصیت پخش است.

$$A.(B+C)=AB+AC\quad,\quad(A+B).C=A.C+B.C$$

نکته ۹: اگر در مورد دو ماتریس A و B داشته باشیم $AB=BA$ آنگاه ۲ اتحاد زیر برقرار است. (و تمام اتحادهای دیگر)

$$1)\ (A+B)^2=A^2+2AB+B^2\qquad\qquad 2)\ (A^2-B^2)=(A-B)(A+B)$$

نکته ۱۰: حاصلضرب دو ماتریس بالا مثلثی یک ماتریس بالا مثلثی است که درایه‌های قطر اصلی آن حاصلضرب درایه‌های متناظر روی دو قطر اصلی ماتریس‌های ضرب شونده است. این نکته برای ماتریس پایین مثلثی نیز برقرار است.

مثال ۲: اگر $A=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}$ **باشد ماتریس** A^{100} **را به دست آورید.**

$$A^2=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2\\-2&-1\end{bmatrix}\quad,\quad A^3=AA^2=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\-2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&3\\-3&-2\end{bmatrix}$$

$$A^4=AA^3=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3\\-3&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&4\\-4&-3\end{bmatrix}\to A^n=\begin{bmatrix}n+1&n\\-n&-n+1\end{bmatrix}\to A^{100}=\begin{bmatrix}101&100\\-100&-99\end{bmatrix}$$

مثال ۳: اگر $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ **باشد حاصل** A^n **را به دست آورید.**

$$A^2=AA=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=AA^2=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&6\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}\to A^n=\begin{bmatrix}1&n&\dfrac{n(n+1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{bmatrix}$$

مثال ۴: اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۳\\ ۰ & ۲ & ۴\\ ۱ & ۱ & -۲\end{bmatrix}$ **مجموع عضوهای سطر اول از ماتریس** $A^۲$ **کدام است؟**

حل: طبق نکته ۳ عضوهای سطر اول ماتریس $A^۲$ از ضرب سطر اول ماتریس A در کل ماتریس A بدست می‌آید.

$$I=[۲ \quad -۱ \quad ۳]\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۳\\ ۰ & ۲ & ۴\\ ۱ & ۱ & -۲\end{bmatrix}=[۷ \quad -۱ \quad -۴]\Rightarrow \text{مجموع}=۷-۱-۴=۲$$

مثال ۵: اگر $A^۲=۰$ **باشد حاصل** $A(I-A)^۲$ **کدام است؟**

حل: طبق نکته ۹ اگر A و B تعویض پذیر باشند یعنی $AB=BA$، آنگاه تمام اتحادهای جبری در مورد آنها صادق است. چون $AI=IA$ پس:

$$A(I-A)^۲=A(I+A^۲-۲A)=AI+AA^۲-۲A^۲=AI+۰-۰=A$$

نکته ۱۱: اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & a\\ a & ۰\end{bmatrix}$ باشد آنگاه:

اگر n زوج باشد $A^n=\begin{bmatrix}a^n & ۰\\ ۰ & a^n\end{bmatrix}$ و اگر n فرد باشد آنگاه $A^n=\begin{bmatrix}۰ & a^n\\ a^n & ۰\end{bmatrix}$ است.

نکته ۱۲: اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & a\\ b & ۰\end{bmatrix}$ باشد آنگاه:

اگر n زوج باشد $A^n=\begin{bmatrix}(ab)^{\frac{n}{۲}} & ۰\\ ۰ & (ab)^{\frac{n}{۲}}\end{bmatrix}$ و اگر n فرد باشد آنگاه $A^n=\begin{bmatrix}۰ & a^{\frac{n+۱}{۲}}b^{\frac{n-۱}{۲}}\\ a^{\frac{n-۱}{۲}}b^{\frac{n+۱}{۲}} & ۰\end{bmatrix}$ است.

نکته ۱۳: از ضرب ماتریس ۲×۲ مانند $T=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ در نقطه A به مختصات $A=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ نقطه A' که تبدیل یافته نقطه A تحت ماتریس T است حاصل می‌شود.

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$$

مثال ۶: تبدیل یافته دایره $x^۲+y^۲=۱$ **را تحت ماتریس** $T=\begin{bmatrix}۰ & ۳\\ -۲ & ۰\end{bmatrix}$ **به دست آورید.**

حل: یک نقطه روی دایره را $A=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ و تبدیل یافته آن را $A'=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$ می‌نامیم.

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۳\\ -۲ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\to\begin{cases}۰+۳y=x'\to y=\dfrac{x'}{۳}\\ -۲x+۰=y'\to x=-\dfrac{y'}{۲}\end{cases}\to x^۲+y^۲=۱\to\left(-\frac{y'}{۲}\right)^۲+\left(\frac{x'}{۳}\right)^۲=۱$$

معادله $\frac{(x')^۲}{۹}+\frac{(y')^۲}{۴}=۱$ به دست می‌آید که یک بیضی افقی به مرکز $(۰,۰)$ و $a=۳$ و $b=۲$ است.

نکته ۱۴: ماتریس دوران

ماتریسی را که در نقطه A ضرب شود و نقطه A را حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی به زاویه θ دوران دهد تا نقطه A' حاصل شود، با علامت R_θ نشان داده و داریم $R_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$. همچنین $R_{-\theta}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ مشخص است.

۱) $(R_\theta)^n=R_{n\theta}$ یا $\begin{bmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^n$

۲) $R_\theta R_\alpha=R_{\theta+\alpha}$

مثال ۷: حاصل $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^{12}$ **را به دست آورید.**

$$A=\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}^{12}=\begin{bmatrix} \cos 3\pi & -\sin 3\pi \\ \sin 3\pi & \cos 3\pi \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

مثال ۸: حاصل $\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}^{13}$ **را به دست آورید.**

$$\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}^{13}=\begin{bmatrix} 2\times\frac{1}{2} & -2\times\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} & 2\times\frac{1}{2} \end{bmatrix}^{13}=\begin{bmatrix} 2\cos 60 & -2\sin 60 \\ 2\sin 60 & 2\cos 60 \end{bmatrix}^{13}=2^{13}\begin{bmatrix} \cos 60 & -\sin 60 \\ \sin 60 & \cos 60 \end{bmatrix}$$

$$2^{13}(R_{60})^{13}=2^{13}((R_{60})^{6})^{2}R_{60}=2^{13}R_{60}\to A=2^{13}\begin{bmatrix} \cos 60 & -\sin 60 \\ \sin 60 & \cos 60 \end{bmatrix}=2^{13}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\to A=2^{12}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس ترانهاده

هرگاه در ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ جای سطرها و ستون‌ها را عوض کنیم ماتریس به‌وجود آمده را ترانهاده ماتریس A گویند و با A' یا A^T نمایش می‌دهند.

خواص:

۱) $(A')'=A$

۲) $(kA)'=kA' \quad k\in R$

۳) $(A\pm B)'=A'\pm B'$

۴) $(AB)'=B'A'$

مثال ۹: هرگاه A یک ماتریس 2×2 باشد، کدام ماتریس می‌تواند AA^T باشد؟

۱) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

حل: گزینه ۱ درست است.

نکات زیر را در مورد AA^T به‌خاطر داشته باشید.

۱) AA' همواره متقارن است.

۲) $|AA'|=|A|^2\geq 0$

۳) روی قطر اصلی AA' هیچ‌گاه عدد منفی قرار نمی‌گیرد.

مثال ۱۰: اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد ماتریس A^n را بدست آورید.

$$A^2=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A^3=AA^2=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\to A^n=\begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بخش دوم: ماتریس متقارن (هرمیتی)

ماتریس مربعی $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ را متقارن گویند هرگاه $\forall i,j \rightarrow a_{ij}=a_{ji}$ به عبارت دیگر $A=A'$. در ماتریس متقارن هر دو درایه که در طرفین قطر اصلی نسبت به آن به طور متقارن قرار گرفته‌اند مساوی هستند. به‌طور مثال ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۳ \\ -۲ & ۰ & -۴ \\ ۳ & -۴ & ۵ \end{bmatrix}$ متقارن است.

ماتریس پادمتقارن (ضد متقارن)

ماتریس مربعی $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ را پادمتقارن گویند، هرگاه $\forall i,j \rightarrow a_{ij}=-a_{ji}$ به‌عبارت دیگر $A=-A'$. در ماتریس پادمتقارن هر دو درایه که در طرفین قطر اصلی نسبت به آن به‌طور متقارن قرار گرفته‌اند قرینه هستند. همچنین درایه‌های قطر اصلی همگی صفر است.

نکته ۱۵: هر ماتریس مربعی را همواره می‌توان به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن نمایش داد.

$$A=\overbrace{\frac{۱}{۲}(A+A')}^{\text{متقارن}}+\overbrace{\frac{۱}{۲}(A-A')}^{\text{پاد متقارن}}$$

نکته ۱۶: هرگاه A ماتریس قطری باشد، آنگاه متقارن است.

نکته ۱۷: اگر A ماتریسی متقارن باشد، آنگاه A^n، $(n\in N)$ متقارن است.

نکته ۱۸: اگر A ماتریسی پادمتقارن باشد، آنگاه توان‌های زوج A ماتریس متقارن و توان‌های فرد A ماتریس پادمتقارن خواهد بود.

نکته ۱۹: ماتریس مربعی صفر، هم متقارن است هم پاد متقارن.

نکته ۲۰: حاصل جمع و تفاضل چند ماتریس متقارن، ماتریس متقارن بوده و حاصل جمع و تفاضل چند ماتریس پادمتقارن، ماتریس پادمتقارن است.

نکته ۲۱: اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم مرتبه باشند، آنگاه $(AA'-BB')$ و $(AB'+BA')$ ماتریس‌هایی متقارن هستند.

مثال ۱۱: اگر A ماتریسی $n\times n$ باشد آنگاه AA'، $A-A'$، $A'A$ و $A+A'$ از نظر متقارن بودن چگونه هستند؟

$(AA')'=(A')'A'=AA' \rightarrow$ متقارن

$(A-A')'=A'-(A')'=A'-A=-(A-A') \rightarrow$ پادمتقارن

$(A'A)'=A'(A')'=A'A \rightarrow$ متقارن

$(A+A')'=A'+(A')'=A'+A=A+A' \rightarrow$ متقارن

مثال ۱۲: اگر A و B دو ماتریس هرمیتی باشند، کدام یک از ترکیب‌های زیر هرمیتی هستند؟

۱) $A^۲B^۲$ ۲) $AB-BA$ ۳) AB ۴) $AB+BA$

حل: گزینه ۴ صحیح است.

A و B هرمیتی هستند بنابراین $A'=A$ و $B'=B$

$$(AB+BA)'=(AB)'+(BA)'=B'A'+A'B'=BA+AB=AB+BA$$

دترمینان

دترمینان هر ماتریس مربعی مانند A را با نماد $|A|$ یا $\det(A)$ نمایش می‌دهند.

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \det(A)=ad-bc$$

دترمینان کهاد یا مینور (Minor)

در هر ماتریس مربعی $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ برای هر عضو آن مانند a_{ij} یک دترمینان تعریف می‌کنیم که آن را دترمینان کهاد یا مینور عنصر سطر iام و ستون jام نامیده و با M_{ij} نمایش می‌دهیم و مقدار آن از دترمینانی که از حذف سطر i ام و ستون j ام به‌دست آمده، محاسبه می‌شود.

همسازه (kofactor)

در هر ماتریس مربعی مانند $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ همسازه هر عنصر مانند a_{ij} را با نماد Δ_{ij} نمایش می‌دهیم و $\Delta_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$. اگر برای تمام درایه‌های ماتریس A همسازه متناظرشان نوشته شود، ماتریس همسازه به‌وجود می‌آید. $N=[\Delta_{ij}]$

دترمینان ماتریس مربعی مرتبه n

دترمینان هر ماتریس مربعی مساوی با مجموع حاصلضرب عناصر یک سطر یا یک ستون دلخواه در همسازه متناظرشان است.

توجه: برای محاسبه یک دترمینان بهتر است آن را حول سطر یا ستونی بسط دهیم که تعداد عضوهای صفر آن بیشتر باشد.

نکته ۲۲: $|A|=|A'|$

نکته ۲۳: $|AB|=|A||B|$

نکته ۲۴: $|A^n|=|A|^n$

نکته ۲۵: از تعویض دو سطر یا دو ستون یک ماتریس مربع با هم، تنها علامت دترمینان تغییر می‌کند.

نکته ۲۶: هرگاه دو سطر یا دو ستون یک ماتریس مساوی باشند، دترمینان ماتریس صفر است. اگر در یک ماتریس، سطری مضرب سطر دیگر و یا ستونی مضرب ستون دیگر باشد حاصل دترمینان صفر است.

نکته ۲۷: وجود سطر تمام صفر و یا ستون تمام صفر باعث صفر شدن دترمینان ماتریس می‌شود.

نکته ۲۸: اعمال سطری ـ ستونی مقدماتی: هرگاه به سطر (یا ستون) یک ماتریس، مضاربی از سطرهای دیگر (یا ستون‌های دیگر) اضافه و یا کم شود حاصل دترمینان تغییر نمی‌کند.

نکته ۲۹: هرگاه تمام درایه‌های یک ماتریس $n\times n$ در عددی مانند k ضرب شود، دترمینان ماتریس در k^n ضرب می‌شود یعنی $|kA|=k^n|A|$

نکته ۳۰: دترمینان ماتریس‌های قطری، بالا مثلثی و پایین مثلثی برابر حاصلضرب عناصر قطر اصلی است.

نکته ۳۱: اگر A ماتریس $m\times n$ و B ماتریس $n\times m$ بوده و $m>n$، در این صورت $C=AB$ ماتریس $m\times m$ است و $|C|=|AB|=0$

نکته ۳۲: دترمینان ماتریس پادمتقارن از مرتبه فرد همواره صفر است.

نکته ۳۳: اگر A ماتریس $n\times n$ باشد به‌طوری که تمام عناصر روی قطر اصلی آن برابر x و بقیه درایه‌های آن برابر y باشند دترمینان ماتریس برابر $(x+y(n-1))(x-y)^{n-1}$ است.

نکته ۳۴: دستور ساروس برای محاسبه دترمینان‌های 3×3

برای این منظور دو ستون اول ماتریس را کنار آن نوشته و به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \to \det(A)=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{vmatrix}=(aei+bfg+cdh)-(bdi+afh+ceg)$$

نکته ۳۵: اگر A ماتریس شبه مثلثی باشد، یعنی تمام درایه‌های بالا یا پایین قطر فرعی آن صفر باشند، دترمینان A از حاصلضرب درایه‌های روی قطر فرعی آن به‌دست آمده که علامت عدد حاصل از رابطه $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ محاسبه می‌شود.

نکته ۳۶: معادله خط راستی که از دو نقطه $A(a,b)$ و $B(c,d)$ عبور می‌کند، برابر است با:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix}=0$$

نکته ۳۷: مساحت مثلث ABC که در آن $A(x_1,y_1)$، $B(x_2,y_2)$ و $C(x_3,y_3)$ رأس‌های مثلث باشند، برابر است با:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

نکته ۳۸: دترمینان واندرموند: اگر در یک ماتریس مربعی از مرتبه n، درایه‌های سطر یا ستون اول همگی از توان $(n-1)$ و درایه‌های سطر یا ستون دوم همگی از توان $(n-2)$ و ... و درایه‌های سطر یا ستون آخر همگی یک باشند آنگاه برای محاسبه دترمینان کافی است سطر یا ستونی را که درایه‌های آن از توان یک هستند را انتخاب کرده و هر درایه را منهای تمام درایه‌های بعدی کرده و حاصل‌ها را در هم ضرب کنیم.

$$\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c)$$

ماتریس متعامد: ماتریس A را متعامد گوییم هرگاه $A' = A^{-1}$ باشد. شرایط ماتریس متعامد به‌صورت زیر است:

۱) $|A| = +1$ یا $|A| = -1$

۲) اندازه مؤلفه‌های تمام سطرها و ستون‌ها برابر یک باشد. به‌طور مثال برای یک ماتریس 3×3 باید داشته باشیم:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \;;\; \sqrt{a^2+b^2+c^2} = 1 \;,\; \sqrt{d^2+e^2+f^2} = 1 \;,\; \sqrt{g^2+h^2+i^2} = 1$$

$$\sqrt{a^2+d^2+g^2} = 1 \;,\; \sqrt{b^2+e^2+h^2} = 1 \;,\; \sqrt{c^2+f^2+i^2} = 1$$

۳) ضرب داخلی دو به دوی سطرها (ستون‌ها) برابر صفر شود. بطور مثال باید $a.d+b.e+c.f=0$ و $a.g+b.h+c.i=0$ و ...

مثال ۱۳: هرگاه A یک ماتریس $n\times n$ و $|A|=k$ در این صورت $|||A|A|A|$ کدام است؟

۱) k^{n^2} ۲) k^{n^3} ۳) $k^{(n+1)^2}$ ۴) k^{n^2+n+1}

حل: گزینه ۴ صحیح است.

$$|||A|A|A| \overset{|A|=k}{=\!=\!=} ||kA|A| \overset{\text{نکته ۲۹}}{=\!=\!=} |k^n \times kA| = |k^{n+1}A| = (k^{n+1})^n |A| = k^{n^2+n} \times k = k^{n^2+n+1}$$

مثال ۱۴: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **و** $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ **در این صورت $|BA|$ چقدر است؟**

حل: طبق نکته ۳۱ چون $B_{4\times3}$ و $A_{3\times4}$ بنابراین $|BA|=0$

مثال ۱۵: اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 2 & 4 \\ \cos\alpha & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **باشد $\det(A)$ را به‌دست آورید.**

حل: طبق نکته ۳۵ داریم:

$$\det(A) = (-1)^{\frac{3\times2}{2}} \times \sin\alpha \times 2 \times \cos\alpha = -2\sin\alpha\cos\alpha = -\sin2\alpha$$

مثال ۱۶: اگر $A=\begin{bmatrix}5&2&2&2&2\\2&5&2&2&2\\2&2&5&2&2\\2&2&2&5&2\\2&2&2&2&5\end{bmatrix}$ **باشد** $\det(A)$ **را به‌دست آورید.**

حل: طبق نقطه ۳۳ داریم $n=5$، $x=5$ و $y=2$ بنابراین:

$$\det(A)=(5+4\times2)(5-2)^4=13\times3^4=1053$$

مثال ۱۷: حاصل دترمینان $\begin{vmatrix}1&a&2a^2-1\\1&b&2b^2-1\\1&c&2c^2-1\end{vmatrix}$ **را به‌دست آورید.**

حل: اگر C_1 و C_3 ستون اول و سوم باشند با $C_1+C_3\to C_3$ داریم:

$$\begin{vmatrix}1&a&2a^2\\1&b&2b^2\\1&c&2c^2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}a^2&a&1\\b^2&b&1\\c^2&c&1\end{vmatrix}$$

دترمینان به‌دست آمده واندرموند است پس:

$$\det(A)=-2(a-b)(a-c)(b-c)=2(a-b)(a-c)(c-b)$$

مثال ۱۸: اگر A یک ماتریس پایین مثلثی و 4×4 بوده و روی قطر اصلی آن اعداد طبیعی و متمایز باشد و داشته باشیم $|A|=24$ در این صورت $|A+I|$ چقدر است؟

حل: چون ماتریس پایین مثلثی است دترمینان آن برابر حاصلضرب اعداد روی قطر اصلی است. اعداد روی قطر اصلی عبارتند از ۴، ۳، ۲، ۱. در ماتریس $[A+I]$ درایه‌های روی قطر اصلی عبارتند از ۵، ۴، ۳، ۲ و چون $A+I$ پایین مثلثی است پس:

$|A+I|=2\times3\times4\times5=120$.

مثال ۱۹: معکوس ماتریس $A=\begin{bmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha&0\\\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ **را به‌دست آورید.**

حل: با بسط برحسب سطر سوم دترمینان برابر ۱ می‌شود. اندازه تمام سطرها و ستون‌ها برابر یک بوده و ضرب داخلی دوبه دوی سطرها (ستون‌ها) صفر است پس ماتریس متعامد و داریم $A^{-1}=A'$:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha&0\\-\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

مثال ۲۰: اگر $A=\begin{bmatrix}2\cos\theta&1&0\\1&2\cos\theta&1\\0&1&2\cos\theta\end{bmatrix}$ **باشد،** $\det A$ **را به‌دست آورید.**

حل: با بسط برحسب سطر اول داریم:

$$\det A=2\cos\theta\begin{vmatrix}2\cos\theta&1\\1&2\cos\theta\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1\\0&2\cos\theta\end{vmatrix}=2\cos\theta(4\cos^2\theta-1)-2\cos\theta$$

$$\det A=2\cos\theta(4\cos^2\theta-2)=4\cos\theta(2\cos^2\theta-1)=4\cos\theta\cos2\theta$$

$$\det A=\frac{4\sin\theta\cos\theta\cos2\theta}{\sin\theta}=\frac{2\sin2\theta\cos2\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin4\theta}{\sin\theta}$$

مثال ۲۱: اگر $A=\begin{bmatrix} 1+a^2 & -a & 0 \\ a & 1+a^2 & a \\ 0 & a & 1+a^2 \end{bmatrix}$ باشد، $\det A$ را به‌دست آورید.

$$R_1+R_3\to R_3 \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 1+a^2 & -a & 0 \\ a & 1+a^2 & a \\ 1+a^2 & 0 & 1+a^2 \end{bmatrix}\xrightarrow{C_1-C_3\to C_1}\begin{bmatrix} 1+a^2 & -a & 0 \\ 0 & 1+a^2 & a \\ 0 & 0 & 1+a^2 \end{bmatrix}$$

ماتریس بالا مثلثی است و $\det A=(1+a^2)^3$.

مثال ۲۲: اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، $\det A$ را بدست آورید.

حل: با بسط برحسب سطر اول داریم:

$$\det A=1\times\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}=1\times 4\times\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}-2\times 3\times\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=-12+18=6$$

مثال ۲۳: اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ حاصل $|AA^T|$ را به‌دست آورید.

$$AA^T=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 26 \end{bmatrix}\to\det A=5\times 26-1=129$$

مثال ۲۴: اگر A و B دو ماتریس 3×3 باشند و $|A|=2$ و $|B|=4$ حاصل $|A^3B^2A^{-1}|$ را به‌دست آورید.

حل: خواص ماتریس معکوس، شماره ۶ را ملاحظه کنید.

$$|A^3B^2A^{-1}|=|A^3||B^2||A^{-1}|=|A|^3\times|B|^2\times\frac{1}{|A|}=2^3\times 4^2\times\frac{1}{2}=64$$

مثال ۲۵: اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ فرض شود، $\det A$ را به‌دست آورید.

حل: ستون دوم را با ستون اول جمع کرده و حاصل را در ستون اول قرار می‌دهیم. با این عمل ماتریس بالا مثلثی می‌شود و

$$\det A=(5)(1)(5)(1)(3)=75$$

مثال ۲۶: اگر $A=\begin{bmatrix} 4x & 3x & 2x & x \\ 5x & \sin x & \cos x & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & \cos x & -\sin x & 0 \end{bmatrix}$ حاصل $\frac{d}{dx}(\det A)$ را به‌دست آورید.

حل: سطر اول x برابر سطر سوم می‌باشد بنابراین دترمینان صفر بوده و مشتق خواسته شده برابر صفر است.

مثال ۲۷: اگر $A=\begin{bmatrix} a & b+c & 1 \\ b & a+c & 1 \\ c & a+b & 1 \end{bmatrix}$ باشد، $\det A$ را به دست آورید.

$$C_2+C_1\to C_1 \to A=\begin{bmatrix} a+b+c & b+c & 1 \\ a+b+c & a+c & 1 \\ a+b+c & a+b & 1 \end{bmatrix}=(a+b+c)\begin{bmatrix} 1 & b+c & 1 \\ 1 & a+c & 1 \\ 1 & a+b & 1 \end{bmatrix}\to \det A=0$$

مثال ۲۸: اگر $x+y+z=0$ و $A=\begin{bmatrix} a+x & y & z \\ x & a+y & z \\ x & y & a+z \end{bmatrix}$ باشد، $\det A$ را به‌دست آورید.

$$C_1+C_2+C_3\to C_1 \to A=\begin{bmatrix} a+x+y+z & y & z \\ a+x+y+z & a+y & z \\ a+x+y+z & y & a+z \end{bmatrix}\xrightarrow{x+y+z=0} A=\begin{bmatrix} a & y & z \\ a & a+y & z \\ a & y & a+z \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3-R_1\to R_3]{R_2-R_1\to R_2} A=\begin{bmatrix} a & y & z \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}\Rightarrow \det A=a^3$$

بخش سوم: ماتریس معکوس

اگر برای ماتریس مربعی A ماتریس مربعی B وجود داشته باشد طوری که $AB=BA=I$ آنگاه A را وارون‌پذیر نامیده و B را وارون یا معکوس A گویند.

نکته ۳۹: شرط لازم و کافی برای آنکه ماتریس مربعی A معکوس‌پذیر باشد آن است که $|A|\neq 0$ باشد.

نکته ۴۰: اگر دترمینان ماتریس مخالف صفر باشد ماتریس را غیر منفرد یا ناتکین می‌گویند.

نکته ۴۱: $A^{-1}A=AA^{-1}=I$

خواص ماتریس معکوس

۱) $(A^{-1})^{-1}=A$

۲) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

۳) $(A')^{-1}=(A^{-1})'$

۴) $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$

۵) $(KA)^{-1}=\frac{1}{K}A^{-1} \quad , \quad k\in R$

۶) $\det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}$

اثبات مورد ۶

$$AA^{-1}=I\to |AA^{-1}|=|I|\to |A||A^{-1}|=1\to |A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$$

ماتریس الحاقی: اگر ماتریس همسازه را با N نمایش دهیم ترانهاده ماتریس همسازه ماتریس الحاقی است و به‌صورت $N'=adj(A)=A^*$ نمایش می‌دهند.

نکته ۴۲: ماتریس معکوس از رابطه $A^{-1}=\frac{N'}{|A|}$ به‌دست می‌آید.

نکته ۴۳: معکوس ماتریس 2×2 به‌صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\to A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

نکته ۴۴: اگر A یک ماتریس $n\times n$ باشد داریم $\det(adjA)=(\det A)^{n-1}$ و $(AB)^*=B^*A^*$

اثبات: اگر فرض کنیم $|A|=k$ داریم $|A^{-1}|=\frac{1}{k}$

$$A^{-1}=\frac{N'}{|A|}=\frac{adj(A)}{|A|}\to A^{-1}=\frac{N'}{k}\to kA^{-1}=N'\to |kA^{-1}|=|N'|$$

$$\to |N'|=k^n\,|A^{-1}|=k^n\times\frac{1}{k}=k^{n-1}\Rightarrow \det(adjA)=(\det A)^{n-1}$$

نکته ۴۵: اگر A یک ماتریس $n\times n$ باشد داریم:

$$\det(adj(adj(A)))=|A|^{(n-1)^2}$$

نکته ۴۶: اگر A ماتریسی وارون‌پذیر باشد آنگاه:

$$(A^*)^*=|A|^{n-2}A\quad ;\quad (kA)^*=k^{n-1}A^*\qquad k\in R$$

نکته ۴۷: اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه n و B ماتریس وارون‌پذیر و هم مرتبه با ماتریس A باشد آنگاه:

$$(B^{-1}AB)^n=B^{-1}A^nB$$

نکته ۴۸: اگر I ماتریس همانی (واحد) و A ماتریس $n\times n$ باشد داریم $A.adj=|A|I$

نکته ۴۹: اگر A، B و $A+B$ ماتریس‌هایی وارون‌پذیر باشد آنگاه ماتریس $A^{-1}+B^{-1}$ نیز وارون پذیر است.

مثال ۲۹: اگر $A=\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$ **، مجموع عناصر ماتریس $A.adj(A)$ را به‌دست آورید.**

حل: طبق نکته ۴۸ داریم:

$$A.adj(A)=I|A|\quad ,\quad |A|=9\to A.adj(A)=9\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{bmatrix}$$

پس مجموع عناصر ماتریس ۲۷ است.

مثال ۳۰: اگر $A=\begin{bmatrix}2&1&2\\3&1&0\\1&2&-1\end{bmatrix}$ **باشد حاصل $\det(adj(adj(A)))$ چقدر است؟**

حل: طبق نکته ۴۵ داریم:

$$|A|=(-2+12)-(-3+2)=11\to \text{دترمینان}=(11)^{(n-1)^2}=11^4$$

مثال ۳۱: از رابطه $3A^{300}-4A^{400}-5I=0$ وارون A را به‌دست آورید.

$$3A^{300}-4A^{400}=5I\ \Rightarrow\ \frac{3}{5}A^{300}-\frac{4}{5}A^{400}=I\ \Rightarrow\ A(\frac{3}{5}A^{299}-\frac{4}{5}A^{399})=I\quad ,$$

$$AA^{-1}=I\ \Rightarrow\ A^{-1}=\frac{3}{5}A^{299}-\frac{4}{5}A^{399}$$

مثال ۳۲: اگر A یک ماتریس 3×3 و وارون‌پذیر باشد که در رابطه $2A^2-A^{-1}=0$ صدق می‌کند حاصل $\det A$ را به‌دست آورید.

$$2A^2-A^{-1}=0\xrightarrow{\times A}2A^3-AA^{-1}=0\to 2A^3=I\to A^3=\frac{1}{2}I\to |A|^3=(\frac{1}{2})^3|I|=\frac{1}{8}\times 1=\frac{1}{8}\to |A|=\frac{1}{2}$$

سوالات چهارگزینه‌ای بخش اول تا سوم

۱- اگر $F(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$ آنگاه $F'(x)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۸۷)

۱) $6x$ ۲) $12x$ ۳) $3x^2$ ۴) $6x^2$

۲- اگر حاصل دترمینان $\begin{bmatrix} -1 & 2m+n & m-n & 2 \\ 0 & 2 & -n & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & m \end{bmatrix}$ برابر صفر باشد، $m+n$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۸۴)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳- حاصل دترمینان زیر کدام است؟ (سیستم آزاد ۸۴)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$$

۱) $(1+a)(1+b)(1+c)$ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) abc

۴- دترمینان $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ برابر است با: (ژئوفیزیک آزاد ۸۵)

۱) ۱۹۵ ۲) ۳۵ ۳) ۷۵ ۴) ‎-۴۵

۵- مقدار دترمینان $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک آزاد ۸۳)

۱) ‎-۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۱

۶- دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ برابر است با: (ژئوفیزیک آزاد ۸۶)

۱) ۵۰۰ ۲) ۷۰۰ ۳) ۹۰۰ ۴) ۳۰۰

۷- به ازای کدام مقدار **k** ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & -1 \\ k & -1 & 1 \end{bmatrix}$ می‌تواند متعامد باشد؟ (سیستم ۸۳)

۱) ‎-۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) هیچ مقدار

۸- به ازای کدام مقدار **m** ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 2 & m+1 \\ 1 & 3 & 2m \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نیست؟ (ژئوفیزیک ۸۳)

۱) ‎-۲ ۲) ‎-۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۹- اگر $A=\begin{bmatrix}2&-1&2\\0&2&-1\\0&0&2\end{bmatrix}$ عنصر سطر اول و ستون دوم ماتریس A^{-1} کدام است؟ **(سیستم ۸۰)**

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) صفر ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۰- وارون (معکوس) ماتریس $A=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}2&1&1\\1&4&6\\1&4&8\end{bmatrix}$ کدام است؟ **(برق آزاد ۸۴)**

۱) $\begin{bmatrix}8&-4&2\\2&15&-11\\0&-7&7\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}8&4&2\\-2&15&-11\\0&7&7\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}8&-4&2\\-2&15&-11\\0&-7&7\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}8&-4&2\\-2&15&11\\0&-7&7\end{bmatrix}$

۱۱- اگر $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}$ ماتریس **X** از رابطه $XA=\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}$ کدام است؟ **(هواشناسی ۸۷)**

۱) $\begin{bmatrix}-3&1\\5&-2\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-2&5\\1&-3\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-3&5\\1&-2\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-2&1\\5&-3\end{bmatrix}$

۱۲- اگر بخواهیم ماتریس $A=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\alpha&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ متعامد باشد، مقدار α کدام است؟ **(ژئوفیزیک آزاد ۸۷)**

۱) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۲) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۴) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

۱۳- اگر $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$ و $B^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1\\-2&3\end{bmatrix}$ در این صورت $-3AB$ کدام است؟ **(سیستم آزاد ۸۴)**

۱) $\begin{bmatrix}9&-3\\-12&3\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}9&3\\-12&3\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}3&-1\\2&-1\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}$

۱۴- به ازای کدام مقدار **c** ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&0&-c\\-1&3&1\\0&2c&-4\end{bmatrix}$ معکوس‌پذیر است؟ **(نفت ۸۸)**

۱) $c\neq -2,3$ ۲) $c\neq -2,5$ ۳) $c\neq 1,3$ ۴) $c\neq -2,4,1$

۱۵- اگر ماتریس مربعی **A** در رابطه $A-A^2-I=0$ صدق کند، حاصل $A^{15}+A^{16}$ کدام است؟ **(مدیریت در سوانح طبیعی ۸۳)**

۱) $-I+A$ ۲) $-I-A$ ۳) $I-A$ ۴) $I+A$

پاسخنامه سوالات چهارگزینه‌ای بخش اول تا سوم

۱- گزینه ۴ صحیح است.

از دستور ساروس داریم:

$$F(x)=\begin{vmatrix}x&x^2&x^3\\1&2x&3x^2\\0&2&6x\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x&x^2\\1&2x\\0&2\end{vmatrix}=(12x^3+0+2x^3)-(6x^3+6x^3+0)=2x^3\quad\Rightarrow\quad F'(x)=6x^2$$