بسم الله الرحمن الرحیم

مؤسسه آموزش عالی آزاد ماهان با افتخار تقدیم می‌کند

ریاضی عمومی (۱)

از سری کتاب‌های کمک آموزشی کارشناسی ارشد

دکتر حسن رضاپور

موسسه آموزش عالی آزاد
ماهان
www.mahan.ac.ir

سرشناسه	:	رضاپور، حسن
عنوان	:	ریاضی عمومی (۱)
مشخصات نشر	:	تهران، مشاوران صعود ماهان،۱۴۰۱
مشخصات ظاهری	:	۴۸۰ صفحه رحلی
فروست	:	سری کتاب‌های کمک آموزشی کارشناسی ارشد
شابک	:	۹۷۸-۶۰۰-۷۴۶۶-۱۷-۹
وضیعت فهرست‌نویسی	:	فیپای مختصر
یادداشت	:	این مدرک در آدرس http://opac.nali.ir قابل دسترسی است
شماره کتاب‌شناسی ملی	:	۳۹۸۷۵۶۱

ریاضی عمومی (۱)

ناشـــر	:	مشاوران صعود ماهان
مدیر مسئول	:	هادی سیاری - مجید سیاری
مدیر تولید و برنامه‌ریزی	:	سمیه بیگی
به قلم	:	دکتر حسن رضاپور
ویراستار ادبی	:	ماریه فیروزی
نوبت و تاریخ چاپ	:	دوم /۱۴۰۱
شمارگان	:	۱۰۰۰ نسخه
قیمت	:	۴/۴۹۰/۰۰۰ ریال
شابک	:	۹۷۸-۶۰۰-۷۴۶۶-۱۷-۹

نشانی: تهران، خیابان
ولی‌عصر- بالاتر از
تقاطع مطهری- جنب
بانک ملی پلاک ۲۰۵۰
شماره تماس:
۸۸۱۰۰۱۱۳-۴

«ن والقلم و ما یسطرون»

کلمه نزد خدا بود و خدا آن را با قلم بر ما نازل کرد.

به پاس تشکر از چنین موهبت الهی، موسسه ماهان درصدد برآمده است تا در راستای انتقال دانش و مفاهیم با کمک اساتید مجرب و مجموعه کتب آموزشی خود برای شما داوطلبان ادامه تحصیل در مقطع کارشناسی ارشد، گام موثری بردارد. امید است تلاش‌های خدمتگزاران شما در این موسسه پایه‌گذار گام‌های بلند فردای شما باشد.

مجموعه کتاب‌های کمک آموزشی ماهان به‌منظور استفاده داوطلبان کنکور کارشناسی ارشد سراسری و آزاد تالیف شده‌اند. در این کتاب‌ها سعی کرده‌ایم با بهره‌گیری از تجربه اساتید بزرگ و کتب معتبر داوطلبان را از مطالعه کتاب‌های متعدد در هر درس بی‌نیاز کنیم.

دیگر تالیفات ماهان برای سایر دانشجویان به‌صورت ذیل می‌باشد:

مجموعه کتاب‌های **۸** آزمون: شامل **۵** مرحله کنکور کارشناسی ارشد **۵** سال اخیر به همراه **۳** مرحله آزمون تالیفی ماهان همراه با پاسخ تشریحی می‌باشد که برای آشنایی با نمونه سوالات کنکور طراحی شده است. این مجموعه کتاب‌ها با توجه به تحلیل **۳** ساله اخیر کنکور و بودجه‌بندی مباحث در هریک از دروس، اطلاعات مناسبی جهت برنامه‌ریزی درسی در اختیار دانشجو قرار می‌دهد.

مجموعه کتاب‌های کوچک: شامل کلیه نکات کاربردی در گرایش‌های مختلف کنکور کارشناسی ارشد می‌باشد که برای دانشجویان جهت جمع‌بندی مباحث در **۲** ماهه آخر قبل از کنکور مفید می‌باشد.

بدین‌وسیله از مجموعه اساتید، مولفان و همکاران محترم خانواده بزرگ ماهان که در تولید و به‌روزرسانی تالیفات ماهان نقش موثری داشته‌اند، صمیمانه تقدیر و تشکر می‌نماییم.

دانشجویان عزیز و اساتید محترم می‌توانند هرگونه انتقاد و پیشنهاد درخصوص تالیفات ماهان را از طریق سایت ماهان به آدرس mahan.ac.ir با ما در میان بگذارند.

موسسه آموزش عالی آزاد ماهان

مجموعــه پیــش رو، ســرفصل‌های درس ریاضــی عمومــی (۱) را بـا تکیـه بـر حـل سـؤالات تألیفـی و کنکورهـای کارشناسـی ارشـد و دکتـری بطـور کامـل پوشـش می‌دهـد. در انتهـای هـر فصـل، بـا جمـع‌آوری سـؤالات کنکورهـای کارشناسـی ارشـد و دکتـری رشــته‌های MBA، مهندســی عمــران، صنایــع، مــواد، نفــت و ... و رشــته‌های علــوم پایــه نظیــر، ریاضــی و آمــار، دانشــجویان را بــرای تسـلط بـر مفاهیـم ارائـه شـده آمـاده می‌سـازد. هنـگام مطالعـه کتـاب، حتمـاً خلاصه‌نویسـی کـرده و بـا مـرور آن بـه فرمول‌هـا و نـکات بطـور کامـل تسـلط پیـدا کنیـد.

بر خود لازم می‌دانم از جناب آقای دکتر سیاری، ریاست محترم مؤسسه ماهان، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم. از پرفسور صالحی فتح‌آبادی استاد راهنمای مقطع کارشناسی ارشد و از آقای دکتر شیردل استاد راهنمای مقطع دکترایم، به خاطر زحمات بی‌مثالشان ممنون هستم. از پدر فداکار و مادر دلسوزم، دو پشتیبان همیشگی من، از همسر عزیز و مهربانم، یار تمام لحظات من، از پدر و مادر عزیز همسرم و سایر اعضای مهربان خانواده‌ام، به خاطر تمام تشویق‌ها، حمایت‌ها و مهربانی‌شان، ممنون، قدردان و سپاسگزارم.
از شما دانشجویان عزیز می‌خواهم تا نظرات و پیشنهادات خود را جهت بهبود این اثر به Hassan.Rezapour@gmail.com ارسال فرمائید.

تقدیم به پدر و مادر مهربانم و تقدیم به همسر عزیزم و البرز پسر نازنینم

امید است مسیری سبز، گشوده باشیم به راهی روشن

با احترام، **حسن رضاپور**

۱۳۹۹

فهرست مطالب

ریاضی عمومی ۱

فصل اول

تابع

تعریف تابع

تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب که در آن دو زوج مرتب متفاوت با مؤلفه‌های اول برابر وجود نداشته باشد، به‌طور مثال $f=\{(۱,۲),(-۲,۵),(۰,۳)\}$ بیانگر تابع است اما $g=\{(-۱,۵),(۴,۳),(-۱,۱)\}$ بیانگر تابع نمی‌باشد.

از نظر هندسی هرگاه خطی موازی محور yها رسم شود منحنی تابع را باید حداکثر در یک نقطه قطع کند. در واقع برای هر x حداکثر یک مقدار برای y به‌دست آید.

تعریف: اگر تابع را به‌صورت قاعده $\begin{cases} f:A\to B \\ y=f(x)\end{cases}$ نمایش دهیم آنگاه این رابطه یک تابع است هرگاه داشته باشیم:

$x_۱=x_۲\to y_۱=y_۲$

مثال ۱: اگر $f(x+\frac{۱}{x})=x^۲+\frac{۱}{x^۲}$ آنگاه $f(x)$ را به‌دست آورید.

حل: $x^۲+\frac{۱}{x^۲}=(x+\frac{۱}{x})^۲-۲;x+\frac{۱}{x}=t\Rightarrow f(t)=t^۲-۲\xrightarrow{\text{تغییر متغیر}}f(x)=x^۲-۲$

مثال ۲: اگر $۲f(x)-f(\frac{۱}{x})=x^۲$ آنگاه $f(x)$ را به‌دست آورید.

حل:

$$۲f(x)-f(\frac{۱}{x})=x^۲\xrightarrow{x\to\frac{۱}{x}}۲f(\frac{۱}{x})-f(x)=\frac{۱}{x^۲}\xrightarrow{\text{از ۲ رابطه}}۳f(x)=۲x^۲+\frac{۱}{x^۲}\Rightarrow f(x)=\frac{۲}{۳}x^۲+\frac{۱}{۳x^۲}$$

مثال ۳: اگر $f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^۲+y^۲}}{x}$ و $x<۰$ آنگاه $f(x)$ کدام است؟

حل:

$$f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^۲(۱+\frac{y^۲}{x^۲})}}{x}=\frac{|x|\sqrt{۱+\left(\frac{y}{x}\right)^۲}}{x}\xrightarrow{x<۰}f\left(\frac{y}{x}\right)=-\sqrt{۱+\left(\frac{y}{x}\right)^۲}\xrightarrow{\text{تغییر متغیر}}f(x)=-\sqrt{۱+x^۲}$$

* **مثال ۴:** اگر $f\left(\frac{x+1}{y+2}\right)=\frac{x+1}{x+y+3}$ باشد، $f\left(\frac{1}{x}\right)$ را به‌دست آورید.

حل:

$$f\left(\frac{x+1}{y+2}\right)=\frac{x+1}{(x+1)+(y+2)}\Rightarrow f\left(\frac{x+1}{y+2}\right)=\frac{\frac{x+1}{y+2}}{\frac{x+1}{y+2}+1}\Rightarrow f(t)=\frac{t}{t+1}\Rightarrow f(x)=\frac{x}{x+1}\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x+1}$$

نکته

اگر $a>0$ آنگاه $a+\frac{1}{a}\geq 2$

اگر $a<0$ آنگاه $a+\frac{1}{a}\leq -2$

* **مثال ۵:** فرض کنید که $f(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$، $a>0$، در این‌صورت $f(x+y)+f(x-y)$ را برحسب $f(x)$ و $f(y)$ به‌دست آورید.

حل:

$$f(x+y)+f(x-y)=\frac{a^{x+y}+a^{-(x+y)}}{2}+\frac{a^{x-y}+a^{-(x-y)}}{2}=\frac{a^xa^y}{2}+\frac{a^{-x}a^{-y}}{2}+\frac{a^xa^{-y}}{2}+\frac{a^{-x}a^y}{2}$$

$$=\frac{a^x(a^y+a^{-y})}{2}+\frac{a^{-x}(a^{-y}+a^y)}{2}=\frac{(a^y+a^{-y})(a^x+a^{-x})}{2}=2f(x)f(y)$$

* **مثال ۶:** اگر $f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=\frac{x}{x+3}$ باشد، $f(x)$ را به‌دست آورید.

حل:

$$\frac{x-2}{x+1}=t\Rightarrow xt+t=x-2\Rightarrow t+2=x-tx\Rightarrow t+2=x(1-t)\Rightarrow x=\frac{t+2}{1-t}$$

$$f(t)=\frac{\frac{t+2}{1-t}}{\frac{t+2}{1-t}+3}=\frac{t+2}{-2t+5}\xrightarrow{\text{تغییر نام}}f(x)=\frac{x+2}{-2x+5}$$

* **مثال ۷:** اگر $f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=\frac{x-1}{2x}$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{2x-1}{2x}$ ۲) $\frac{4x}{2x+1}$ ۳) $\frac{2x+4}{2x+1}$ ۴) $\frac{2x+1}{2x+4}$

حل: گزینه ۴ صحیح است.

روش اول: قرار دهید $\frac{x-2}{x+1}=t$ پس داریم:

$$x-2=tx+t\rightarrow x(1-t)=t+2\Rightarrow x=\frac{t+2}{1-t}$$

حال مقادیر t و x را در ضابطه داده شده قرار می‌دهیم، پس:

$$f(t)=\frac{\frac{t+2}{1-t}-1}{2\left(\frac{t+2}{1-t}\right)}=\frac{\frac{t+2-1+t}{1-t}}{\frac{2t+4}{1-t}}=\frac{2t+1}{2t+4}\Rightarrow f(t)=\frac{2t+1}{2t+4}\Rightarrow f(x)=\frac{2x+1}{2x+4}$$

روش دوم (تستی):

چون $f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=\frac{x-1}{2x}$ با قرار دادن $x=2$ در این رابطه داریم: $f(0)=\frac{1}{4}$. پس گزینه‌هایی که در آن‌ها $f(0)$ برابر $\frac{1}{4}$ نیست، غلط هستند.

گزینه اول تعریف نشده $=\frac{-1}{0}=f(0)$ پس غلط است.

گزینه دوم $f(0)=0$ و گزینه سوم $f(0)=4$ غلط می‌باشند. پس گزینه ۴ صحیح است که در آن $f(0)=\frac{1}{4}$.

※ **مثال ۸:** اگر $f\left(\frac{1}{3x-2}\right)=\frac{x-1}{x+1}$ آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{x}{x-1}$ ۲) $\frac{1-x}{1+5x}$ ۳) $\frac{x-3}{x}$ ۴) $\frac{x-1}{5x-1}$

حل: گزینه ۲ صحیح است.

روش اول: قرار دهید $t=\frac{1}{3x-2}$ پس $3tx-2t=1$ یعنی $x=\frac{1+2t}{3t}$ لذا داریم:

$$f(t)=\frac{\frac{1+2t}{3t}-1}{\frac{1+2t}{3t}+1}=\frac{\frac{1+2t-3t}{3t}}{\frac{1+2t+3t}{3t}}=\frac{1-t}{1+5t}\Rightarrow f(t)=\frac{1-t}{1+5t}\Rightarrow f(x)=\frac{1-x}{1+5x}$$

روش دوم(تستی):

در ضابطه صورت سؤال قرار دهید $x=0$ پس داریم: $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$، حال در گزینه‌ها این تساوی را چک می‌کنیم:

گزینه اول:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}-1}=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\Rightarrow \text{غلط است}$$

گزینه دوم:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{5}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}}=-1\Rightarrow \text{فعلا گزینه ۲ را نگه می‌داریم}$$

گزینه سوم:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-\frac{1}{2}-3}{-\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{7}{2}}{-\frac{1}{2}}=7\Rightarrow \text{غلط است}$$

گزینه چهارم:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{5}{2}-1}=\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{7}{2}}=\frac{3}{7}\Rightarrow \text{غلط است}$$

۲ صحیح است $\Leftarrow$ ۱و۳ و۴ غلط است

قدر مطلق

قدر مطلق x را به‌صورت $|x|$ نمایش داده و برابر است با:

$$|x|=\begin{cases} x & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -x & x<0 \end{cases} \rightarrow |x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

نکته

خواص قدر مطلق به‌صورت زیر است:

۱) $\sqrt[2k]{x^{2k}}=|x|$

۲) $|f(x)|=|-f(x)|$

۳) $|f(x)|=a;a>0\Rightarrow f(x)=\pm a$

۴) $|f(x)|>a\Rightarrow f(x)>a$ یا $f(x)<-a$

۵) $|f(x)|<a\Rightarrow -a<f(x)<a$

۶) $|f(x)|=|g(x)|\Rightarrow f^2(x)=g^2(x)\Rightarrow f(x)=\pm g(x)$

۷) $|f(x)|<|g(x)|\Rightarrow f^2(x)<g^2(x)$

۸) $|f(x)|+|g(x)|\geq|f(x)+g(x)|$

۹) $|f(x)|-|g(x)|\leq|f(x)-g(x)|$

۱۰) $|f(x)g(x)|=|f(x)||g(x)|$

نکته

برای رسم نمودار توابعی به شکل $y=|f(x)|$ ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس قرینه قسمتی از نمودار که زیر محور xها است را نسبت به محور xها به دست می‌آوریم.

نکته

برای رسم نمودار منحنی $|y|=f(x)$ ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم. سپس قسمت‌های زیر محور xها را حذف می‌کنیم (زیرا $(|y|=f(x)\geq 0)$، بعد قرینه قسمت‌های باقی‌مانده را نسبت به محور xها به آن اضافه می‌کنیم.

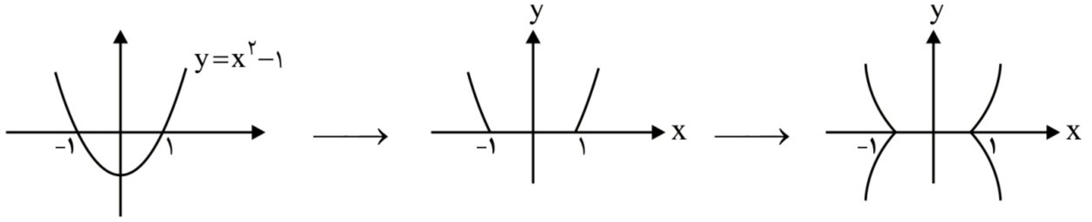
نکته

منحنی‌هایی به شکل $|y|=|f(x)|$ در واقع دو منحنی به صورت $y=\pm|f(x)|$ می‌باشند. برای رسم نمودار این منحنی‌ها کافی است، نمودار $|y|=f(x)$ را رسم کنیم و سپس قرینه نمودار نسبت به محور xها را به آن اضافه کنیم.

نکته

برای رسم نمودار توابعی به شکل $y=f(|x|)$ ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم. سپس قسمت‌های سمت چپ محور yها را حذف کرده، بعد قرینه قسمت‌های باقی‌مانده را نسبت به محور yها به آن اضافه می‌کنیم. (زیرا تابع زوج است و نسبت به محور yها متقاون می‌باشد.)

* **مثال ۹:** نمودار $|y|=x^{2}-1$ را رسم کنید.



حذف قسمت‌های زیر محورxها

اضافه کردن قرینه قسمت‌های
باقیمانده نسبت به محورxها

نکته

برای رسم نمودار $y=f(x)+a$ که $a>0$، نمودار $f(x)$ را a واحد بالا و اگر $a<0$، $f(x)$ را a واحد پایین بیاورید.

نکته

برای رسم نمودار $y=f(x+a)$ که $a>0$، نمودار $f(x)$ را a واحد سمت چپ و اگر $a<0$، $f(x)$ را a واحد راست بیاورید.

تابع لگاریتم - تابع نمایی - تابع Ln

تعریف لگاریتم

برای عدد نمایی $b^{y}=x$ با شرط $b>0$ و $b\neq 1$، می‌توان تعریف معادل زیر را به‌عنوان مفهوم لگاریتم در نظر گرفت:

$$b^{y}=x \leftrightarrow y=\log_{b}^{x} \qquad (x>0)$$

در این تعریف عدد b به‌عنوان پایه یا مبنای لگاریتم تعریف می‌شود.

روابط اولیه:

۱) $\log_{a}^{a}=1$

۲) $\log_{a}^{1}=0$

۳) $\log a.b=\log a+\log b$

۴) $\log \frac{a}{b}=\log a-\log b$

۵) $\log a^{n}=n\log a$

نتیجه‌گیری مهم:

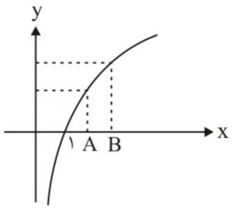
۱) $\log_{b}^{a}=\dfrac{1}{\log_{a}^{b}}$

۲) $\log_{b^{m}}^{a^{n}}=\dfrac{n}{m}\log_{b}^{a}$

۳) $\log_{b}^{a}=\dfrac{\log_{c}^{a}}{\log_{c}^{b}}$ (تغییر مبنا)

۴) $a^{\log_{a}^{n}}=n$

نمودار $y=\log_b^x$ باشد $b>۱$ (صعودی)

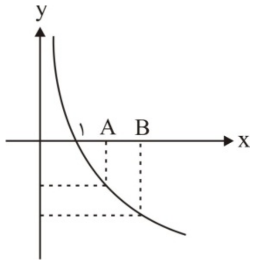


$۱)\ \log_b^A \geq \log_b^B \overset{b>۱}{\Rightarrow} A \geq B > ۰$

$۲)\ x>۱ \to \log_b^x > ۰$

$۳)\ ۰<x<۱ \to \log_b^x < ۰$

نمودار $y=\log_b^x$ باشد $۰<b<۱$ (نزولی)



$۱)\ \log_b^A \geq \log_b^B \overset{۰<b<۱}{\Rightarrow} ۰<A\leq B$

$۲)\ x>۱ \to \log_b^x < ۰$

$۳)\ ۰<x<۱ \to \log_b^x > ۰$

* **مثال ۱۰:** حاصل $\dfrac{۱}{\log_{۳}^{۲}} - \dfrac{۱}{\log_{۱۲}^{۲}}$ برابر کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۳}$ ۲) ۳ ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) ۲

حل: گزینه ۴ صحیح است.

$$\frac{۱}{\log_{۱۲}^{۲}} - \frac{۱}{\log_{۳}^{۲}} = \log_{۲}^{۱۲} - \log_{۲}^{۳} = \log_{۲}^{\frac{۱۲}{۳}} = \log_{۲}^{۴} = \log_{۲}^{۲^{۲}} = ۲\log_{۲}^{۲} = ۲$$

* **مثال ۱۱:** اگر $\log_x^{\sqrt{۲}} = -\dfrac{۱}{۲}$ ، آنگاه $\log_{۲}^{(۱+\frac{۱}{x})}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

حل: گزینه ۴ صحیح است.

$$\log_x^{\sqrt{۲}} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\log_x^{۲} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \log_x^{۲} = -۱ \to x^{-۱} = ۷ \Rightarrow \frac{۱}{x} = ۷ \Rightarrow ۱+\frac{۱}{x} = ۸$$

$$\log_{۲}^{\left(۱+\frac{۱}{x}\right)} = \log_{۲}^{۸} = \log_{۲}^{۲^{۳}} = ۳\log_{۲}^{۲} = ۳$$

* **مثال ۱۲:** حاصل $\left[\log_{۲}^{۶}\right] + \left[\log_{۶}^{۲}\right]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

حل: گزینه ۲ صحیح است.

$$\log_{۶}^{۱} < \log_{۶}^{۲} < \log_{۶}^{۶} \to ۰ < \log_{۶}^{۲} < ۱ \Rightarrow \left[\log_{۶}^{۲}\right] = ۰$$

$$\log_{۲}^{۴} < \log_{۲}^{۶} < \log_{۲}^{۸} \to ۲ < \log_{۲}^{۶} < ۳ \Rightarrow \left[\log_{۲}^{۶}\right] = ۲ \Rightarrow \left[\log_{۶}^{۲}\right] + \left[\log_{۲}^{۶}\right] = ۰+۲ = ۲$$

ریاضی عمومی ۱

مثال ۱۳: اگر $\log ۳ = ۰/۴۷۷۱۲$ باشد عدد $۳^{۱۰۰}$ چند رقمی است؟

۱) ۴۶ ۲) ۴۸ ۳) ۴۹ ۴) ۴۷

حل: گزینه ۲ صحیح است.

$$A = ۳^{۱۰۰} \to \log A = \log ۳^{۱۰۰} = ۱۰۰\log ۳ = ۱۰۰ \times ۰/۴۷۷۱۲ = ۴۷/۷۱۲$$

$$۴۷ < ۴۷/۷۱۲ < ۴۸ \to \log ۱۰^{۴۷} < \log A < \log ۱۰^{۴۸} \Rightarrow ۱۰^{۴۷} < A < ۱۰^{۴۸} \Rightarrow$$ دارای ۴۸ رقم است A

توجه:

$$\log A = ۴۷/۷۱۲ \to A = ۱۰^{۴۷/۷۱۲} \to$$ دارای ۴۸ رقم است A

مثال ۱۴: اگر $Log_{۲۴}^{۳۶} = a$ باشد، حاصل $Log_{۲}^{۳}$ برحسب a کدام است؟

۱) $\frac{a-۱}{۲a+۳}$ ۲) $\frac{۵a}{a+۲}$ ۳) $\frac{۳a-۲}{۲-a}$ ۴) $\frac{۲-۳a}{a+۲}$

حل: گزینه ۳ صحیح است.

$$Log_b^a = \frac{Log_c^a}{Log_c^b} \to Log_{۲۴}^{۳۶} = \frac{Log_۲^{۳۶}}{Log_۲^{۲۴}} = \frac{Log_۲^{۶^۲}}{Log_۲^{۶\times۴}} = \frac{۲Log_۲^۶}{Log_۲^۶ + Log_۲^۴} = \frac{۲\left(Log_۲^{۳\times۲}\right)}{Log_۲^۶ + Log_۲^۴}$$

$$= \frac{۲(Log_۲^۳ + Log_۲^۲)}{Log_۲^۳ + Log_۲^۲ + ۲Log_۲^۲} = \frac{۲Log_۲^۳ + ۲}{Log_۲^۳ + ۳} = a \quad , \quad Log_۲^۳ = x \Rightarrow \frac{۲x+۲}{x+۳} = a \to x = \frac{۳a-۲}{۲-a}$$

مثال ۱۵: حاصل عبارت $(\sqrt[۵]{۱۶})^{۵Log_۴^۳} + (\sqrt[۳]{۲۵})^{Log_۵^۸}$ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۸ ۳) ۵ ۴) ۳

حل: گزینه ۱ صحیح است.

$$(\sqrt[۵]{۱۶})^{۵Log_۴^۳} + (\sqrt[۳]{۲۵})^{Log_۵^۸} = (۲^{\frac{۴}{۵}})^{۵Log_۴^۳} + (۵^{\frac{۲}{۳}})^{Log_۵^۸} = ۲^{(\frac{۴}{۲})Log_۲^۳} + ۵^{Log_۵^{(۸)^{\frac{۲}{۳}}}} = ۲^{Log_۲^{۳^۲}} + ۵^{Log_۵^{(۲^۳)^{\frac{۲}{۳}}}} = ۳^۲ + ۲^۲ = ۹ + ۴ = ۱۳$$

نکته

اگر در تابع لگاریتم، مبنا عدد e (نپر، $e \simeq ۲/۷۱۸۲۸۱$) انتخاب شود تابع را Ln گویند.

$$y = Log_e^x = Lnx$$

خواص Ln:

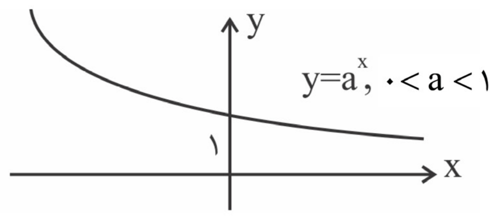
۱) $Lne = ۱$ ۲) $Log_b^a = \frac{Lna}{Lnb}$ ۳) $Ln(۱) = ۰$

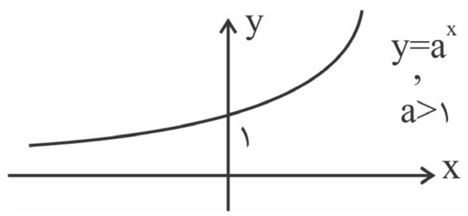
۴) $Ln(۰^+) = -\infty$ ۵) $e^{Lna} = a \quad , \quad Lne^a = a \quad , \quad a^b = e^{bLna}$

توجه: خواص تابع لگاریتم برای Ln صادق است. ضمناً e یک عدد گنگ است.

توابع نمایی

توابع نمایی معکوس توابع لگاریتمی هستند. تابع $y = a^x$ که در آن $a > ۰, a \neq ۱$ دارای دامنه R و برد $(۰, +\infty)$ و نموداری به فرمت زیر هستند:





خواص توابع نمایی:

فرض کنید $a \neq ۱, a > ۰$ آنگاه:

۱) $a^{x+y} = a^x . a^y$

۲) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

۳) $a^{-۱} = \frac{۱}{a}$

۴) $a^{-m} = \frac{۱}{a^m}$

۵) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

۶) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ که $b \neq ۱, b > ۰$

تابع جزء صحیح (براکت)

جزء صحیح تابعی است از اعداد حقیقی اعداد صحیح به طوری که به هر عدد حقیقی بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی آن را نسبت می‌دهد.

$n \leq x < n+۱ \leftrightarrow [x] = n \quad ; \quad n \in Z$

خواص جزء صحیح

۱) $x - ۱ < [x] \leq [x] < [x] + ۱$

۲) $x - ۱ < [x] \leq x$

۳) $\forall k \in Z \rightarrow [x+k] = [x] + k$

۴) $x - [x]$ را جزء اعشاری x می‌گویند و با $\{x\}$ نمایش می‌دهند.

۵) $[x - [x]] = ۰ \leftarrow ۰ \leq x - [x] < ۱$

۶) $\underbrace{[x + [x + [x + ... + [x]]]]}_{n \text{ بار}} = n[x]$

۷) $[x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & x \in Z \\ -۱ & x \notin Z \end{cases}$

۸) $[x+y] = \begin{cases} [x] + [y] & , ۰ \leq \{x\} + \{y\} < ۱ \\ [x] + [y] + ۱ & , ۱ \leq \{x\} + \{y\} < ۲ \end{cases}$

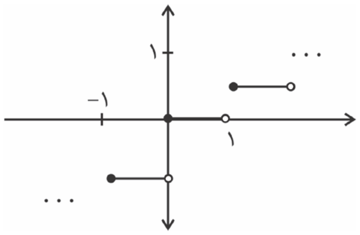
$\{x\}$ و $\{y\}$ به ترتیب جزء اعشاری x و y می‌باشند.

۹) $\forall k \in N ; x \in IR \rightarrow [kx] = [x] + \left[x + \frac{۱}{k}\right] + ... + \left[x + \frac{k-۱}{k}\right]$

۱۰) اگر $x < ۰$ آنگاه $۰ < \frac{x}{[x]} \leq ۱$

۱۱) اگر $x \geq ۱$ آنگاه $۱ \leq \frac{x}{[x]} < ۲$

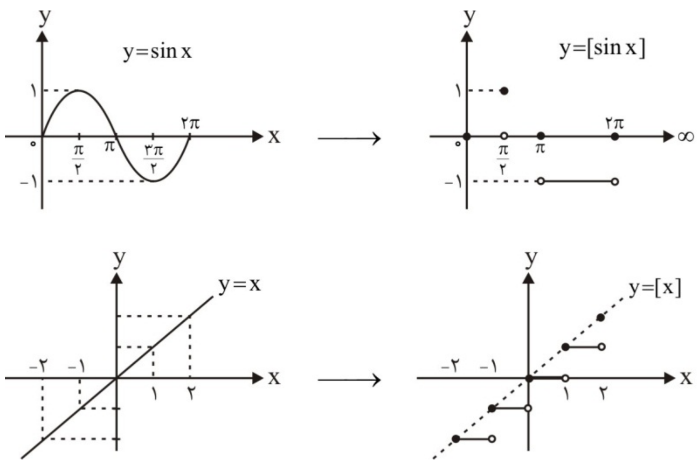
۱۲) تابع $[x]$، صعودی است.



نمودار $y = [x]$

رسم نمودار $y=[f(x)]$

برای رسم نمودار این توابع ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم. سپس نمودار به‌دست آمده را روی خطوط $k\in Z$، $y=k$ تصویر کرده به طوری که تمام قسمت‌هایی از نمودار که بین دو خط متوالی $y=k$ و $y=k+۱$ بر روی خط پایین‌تر یعنی $y=k$ تصویر می‌شود، در تصاویر به‌دست آمده آن طرف که به نمودار $y=f(x)$ متصل است «توپر» و آن طرف که به نمودار $y=f(x)$ متصل نمی‌باشد «توخالی» خواهد بود.



رسم نمودار $y=f([x])$

برای رسم نمودار این تابع، خطوط عمومی $(k\in z)x=k$ را رسم کنید. سپس قسمتی از نمودار f را که بین دو خط $x=k+۱, x=k$ قرار دارد را روی خط $y=f(k)$ تصویر کنید.

⁕ **مثال ۱۶:** مجموعه جواب معادله $[x+\frac{۱}{۲}]+[۲x+\frac{۱}{۳}]=\frac{۵}{۶}$ را به‌دست آورید.

حل: با توجه به اینکه مجموع دو عدد صحیح یک عدد صحیح می‌باشد این معادله جواب نخواهد داشت.

⁕ **مثال ۱۷:** مجموعه جواب معادله $[x]+[۲x]=۰$ را به‌دست آورید.

حل: x نمی‌تواند مقادیر منفی را اختیار کند زیرا $[x]$ و $[۲x]$ اعداد صحیح منفی می‌شوند و مجموعشان حداکثر -۱ خواهد شد. اگر $x\geq ۰$ باشد $[x]$ و $[۲x]$ اعداد مثبت می‌باشند و مجموعشان زمانی صفر است که هر کدام صفر باشند.

$$[x]=۰ \Rightarrow ۰\leq x<۱ \quad ; \quad [۲x]=۰ \Rightarrow ۰\leq ۲x<۱ \Rightarrow ۰\leq x<\frac{۱}{۲}$$

اجتماع بازه‌ها برابر $۰\leq x<\frac{۱}{۲}$ است.

نکته مجموعه جواب معادله $k\in N$، $[x]+[۲x]+...+[kx]=۰$ برابر بازه $[۰,\frac{۱}{k})$ است.

⁕ **مثال ۱۸:** معادله $[\frac{x}{۴}]=\frac{x}{۳}$ را حل کنید.

حل: $\frac{x}{۳}$ باید عدد صحیح باشند یعنی: $\frac{x}{۳}=k\in Z \Rightarrow x=۳k$

$$[\frac{x}{۴}]=\frac{x}{۳} \Rightarrow \frac{x}{۳}\leq\frac{x}{۴}<\frac{x}{۳}+۱ \xrightarrow{\times ۱۲} ۴x\leq ۳x<۴x+۱۲ \begin{cases} ۴x\leq ۳x \Rightarrow x\leq ۰ \\ ۳x<۴x+۱۲ \Rightarrow x>-۱۲ \end{cases} \Rightarrow -۱۲<x\leq ۰$$

x مضرب ۳ است بنابراین $x=۰,-۳,-۶,-۹$.

* **مثال ۱۹:** مجموعه جواب معادله $[x+3[x]]=2[x-4]$ کدام است؟

حل:
$$x\in Z\Rightarrow[x+n]=[x]+n : [x+3[x]]=[x]+3[x]=4[x];2[x-4]=2[x]-8$$
$$\rightarrow 4[x]=2[x]-8\rightarrow 2[x]=-8\rightarrow[x]=-4 \Rightarrow -4\le x<-3$$

* **مثال ۲۰:** معادله $\left[\frac{6}{x-1}\right]+\left[\frac{6}{1-x}\right]=0$ چند جواب صحیح دارد؟

حل: می‌دانیم اگر $a\in z$ آنگاه $[a]+[-a]=0$. با فرض $\frac{6}{x-1}=K$ داریم $\frac{6}{1-x}=-K$. پس معادله فوق وقتی برقرار است که $\frac{6}{x-1}=K$ ، $K\in Z-\{0\}$ پس $x-1=\frac{6}{K}$, $x=\frac{6}{K}+1$ برای اینکه x صحیح باشد باید $K=\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$ لذا معادله هشت جواب صحیح دارد.

> **نکته** اگر $[x]>n$ آنگاه $x\ge n+1$.

> **نکته** هرگاه $[x^2+y^2]=n$, $n\in N$ باشد آنگاه مساحت ناحیه همواره برابر عدد π است.

دامنه و برد تابع

دامنه تابع، مقادیر مجاز اختیار شده روی محور xها و برد، مقادیر مجاز روی محور yها می‌باشد: یعنی دامنه کلیه مقادیری است که تابع f به ازای آن‌ها تعریف شده است.

روش‌های محاسبه دامنه

۱) توابع چندجمله‌ای خطی $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\dots$ دارای دامنه $\mathbb{R}$ هستند.

۲) در توابع کسری $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ (که $f(x)$ و $g(x)$ دو چندجمله‌ای هستند) دامنه عبارت است از:
$$D=R-\{x\,|\,g(x)=0\}$$

۳) توابع رادیکالی

الف) اگر فرجه فرد باشد دامنه تابع همان دامنه تابع زیر رادیکال است.
$$f(x)=\sqrt[2n+1]{g(x)}\Rightarrow D_f=D_g$$

ب) اگر فرجه زوج باشد باید زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر قرار داده شود.
$$f(x)=\sqrt[2n]{g(x)}\Rightarrow D_f=\{x\,|\,g(x)\ge 0\}$$

۴) توابع لگاریتمی
$$y=\mathrm{Log}_{g(x)}^{f(x)}\quad,\quad D=\{x\,|\,f(x)>0\,,g(x)>0\,,g(x)\ne 1\}$$

* **مثال ۲۱:** دامنه تابع $f(x)=\sqrt{\pi-6\arccos x}$ کدام است؟

۱) $\left[\frac{\sqrt3}{2},1\right]$ ۲) $\left[\frac{1}{2},1\right]$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $\left[\frac{\sqrt2}{2},1\right]$

حل: گزینه ۱ صحیح است.

$$\begin{cases}\pi-6\arccos x\geq 0\rightarrow\dfrac{\pi}{6}\geq\arccos x\Rightarrow\cos^{-1}x\leq\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x\geq\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,(1)\\ \arccos x\rightarrow -1\leq x\leq 1\,(2)\end{cases}$$

اشتراک (۱) و (۲) جواب است یعنی $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$.

نکته

در مورد نزولی و صعودی بودن در مطالب بعدی بیشتر توضیح خواهیم داد. دقت کنید اگر $y<x$ آنگاه $f(y)<f(x)$، f را تابع اکیداً صعودی و اگر $y<x$ نتیجه دهد $f(y)>f(x)$، f را تابع نزولی نامیم. حال اگر بدانیم f تابعی اکیداً صعودی است از $f(y)>f(x)$ نتیجه می‌شود $x<y$ و اگر بدانیم f تابعی اکیداً نزولی است از $f(x)<f(y)$ نتیجه می‌شود $x>y$. ضمناً اگر f نزولی (صعودی) باشد arc f نزولی (صعودی) است از این نکته در حل مثال قبل استفاده شد.

نکته

دامنه تابع $y=\sqrt{\mathrm{Log} f(x)}$ برابر است با:

$$\begin{cases}f(x)>0\\ \mathrm{Log} f(x)\geq 0\quad\Rightarrow\quad \mathrm{Log} f(x)\geq \mathrm{Log}1\quad\Rightarrow\quad f(x)\geq 1\end{cases}$$

*** مثال ۲۲:** دامنه تابع $y=\sqrt{\mathrm{Log}\dfrac{5x-x^2}{4}}$ را به دست آورید.

حل:

$$f(x)\geq 1\quad\Rightarrow\quad\frac{5x-x^2}{4}\geq 1\quad\Rightarrow\quad -x^2+5x-4\geq 0\quad\Rightarrow\quad 1\leq x\leq 4\quad\Rightarrow\quad D=[1,4]$$

*** مثال ۲۳:** دامنه تابع $y=\sqrt{\left||x-1|-3\right|-2}$ شامل چند عدد صحیح نمی‌باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) بی‌شمار

حل: گزینه ۳ صحیح است.

$$\left||x-1|-3\right|-2\geq 0\quad\Rightarrow\quad\left||x-1|-3\right|\geq 2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}|x-1|-3\geq 2\quad\Rightarrow\quad|x-1|\geq 5\quad\Rightarrow\quad x-1\geq 5\quad,\quad x-1\leq -5 & (1)\\ |x-1|-3\leq -2\quad\Rightarrow\quad|x-1|\leq +1\quad\Rightarrow\quad -1\leq x-1\leq 1 & (2)\end{cases}$$

$$(1):\begin{cases}(1):x\geq 6\quad,\quad x\leq -4\\ (2):0\leq x\leq 2\end{cases}\quad,\ \Rightarrow\quad D_f=(-\infty,-4]\cup[0,2]\cup[6,+\infty)$$

بنابراین دامنه تابع شامل اعداد صحیح $\{-3,-2,-1,3,4,5\}$ یعنی شامل ۶ عضو نمی‌باشد.

*** مثال ۲۴:** تمام دامنه تابع $y=\dfrac{\sqrt{x(x^2-1)}}{\sqrt{|x|+x}}$ را به‌دست آورید.

$$x(x^2-1)\geq 0\Rightarrow x\geq 1 \text{ یا } -1\leq x\leq 0,|x|+x>0\Rightarrow x>0\xrightarrow{\text{اشتراک}}x\geq 1\Rightarrow D_f=[1,+\infty)$$

※ **مثال ۲۵:** دامنه تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{[x]-1}$ را به‌دست آورید.

$$\left.\begin{array}{l}(1): 4-x^2\geq 0 \;\Rightarrow\; 4\geq x^2 \;\Rightarrow\; |x|\leq 2 \;\Rightarrow\; -2\leq x\leq 2\\ (2): [x]-1\neq 0 \;\Rightarrow\; [x]\neq 1 \;\Rightarrow\; x\notin[1,2)\end{array}\right\} D_f=[-2,1)\cup\{2\}$$

※ **مثال ۲۶:** دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\mathrm{Log}(4x^2-6x)}}{[x]+1}$ را به‌دست آورید.

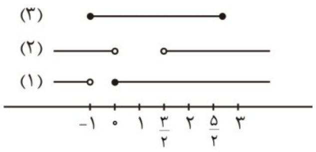
$$(1): [x]+1\neq 0 \;\Rightarrow\; [x]\neq -1 \;\Rightarrow\; x\notin[-1,0)$$

$$(2): 4x^2-6x>0 \;\Rightarrow\; x(4x-6)>0 \;\Rightarrow\; x<0\,,\, x>\frac{3}{2}$$

$$(3) 1-\mathrm{Log}(4x^2-6x)\geq 0 \;\Rightarrow\; 1\geq \mathrm{Log}(4x^2-6x) \;\Rightarrow\; \mathrm{Log}10\geq \mathrm{Log}(4x^2-6x)$$

$$\Rightarrow\; 4x^2-6x-10\leq 0 \;\Rightarrow\; -1\leq x\leq \frac{5}{2}$$

با توجه به شکل اشتراک ۳ قسمت $(\frac{3}{2},\frac{5}{2}]$ است.



روش‌های یافتن برد:

به طور کلی نمی‌توان روش خاصی را به عنوان محاسبه برد مطرح کرد ولی دقت به نکات زیر در محاسبه برد، کمک خواهد کرد.

الف) سعی کنید ضابطه تابع $y=f(x)$ را بسازید و برای آن کران پیدا کنید.

ب) سعی کنید از روابط جبری مثل $(x^2+ax=(x+\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4})$ استفاده کنید.

ج) دامنه تابع معکوس= برد تابع اولیه، پس با یافتن تابع معکوس، می‌توان دامنه آن را به عنوان برد تابع اولیه ارائه داد.

> **نکته**
> برای تعیین برد $y=\mathrm{Log}_a^u$ ابتدا برد u را پیدا نموده و سپس از طرفین آن لگاریتم در مبنای a می‌گیریم. اگر مبنا کوچکتر از ۱ باشد جهت نامساوی را عوض می‌کنیم.

※ **مثال ۲۷:** برد تابع $y=\mathrm{Log}_{0/1}^{(x^2-2x+11)}$ را به‌دست آورید.

حل:

$$x^2-2x+11 \;\underset{}{\overset{\text{مربع کامل}}{=\!=}}\; (x-1)^2+10\geq 10$$

از طرفین در مبنای ۰/۱ لگاریتم می‌گیریم و جهت نامساوی عوض می‌شود.

$$\mathrm{Log}_{0/1}^{(x^2-2x+11)}\leq \mathrm{Log}_{0/1}^{10}=-1 \;\Rightarrow\; y\leq -1 \;\Rightarrow\; R=(-\infty,-1]$$

> **نکته**
> برای $x>0$ آنگاه $x+\frac{1}{x}\geq 2$ و برای $x<0$ آنگاه $x+\frac{1}{x}\leq -2$.

* **مثال ۲۸:** برد $y=\dfrac{x^۲+۱}{x}$ را به‌دست آورید.

حل:

$$y=\frac{x^۲+۱}{x}=x+\frac{۱}{x}, \text{if } x>۰ \Rightarrow x+\frac{۱}{x}\ge ۲ \ : \ \text{if } x<۰ \Rightarrow x+\frac{۱}{x}\le -۲ \Rightarrow$$
$$R=(-\infty,-۲]\cup[۲,+\infty)$$

نکته برای تعیین برد $y=\dfrac{ax^۲+bx+c}{a'x^۲+b'x+c'}$ ابتدا روش طرفین وسطین را به کار برده و رابطه را نسبت به x مرتب می‌کنیم و در نهایت باید $\Delta\ge ۰$.

* **مثال ۲۹:** برد تابع $y=\dfrac{۵x}{x^۲+۱}$ را به‌دست آورید.

حل:

$$y=\frac{۵x}{x^۲+۱} \Rightarrow yx^۲-۵x+y=۰ \xrightarrow{\Delta\ge ۰} ۲۵-۴y^۲\ge ۰ \Rightarrow y^۲\le\frac{۲۵}{۴} \Rightarrow \frac{-۵}{۲}\le y\le\frac{۵}{۲}$$

* **مثال ۳۰:** برد تابع $y=\dfrac{۱-x^۲}{۱+x^۲}$ را به‌دست آورید.

حل:

$$y=\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲} \Rightarrow y+yx^۲=۱-x^۲ \Rightarrow x^۲(y+۱)=۱-y \Rightarrow x^۲=\frac{۱-y}{۱+y}$$
$$x^۲\ge ۰ \Rightarrow \frac{۱-y}{۱+y}\ge ۰ \Rightarrow -۱<y\le ۱$$

* **مثال ۳۱:** برد تابع $y=x+۵+\dfrac{۱}{x+۳}$ را به‌دست آورید.

حل:

$$y=x+۵+\frac{۱}{x+۳}=\frac{x^۲+۸x+۱۶}{x+۳} \Rightarrow x^۲+۸x+۱۶=yx+۳y \Rightarrow x^۲+(۸-y)x+(۱۶-۳y)=۰$$
$$\Delta\ge ۰ \Rightarrow (۸-y)^۲-۴(۱۶-۳y)\ge ۰ \Rightarrow y^۲-۴y\ge ۰ \Rightarrow R_f=R-(۰,۴)$$

نکته برد تابع $y=\dfrac{ax}{x^۲+۱}$ همواره برابر است با: $[-\dfrac{a}{۲},\dfrac{a}{۲}]$

* **مثال ۳۲:** برد تابع $y=\dfrac{|x|}{x^۲+۱}$ را به‌دست آورید.

حل:

می‌دانیم که $\dfrac{|x|}{x^۲+۱}\ge ۰$. از طرفی برای $y=\dfrac{x}{x^۲+۱}$ چون $a=۱$ است داریم: $R_f=[-\dfrac{۱}{۲},\dfrac{۱}{۲}]$ بنابراین برد $\dfrac{|x|}{x^۲+۱}$ برابر می‌شود با: $[۰,\dfrac{۱}{۲}]$

* **مثال ۳۳:** برد تابع $y=۲+\sqrt{x-۴[\dfrac{x}{۴}]}$ را به‌دست آورید.

حل:

$$y=۲+\sqrt{۴(\frac{x}{۴}-[\frac{x}{۴}])} \quad ; \quad ۰\le\frac{x}{۴}-[\frac{x}{۴}]<۱\Rightarrow ۰\le ۴(\frac{x}{۴}-[\frac{x}{۴}])<۴\Rightarrow ۰\le\sqrt{۴(\frac{x}{۴}-[\frac{x}{۴}])}<۲\Rightarrow ۲\le y<۴$$

* **مثال ۳۴:** برد تابع $f(x)=\left[\dfrac{3x^2+2}{x^2+1}\right]$ را به‌دست آورید.

حل:

$$\frac{3x^2+2}{x^2+1}=3-\frac{1}{x^2+1} \quad ; \quad x^2\geq 0 \;\Rightarrow\; x^2+1\geq 1 \;\Rightarrow\; 0<\frac{1}{x^2+1}\leq 1$$

$$\Rightarrow\; -1\leq\frac{-1}{1+x^2}<0 \;\Rightarrow\; 2\leq 3-\frac{1}{x^2+1}<3 \;\Rightarrow\; [3-\frac{1}{x^2+1}]=2 \;\Rightarrow\; R_f=\{2\}$$

* **مثال ۳۵:** برد تابع $y=\sqrt{Log_2^{(8x-x^2)}}$ را به‌دست آورید.

حل:

$$8x-x^2=-(x^2-8x)=16-(x-4)^2 \quad ; \quad (x-4)^2\geq 0$$

$$\Rightarrow\; -\infty<-(x-4)^2\leq 0 \;\Rightarrow\; -\infty<16-(x-4)^2\leq 16$$

چون لگاریتم تابعی صعودی است (مبنا ۲ می‌باشد) داریم:

$$-\infty<16-(x-4)^2\leq 16 \;\Rightarrow\; 0\leq Log_2^{8x-x^2}\leq Log_2^{16}=4 \;\Rightarrow\; 0\leq\sqrt{Log_2^{8x-x^2}}\leq 2$$

* **مثال ۳۶:** برد تابع $y=x\sqrt{4-x^2}$ را به‌دست آورید.

حل:

$$x=2\sin\theta \;\Rightarrow\; y=2\sin\theta\times\sqrt{4-4\sin^2\theta}=2\sin\theta\times 2\cos\theta=2\sin 2\theta$$

$$-1\leq\sin 2\theta\leq 1 \;\Rightarrow\; -2\leq 2\sin 2\theta\leq 2 \;\Rightarrow\; -2\leq y\leq 2$$

$$4-x^2=0 \;\Rightarrow\; x=\pm 2 \;\Rightarrow\; y(\pm 2)=0 \;\Rightarrow\; R=[-2,2]$$

* **مثال ۳۷:** برد تابع $y=x+\sqrt{4-x^2}$ را به‌دست آورید.

حل:

$$4-x^2=0 \;\Rightarrow\; x=\pm 2 \;\Rightarrow\; y(2)=2\,,\,y(-2)=-2$$

$$x=2\sin\theta \;\Rightarrow\; y=2\sin\theta+2\cos\theta \;\Rightarrow\; -2\sqrt{2}\leq 2\sin\theta+2\cos\theta\leq 2\sqrt{2}$$

اما نمی‌توان x را طوری پیدا کرد که $y=-2\sqrt{2}$ شود بنابراین $R=[-2,2\sqrt{2}]$.

تابع درجه دو $y=ax^2+bx+c$ (یادآوری)

تابع $y=ax^2+bx+c$ را در نظر بگیرید. قرار دهید $\Delta=b^2-4ac$

الف) اگر $\Delta>0$ آنگاه y دارای دو ریشه $\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ می‌باشد و تعیین علامت آن به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$	$\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$+\infty$
$y=ax^2+bx+c$	موافق علامت a	0 مخالف علامت a	0 موافق علامت a	

ب) اگر $\Delta=0$ آنگاه y دارای ریشه مضاعف $\dfrac{-b}{2a}$ است. y به ازای سایر مقادیر x، همواره موافق علامت a است.

ج) اگر $\Delta<0$ آنگاه y ریشه حقیقی ندارد و علامت y همواره موافق علامت a است.

نکته

الف) اگر $y=ax^2+bx+c$ دارای ریشه‌های x_1,x_2 باشد آنگاه: $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ و $x_1.x_2=\frac{c}{a}$

ب) اگر در $y=ax^2+bx+c$، $a+b+c=0$ حتما یکی از ریشه‌ها عدد یک و ریشه دیگر $\frac{c}{a}$ می‌باشد.

نکته

تابع $f(x):ax^2+bx+c$ دارای دامنه R است و نمودار آن به فرم سهمی است. اگر $a>0$، نمودار سهمی رو به بالا (محدب) و دارای نقطه مینیمم $\left((\frac{-b}{2a}),f(\frac{-b}{2a})\right)$ می‌باشد که در این حالت برد تابع $[f\left(\frac{-b}{2a}\right),+\infty)$ است.

اگر $a<0$، نمودار سهمی رو به پایین (مقعر) و دارای نقطه ماکزیمم $\left((\frac{-b}{2a}),f(\frac{-b}{2a})\right)$ است که در این حالت برد تابع به‌صورت $[f\left(\frac{-b}{2a}\right),+\infty)$ است.

* **مثال ۳۸:** اگر x_1,x_2 ریشه‌های معادله $x^2+2x+3=0$ بوده و $A=x_1^{90}+x_2^{90}$، $B=x_1^{91}+x_2^{91}$، در این صورت $C=x_1^{92}+x_2^{92}$ کدام است؟
(کنکور کارشناسی ارشد- مهندسی عمران-سراسری)

حل: گزینه ۲ صحیح است.

فرض کنید x_1,x_2 ریشه‌های $x^2+2x+3=0$ باشند، پس: $x_1+x_2=-2$ و $x_1.x_2=3$ حال داریم:

$$(x_1+x_2)(x_1^{91}+x_2^{91})=x_1^{92}+x_2^{92}+x_1x_2^{91}+x_2x_1^{91}=(x_1^{92}+x_2^{92})+x_1x_2\left(x_2^{90}+x_1^{90}\right)\Rightarrow$$

$$(x_1+x_2)(x_1^{91}+x_2^{91})=(x_1^{92}+x_2^{92})+x_1x_2\left(x_1^{90}+x_2^{90}\right)\Rightarrow(-2)B=C+3A\Rightarrow C=-2B-3A$$

تساوی دو تابع

دو تابع $f(x),g(x)$ را با هم مساوی گوییم هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشند:

۱- دامنه آن‌ها باهم برابر باشند: $D_{f(x)}=D_{g(x)}$

۲- ضابطه آن‌ها با هم برابر باشند: $\forall x\in D: f(x)=g(x)$

* **مثال ۳۹:** دو تابع $f(x),g(x)$ با کدام ضابطه‌ها با یکدیگر برابرند؟

۱) $f(x)=1$ $\quad g(x)=\frac{x}{x}$

۲) $f(x)=x$ $\quad g(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$

۳) $f(x)=\log^{x^2}$ $\quad g(x)=2\log x$

۴) $f(x)=x^2$ $\quad g(x)=\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2$

حل: گزینه ۴ صحیح است.

در گزینه ۱، $D_f=R$, $D_g=R-\{0\}$, پس شرط تساوی دامنه‌ها برقرار نیست لذا f با g مساوی نیست.

در گزینه ۲: $D_f=R$, $D_g=R^+\cup\{0\}$, پس f با g برابر نیست.

در گزینه ۳، $D_f=R-\{0\}$ ولی $D_g=R^+$ و چون D_f با D_g برابر نیست پس f با g مساوی نیست.

در گزینه ۴: $D_f=D_g=R$ داریم:

$$g(x)=\frac{x^2+2x|x|+|x|^2}{4}+\frac{x^2-2x|x|+|x|^2}{4}=\frac{2x^2+2|x|^2}{4}\underset{|x|^2=x^2}{=}\frac{4x^2}{4}=x^2$$

پس $f(x)=g(x)$، چون هم ضابطه‌ها و هم دامنه‌ها باهم برابرند.

ترکیب توابع

توابع $f(x)$ و $g(x)$ را با دامنه‌های D_f و D_g در نظر بگیرید. ترکیب f و g $\left(\underbrace{A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C}_{fog}\right)$ را به صورت $fog(x)=f(g(x))$ نمایش می‌دهیم که دامنه آن برابر است با:

$$D_{fog(x)}=\{x\in D_g , g(x)\in D_f\}$$

نکته

راه یافتن تستی D_{fog} این است که از اولین مرحله‌ای که از f یا g خارج می‌شویم، پیش از هرگونه ساده کردنی، دامنه توابع مشاهده شده را بیابیم و از آن‌ها اشتراک بگیریم.

※ **مثال ۴۰:** اگر $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ و $g(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$، ضابطه $fog(x)$ و دامنه آن را بیابید.

حل:

$$fog(x)=f\left(g(x)\right)=\frac{1}{g(x)-3}=\frac{1}{\frac{x-2}{x+2}-3}=\frac{1}{\frac{x-2-3x-6}{x+2}}=\frac{x+2}{-2x-8}$$

چون $D_f=R-\{3\}$, $D_g=R-\{-2\}$ پس:

$$D_{fog}=\{x\in D_g : g\in D_f\}=\{x\neq -2, \frac{x-2}{x+2}\neq 3\}=\{x\neq -2 , x\neq 4\}=R-\{-2,-4\}$$

دقت کنید برای یافتن راه تستی D_{fog}، ابتدا fog را به صورت $f\left(g(x)\right)=\dfrac{1}{\frac{x-2}{x+2}-3}$ تشکیل دهید و هیچ‌گونه عمل ساده‌سازی انجام ندهید. چون دو کسر می‌بینیم مخرج‌های هیچ‌کدام نباید صفر شوند، یعنی مخرج $x+2$ در کسر $\dfrac{x-2}{x+2}$ مخالف صفر باشد

(پس (۱) $x+2\neq 0$) و مخرج $\dfrac{1}{\frac{x-2}{x+2}-3}$ مخالف صفر باشد یعنی (۲) $\dfrac{x-2}{x+2}-3\neq 0$

پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\, x+2\neq 0\rightarrow x\neq -2\\ (2)\, \dfrac{x-2}{x+2}-3\neq 0\rightarrow x\neq -4\end{array}\right\}\Rightarrow x\neq -2,-4\Rightarrow R-\{-2-4\}$$

توابع زوج و فرد

تابع $y=f(x)$ را یک تابع زوج گویند هرگاه هردو شرط زیر برقرار باشد:

۱) دامنه $f(x)$ متقارن باشد یعنی: $\forall x\in D_f \Rightarrow -x\in D_f$

۲) $\forall x\in D_f : f(-x)=f(x)$

تابع $y=f(x)$ را یک تابع فرد گویند هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) دامنه $f(x)$ متقارن باشد

۲) $\forall x\in D_f : f(-x)=-f(x)$

نکته

الف) اگر f تابعی زوج باشد محور yها محور تقارن است و اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد مبدأ مختصات مرکز تقارن آن می‌باشد.

ب) زوج و فرد بودن توابع مثل زوج و فرد بودن اعداد نیست یعنی یک تابع می‌تواند هم زوج باشد و هم فرد یا نه زوج باشد و نه فرد و یا اینکه فقط زوج باشد و یا فقط فرد.

نکته

اگر $f(x)$ تابعی فرد و $0 \in D_f$ آنگاه $f(0)=0$

نکته

یک تابع را می‌توان به صورت مجموعی از یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت:

$$f(x)=\underbrace{\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))}_{\text{قسمت زوج}}+\underbrace{\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))}_{\text{قسمت فرد}}$$

نکته

برای آنکه $f(x)=\operatorname{Log}(ax+\sqrt{bx^2+1})$ تابعی فرد باشد باید $a^2=b$.

اثبات:

$$f(-x)=-f(x) \Rightarrow f(x)+f(-x)=0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Log}(ax+\sqrt{bx^2+1})+\operatorname{Log}(-ax+\sqrt{bx^2+1})=0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Log}(\sqrt{bx^2+1}+ax)(\sqrt{bx^2+1}-ax)=\operatorname{Log}1 \Rightarrow bx^2+1-a^2x^2=1$$

$$\Rightarrow x^2(b-a^2)=0 \Rightarrow a^2=b$$

نکته

تابع f با ضابطه $f(x)=0$ هم زوج و هم فرد است.

* **مثال ۴۱:** تابع $f(x)=[\frac{x^2}{x^2+1}]$ را از نظر زوج یا فرد بودن بررسی کنید.

حل: $x^2<x^2+1 \Rightarrow 0<\frac{x^2}{x^2+1}<1 \Rightarrow [\frac{x^2}{x^2+1}]=0 \Rightarrow$ هم زوج و هم فرد

* **مثال ۴۲:** اگر تابع $x \notin Z$ و $f(x)=a[x]+1$ فرد باشد، a کدام است؟

حل:

$$f(-x)=-f(x) \to f(x)+f(-x)=0 \to a[x]+1+a[-x]+1=0 \to a([x]+[-x])+2=0$$

$$x \in R-Z \to [x]+[-x]=-1 \to a(-1)+2=0 \to a=2$$

* **مثال ۴۳:** فرد یا زوج بودن تابع $f(x)=\max\{\sin x,-\sin x\}$ را بررسی کنید.

حل: برای Max و Min دو مقدار داریم:

$$\max\{a,b\}=\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2}\ ;\ \min\{a,b\}=\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2}$$

پس:

$$\to f(x)=\max\{\sin x,-\sin x\}=|\sin x| \to \text{زوج}$$

نکته
نقطه (α,β) مرکز تقارن منحنی $f(x)$ است هرگاه با تبدیل $x \to 2\alpha - x$ و $y \to 2\beta - y$ منحنی تغییر نکند. خط $x=\alpha$ محور تقارن منحنی است هرگاه با تبدیل $x \to 2\alpha - x$ معادله منحنی تغییر نکند. همچنین خط $y=\beta$ محور تقارن است هرگاه با تبدیل y به $2\beta - y$ ضابطه تابع تغییر نکند.

نکته
خط $y=x$ محور تقارن است هرگاه در ضابطه تابع، اگر به‌جای تمام yها x و به‌جای تمام xها y قرار دهیم ضابطه تابع تغییر نکند یعنی $f(x,y)=f(y,x)$ و خط $y=-x$ محور تقارن تابع است هرگاه $f(x,y)=f(-y,-x)$

※ **مثال ۴۴:** نمودار تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+2}$ نسبت به کدام خط متقارن است؟ *(کنکور کارشناسی ارشد-سراسری MBA)*

۱) $x=2$ ۲) $x=-1$ ۳) $x=1$ ۴) $y=x$

حل: گزینه ۲ صحیح است.

اگر $x=\alpha$ محور تقارن باشد آنگاه به‌جای x قرار دهید $2\alpha - x$ و ضابطه نباید تغییر کند. پس اگر $x=-1$ محور تقارن باشد به‌جای x قرار می‌دهیم $-2-x$ پس:

$$f(-2-x)=\sqrt[3]{-2-x}-\sqrt[3]{-2-x+2}=-\sqrt[3]{2+x}-(-\sqrt[3]{x})=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2+x}=f(x)$$

پس $x=-1$ محور تقارن است.

تابع پوشا، تابع یک‌به‌یک و تابع معکوس

تعریف تابع پوشا: تابع $f:R\to R$ پوشا است هرگاه $R_f=R$ یعنی هر خط موازی محور xها، نمودار تابع را در حداقل یک نقطه قطع کند.

تابع یک به یک

تابع f را یک به یک گویند هرگاه هیچ دو زوج مرتب متفاوتی دارای مولفه دوم یکسان نباشند. از نظر هندسی هرگاه خطی موازی محور x ها رسم کنیم تابع را در بیش از یک نقطه قطع نکند.

از نظر قانون ریاضی تابعی را یک به یک گویند هرگاه به ازای هر y حداکثر یک مقدار برای x به‌دست آید.

$$f(x_1)=f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1=x_2$$

نکته
توابع زوج و ثابت یک به یک نیستند.

نکته
تابع $y=[f(x)]$ یک به یک نمی‌باشند.

نکته
توابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی (اکیداً یکنوا) یک به یک می‌باشند.

تابع معکوس

اگر f تابعی یک به یک باشد g را معکوس f گویند هرگاه $fog(x)=gof(x)=x$ معکوس تابع f را با f^{-1} نشان می‌دهند.

$$f^{-1}(f(x))=f(f^{-1}(x))=x$$

نکته
اگر $(a,b)\in f$ آنگاه $(b,a)\in f^{-1}$ و برعکس.

نکته نمودار تابع f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ متقارن می‌باشند.

نکته دامنه تابع معکوس همان برد تابع f خواهد بود.

نکته در بحث ترکیب توابع داریم:

$$(fog)^{-1}(x)=g^{-1}(f^{-1}(x))$$

نکته معکوس تابعی فرد یک تابع فرد است.

قضیه: تابع f معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر یک‌به‌یک باشد.

نکته در تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a+d=0$ آنگاه:

$$f(x)=f^{-1}(x)\quad\Rightarrow\quad f(f(x))=x$$

نکته برای یافتن تابع معکوس از تابع $y=f(x)$، x را برحسب y حل کرده سپس با تغییر نام جای x و y را عوض می‌کنیم.

مثال ۴۵: تابع $f:R\to R$ با ضابطه $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+4}$ از نظر یک به یک و پوشا بودن چگونه است؟

حل:

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2+4)-2x(x^3)}{(x^2+4)^2}=\frac{x^4+12x^2}{(x^2+4)^2}>0 \Rightarrow \text{صعودی اکید} \Rightarrow \text{یک به یک است}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\,;\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \Rightarrow$ برد f برابر R است. $\Rightarrow$ پوشا است.

مثال ۴۶: ضابطه معکوس $y=x\sqrt{x}+1$ را به‌دست آورید.

حل:

$$D_f:x\geq 0\,,R_f:y\geq 1\quad;\quad y=x\sqrt{x}+1\ \Rightarrow\ y-1=x\sqrt{x}\ \Rightarrow\ (y-1)^2=x^3$$

$$\Rightarrow\ x=\sqrt[3]{(y-1)^2}\ \Rightarrow\ f^{-1}(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}\quad,\quad x\geq 1$$

مثال ۴۷: اگر تابع $y=x^3+ax^2+a-3$ معکوس‌پذیر باشد، منحنی معکوس آن از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(2,5)$ ۲) $(3,4)$ ۳) $(4,3)$ ۴) $(5,2)$

حل: گزینه ۴ صحیح است.

تابع پیوسته و معکوس‌پذیر است. بنابراین اکیداً یکنواست. پس $y'=3x^2+2ax$ می‌دانیم که:

$$y=ax^2+bx+c\begin{cases}a>0\,,\Delta\leq 0 & \text{همواره مثبت}\\ a<0\,,\Delta\leq 0 & \text{همواره منفی}\end{cases}$$

پس:

$\Delta \le 0 \Rightarrow 4a^2 \le 0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow y=x^3-3 \Rightarrow (2,5)\in f \Rightarrow (5,2)\in f^{-1}$

※ مثال ۴۸: هرگاه $f^{-1}(x)=x^3+x$، معکوس تابع $g(x)=f(1+\frac{1}{x})$ را به‌دست آورید.

حل:

$y=f(1+\frac{1}{x}) \Rightarrow 1+\frac{1}{x}=f^{-1}(y) \Rightarrow \frac{1}{x}=f^{-1}(y)-1 \Rightarrow x=\frac{1}{f^{-1}(y)-1} \quad ; \quad f^{-1}(y)=y^3+y$

$\Rightarrow x=\frac{1}{y^3+y-1} \Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{1}{x^3+x-1}$

※ مثال ۴۹: معکوس تابع $y=\mathrm{Ln}\frac{x+1}{x-1}$ را به‌دست آورید.

حل:

$y=\mathrm{Ln}\frac{x+1}{x-1} \Rightarrow e^y=\frac{x+1}{x-1} \Rightarrow xe^y-e^y=x+1 \Rightarrow x(e^y-1)=e^y+1$

$\Rightarrow x=\frac{e^y+1}{e^y-1} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$

※ مثال ۵۰: اگر $x>0$ و $f(x)=x-\frac{1}{x}$ نمودار f^{-1} محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

حل:

فرض کنیم f^{-1} محور y ها را با عرض a قطع کند در این صورت $(0,a)\in f^{-1}$ بنابراین $(a,0)\in f$ در نتیجه:

$f(a)=0 \Rightarrow a-\frac{1}{a}=0 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1 \xrightarrow{a>0} a=+1$

نکته

اگر ضابطه $y=f(x)$ داده شده باشد و مقدار $f^{-1}(a)$ را بخواهند کافی است x را از رابطه $a=f(x)$ بیابیم.

※ مثال ۵۱: اگر $f(x)=\mathrm{Ln}\frac{x+1}{x}$ باشد آنگاه $f^{-1}(2)$ کدام است؟

۱) $\mathrm{Ln}\frac{2}{3}$ ۲) $\mathrm{Ln}\frac{3}{2}$ ۳) e^2-1 ۴) $\frac{1}{e^2-1}$

حل: گزینه ۴ صحیح است.

$2=\mathrm{Ln}\frac{x+1}{x} \Rightarrow \mathrm{Ln}e^2=\mathrm{Ln}\frac{x+1}{x} \Rightarrow e^2=\frac{x+1}{x} \Rightarrow xe^2=x+1 \rightarrow x\left(e^2-1\right)=1 \Rightarrow x=\frac{1}{e^2-1}$

※ مثال ۵۲: اگر $x>1$ $f(x)=x^2-2x+4$ باشد ضابطه $f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) $1+\sqrt{x+3}$ ۲) $1+\sqrt{x-3}$ ۳) $1\pm\sqrt{x-3}$ ۴) $-1+\sqrt{x-3}$

حل: گزینه ۲ صحیح است.

روش اول:

$y=x^2-2x+4=x^2-2x+1+3=(x-1)^2+3 \Rightarrow y-3=(x-1)^2$

$\pm\sqrt{y-3}=x-1 \rightarrow x=1\pm\sqrt{y-3} \rightarrow f^{-1}(x)=1\pm\sqrt{x-3}$

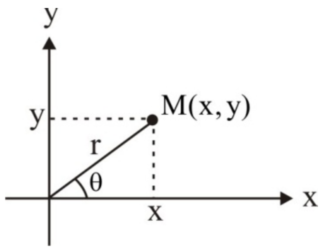
چون $x>1$ پس علامت منفی قابل قبول نیست و ضابطه تابع معکوس $1+\sqrt{x-3}$ است.

روش دوم: (تستی)

اگر در ضابطه داده شده قرار دهیم $x=2$ داریم $f(2)=2^2-2(2)+4=4$ پس $(2,4)\in f$ لذا باید $(4,2)\in f^{-1}$ باشد که در گزینه‌ها فقط گزینه ۲ می‌باشد که اگر به‌جای x مقدار ۴ گذاشته شود حاصل ۲ است.

توابع مثلثاتی

با توجه به شکل نشان داده شده توابع مثلثاتی به صورت زیر تعریف خواهند شد.



$$\sin\theta = \frac{y}{r} \quad , \quad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad , \quad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad , \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

روابط مثلثاتی پر کاربرد و مهم

۱) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

۲) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

۳) $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

۴) $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

۵) $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha \quad \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$

۶) $1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \csc^2\alpha \quad \alpha \neq k\pi$

۷) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

۸) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

۹) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

روابط مجموع و تفاضل دو زاویه

۱) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

۲) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

۳) $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

فرمول‌های تبدیل جمع به ضرب

۱) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

۲) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

۳) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

۴) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

۵) $\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

۶) $\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

۷) $\cot\alpha + \cot\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$

فرمول‌های تبدیل ضرب به جمع

۱) $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$

۲) $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$

۳) $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

روابط مثلثاتی دو برابر زاویه

۱) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ ۲) $\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$ ۳) $\sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

۴) $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ ۵) $\tan\alpha + \cot\alpha = \dfrac{2}{\sin 2\alpha}$ ۶) $\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha$

نکته

واحد زاویه‌ها برحسب رادیان مطرح می‌گردد. اگر یک زاویه برحسب درجه مقدار برابر D و برحسب رادیان مقداری برابر R داشته باشد آنگاه $\dfrac{R}{\pi} = \dfrac{D}{180}$ برای اینکه این رابطه را در ذهن خوب بسپارید کافی است $\pi = 180^\circ$ رادیان را در نظر بگیرید.

نکته

مقدار نسبت‌های مثلثاتی برای زوایای معروف به‌صورت زیر است:

زاویه	0	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	$180^\circ = \pi$	$270^\circ = \frac{3\pi}{2}$	$360^\circ = 2\pi$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف‌نشده	0	تعریف نشده	0
$\cot g\theta$	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده

همچنین می‌توان با استفاده از جدول زیر سایر زوایایی که قابل تبدیل به زوایای جدول فوق هستند را یافت.

زاویه	$\frac{\pi}{2}-\theta$	$\frac{\pi}{2}+\theta$	$\pi-\theta$	$\pi+\theta$	$-\theta$	$2\pi+\theta$	$2\pi-\theta$
sin	$\cos\theta$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$
cos	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$
tan	$\cot g\theta$	$-\cot g\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$	$-\tan\theta$
cotg	$\tan\theta$	$-\tan\theta$	$-\cot g\theta$	$\cot g\theta$	$-\cot g\theta$	$\cot g\theta$	$-\cot g\theta$

*** مثال ۵۳:** حاصل نسبت‌های مثلثاتی زیر را بیابید.

الف) $\cos(120^\circ)$ ب) $\tan(225^\circ)$

حل:

الف)

$$\cos(120^\circ) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$