بسم الله الرحمن الرحیم

مؤسسه آموزش عالی آزاد ماهان با افتخار تقدیم می‌کند

ریاضی عمومی ۲

از سری کتاب‌های کمک آموزشی کارشناسی ارشد

«ویرایش جدید»

دکتر حسن رضاپور

موسسه آموزش عالی آزاد
ماهان
www.mahan.ac.ir

سرشناسه	رضاپور، حسن
عنوان	ریاضی عمومی ۲
مشخصات نشر	تهران، مشاوران صعود ماهان، ۱۴۰۱
مشخصات ظاهری	۳۸۱صفحه رحلی
فروست	سری کتاب‌های کمک آموزشی کارشناسی ارشد
شابک	۹-۵۶۹-۴۵۸-۶۰۰-۹۷۸
وضعیت فهرست‌نویسی	فیپای مختصر
یادداشت	این مدرک در آدرس http://opac.nali.ir قابل دسترسی است
شماره کتاب‌شناسی ملی	۳۹۸۷۵۶۱

ریاضی عمومی ۲

ناشـــر	مشاوران صعود ماهان
مدیر مسئول	هادی سیاری - مجید سیاری
مدیر تولید و برنامه‌ریزی	سمیه بیگی
به قلم	دکتر حسن رضاپور
نوبت و تاریخ چاپ	دوم / ۱۴۰۱
شمارگان	۱۰۰۰ نسخه
قیمت	۴/۲۹۰/۰۰۰ ریال
شابک	۹-۵۶۹-۴۵۸-۶۰۰-۹۷۸

نشانی: تهران، خیابان ولی‌عصر- بالاتر از تقاطع مطهری- جنب بانک ملی پلاک ۲۰۵۰
شماره تماس: ۴-۸۸۱۰۰۱۱۳

«ن والقلم و ما یسطرون»

کلمه نزد خدا بود و خدا آن را با قلم بر ما نازل کرد.

به پاس تشکر از چنین موهبت الهی، موسسه ماهان درصدد برآمده است تا در راستای انتقال دانش و مفاهیم با کمک اساتید مجرب و مجموعه کتب آموزشی خود برای شما داوطلبان ادامه تحصیل در مقطع کارشناسی ارشد، گام موثری بردارد. امید است تلاش‌های خدمتگزاران شما در این موسسه پایه‌گذار گام‌های بلند فردای شما باشد.

مجموعه کتاب‌های کمک آموزشی ماهان به‌منظور استفاده داوطلبان کنکور کارشناسی ارشد سراسری و آزاد تالیف شده‌اند. در این کتاب‌ها سعی کرده‌ایم با بهره‌گیری از تجربه اساتید بزرگ و کتب معتبر داوطلبان را از مطالعه کتاب‌های متعدد در هر درس بی‌نیاز کنیم.

دیگر تالیفات ماهان برای سایر دانشجویان به‌صورت ذیل می‌باشد:

مجموعه کتاب‌های **۸** آزمون: شامل **۵** مرحله کنکور کارشناسی ارشد **۵** سال اخیر به همراه **۳** مرحله آزمون تالیفی ماهان همراه با پاسخ تشریحی می‌باشد که برای آشنایی با نمونه سوالات کنکور طراحی شده است. این مجموعه کتاب‌ها با توجه به تحلیل **۳** ساله اخیر کنکور و بودجه‌بندی مباحث در هریک از دروس، اطلاعات مناسبی جهت برنامه‌ریزی درسی در اختیار دانشجو قرار می‌دهد.

مجموعه کتاب‌های کوچک: شامل کلیه نکات کاربردی در گرایش‌های مختلف کنکور کارشناسی ارشد می‌باشد که برای دانشجویان جهت جمع‌بندی مباحث در **۲** ماهه آخر قبل از کنکور مفید می‌باشد.

بدین‌وسیله از مجموعه اساتید، مولفان و همکاران محترم خانواده بزرگ ماهان که در تولید و به‌روزرسانی تالیفات ماهان نقش موثری داشته‌اند، صمیمانه تقدیر و تشکر می‌نماییم.

دانشجویان عزیز و اساتید محترم می‌توانند هرگونه انتقاد و پیشنهاد درخصوص تالیفات ماهان را از طریق سایت ماهان به آدرس mahan.ac.ir با ما در میان بگذارند.

موسسه آموزش عالی آزاد ماهان

مقدمه مولف

مجموعه پیش رو، حاصل سال‌ها تدریس در مؤسسات و دانشگاه‌های متفاوت است. در این مجموعه سعی شده است مطالب و سرفصل‌های درس ریاضی عمومی (۲)، با تکیه بر حل مثال‌ها و تست‌های کنکورهای کارشناسی ارشد و دکتری رشته‌های متفاوت، به طور کامل پوشش داده شود.

این مجموعه برای داوطلبین رشته‌های کنکورهای ارشد و دکتری فنی مهندسی، علوم پایه و MBA بسیار مناسب می‌باشد. هنگام مطالعه کتاب ،حتماً بطور همزمان از نکات مهم خلاصه‌نویسی کنید و سعی کنید آن‌ها را بطور مداوم مرور نمائید. بر خلاف تصور، درس ریاضی عمومی (۲) از ریاضی عمومی (۱) آسانتر است. پس با تکیه بر این درس، میتوانید تستهای کنکور خود را به راحتی پاسخ دهید.

بر خود لازم میدانم از جناب آقای دکتر سیاری، ریاست محترم مؤسسه ماهان تشکر و سپاسگزاری نمایم.

از پدر فداکار، مادر مهربان و همسر عزیزم به خاطر همه لحظاتی که در کنار من بودند، ممنون و قدردان هستم و این اثر را به آنها تقدیم مینمایم.

در پایان از همه شما دانشجویان عزیز می‌خواهم هر گونه نظر و پیشنهادی که به ذهنتان می‌رسد را به آدرس Hassan.Rezapour@gmail.com ارسال نمائید که در چاپ‌های بعدی، اثری بهتر را ارائه نمائیم.

تقدیم به پدر و مادر مهربانم، همسر عزیزم و البرز پسر نازنینم

دکتر حسن رضاپور

فهرست مطالب

ریاضی عمومی ۲

فصل اول

جبر خطی و هندسه تحلیلی

بخش اول: جبر خطی

تعریف ماتریس و انواع آن

ماتریس آرایشی از اعداد به صورت $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ است. هر یک از اعداد a_{11}، ....، a_{mn} را درایه یا عضو ماتریس می‌نامند.

در حالت کلی ماتریس به صورت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ است. a_{ij} عضوی از ماتریس می‌باشد که در سطر iام و ستون jام قرار گرفته است. m و n نشان دهنده تعداد سطر و ستون‌های ماتریس A است.

ماتریس مربعی: ماتریسی که تعداد سطر و ستون‌های آن برابر است $(m=n)$. در ماتریس مربعی درایه‌های a_{11}، a_{22}، .... و a_{nn} اعضای قطر اصلی و درایه‌های a_{1n}، $a_{2(n-1)}$، .... و a_{m1} اعضای قطر فرعی هستند.

تساوی دو ماتریس: دو ماتریس A و B را مساوی گویند هرگاه هم‌مرتبه باشند و درایه‌های متناظر آنها مساوی باشند.

$$A=B \Leftrightarrow \forall i,j \quad , \quad a_{ij}=b_{ij}$$

ماتریس سطری: ماتریسی است که دارای یک سطر $(m=1)$ و n ستون است.

ماتریس ستونی: ماتریسی است که دارای m سطر و یک ستون $(n=1)$ است.

ماتریس قطری: ماتریس مربعی A را قطری می‌نامند هرگاه درایه‌های طرفین قطر اصلی صفر باشند.

$$\forall (i\neq j) \rightarrow a_{ij}=0$$

ماتریس اسکالر: ماتریس قطری است که تمام درایه‌های قطر اصلی آن مساوی هستند.

ماتریس همانی یا واحد: ماتریس قطری است که درایه‌های قطر اصلی آن برابر یک است و آن را با I نمایش می‌دهند.

$$A\times I=I\times A=A$$

ماتریس بالا مثلثی: ماتریس مربعی که درایه‌های واقع در زیر قطر اصلی همگی صفرند.

$$A=[a_{ij}]_{n\times n} \qquad ; \qquad \forall\, i>j \rightarrow a_{ij}=0$$

ماتریس پایین مثلثی: ماتریس مربعی که درایه‌های واقع در بالای قطر اصلی همگی صفرند.

$$A=[a_{ij}]_{n\times n} \qquad ; \qquad \forall\, i<j \rightarrow a_{ij}=0$$

ضرب ماتریس‌ها

هرگاه $A=[a_{ij}]_{m\times n_1}$ و $B=[b_{ij}]_{n_2\times p}$، ماتریس $A\times B$ زمانی وجود دارد که تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد، به عبارت دیگر $n_1=n_2$. اگر C ضرب ماتریس A و B باشد، داریم $C=[c_{ij}]_{m\times p}$ پس داریم:

$$A_{m\times p}.B_{p\times n}=C_{m\times n}$$

ضمنا درایه C_{ij} از ضرب سطر i ام A در ستون j ام B حاصل می‌شود ؛ یعنی:

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

* **مثال ۱:** هرگاه $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 4 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ باشد، $A\times B$ را به‌دست آورید.

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -2\\ 4 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times2+2\times4+0\times1 & 1(-2)+2\times3+0\times0\\ 3\times2+(-1)\times4+2\times1 & 3(-2)-1\times3+2\times0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 4\\ 4 & -9\end{bmatrix}$$

نکته ۱: هرگاه A یک ماتریس باشد، برای محاسبه ماتریس A^n به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$A^2=A\times A \quad , \quad A^3=A\times A^2 \quad , \quad A^4=A\times A^3 \quad , \quad \dots \quad , \quad A^n=A\times A^{n-1}$$

نکته ۲: اگر A یک ماتریس قطری باشد برای محاسبه ماتریس A^n کافی است درایه‌های قطر اصلی ماتریس A را به توان n برسانیم.

نکته ۳: برای محاسبه سطر iام ماتریس $A\times B$ کافی است سطر iام ماتریس A در کل ماتریس B ضرب شود.

نکته ٤: برای محاسبه ستون j ام ماتریس $A\times B$ کافی است کل ماتریس A در ستون j ام ماتریس B ضرب شود.

نکته ٥: اگر حاصلضرب دو ماتریس صفر شود نمی‌توان نتیجه گرفت که یکی از دو ماتریس برابر صفر است.

نکته ٦: دستور حذف در ماتریس‌ها برقرار نیست ؛ یعنی از $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $B=C$.

$$AB=AC \not\Rightarrow B=C \quad , \quad B=C\Rightarrow AB=AC$$

نکته ۷: ضرب ماتریس‌ها شرکت‌پذیر است ؛ یعنی $(AB).C=A.(BC)$

نکته ۸: ضرب ماتریس‌ها نسبت به عمل جمع از چپ و راست دارای خاصیت پخش است.

$$A.(B+C)=AB+AC \quad , \quad (A+B).C=A.C+B.C$$

نکته ۹: اگر در مورد دو ماتریس A و B داشته باشیم $AB=BA$ آنگاه A و B را تعویض‌پذیر نامند و اتحادهای جبری (مانند دو اتحاد زیر) برای آن‌ها برقرار می‌باشند.

$$1)\ (A+B)^2=A^2+2AB+B^2 \qquad 2)\ (A^2-B^2)=(A-B)(A+B)$$

نکته ۱۰: حاصلضرب دو ماتریس بالا مثلثی یک ماتریس بالا مثلثی است که درایه‌های قطر اصلی آن حاصلضرب درایه‌های متناظر روی دو قطر اصلی ماتریس‌های ضرب شونده است. این نکته برای ماتریس پایین مثلثی نیز برقرار است.

※ مثال ۲: اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ باشد ، ماتریس A^{100} را به دست آورید.

$$A^2=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix} \quad , \quad A^3=AA^2=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ -3 & -2\end{bmatrix}$$

$$A^4=AA^3=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3\\ -3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 4\\ -4 & -3\end{bmatrix}\to A^n=\begin{bmatrix}n+1 & n\\ -n & -n+1\end{bmatrix}\to A^{100}=\begin{bmatrix}101 & 100\\ -100 & -99\end{bmatrix}$$

※ مثال ۳: اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ باشد ، حاصل A^n را به دست آورید.

$$A^2=AA=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^3=AA^2=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 6\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to A^n=\begin{bmatrix}1 & n & \frac{n(n+1)}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

※ مثال ۴: اگر $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 4\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}$ مجموع عضوهای سطر اول از ماتریس A^2 کدام است؟

حل: طبق نکته ۳ عضوهای سطر اول ماتریس A^2 از ضرب سطر اول ماتریس A در کل ماتریس A به‌دست می‌آید.

$$I=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 4\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -1 & -4\end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع}=7-1-4=2$$

※ مثال ۵: اگر $A^2=0$ باشد ، حاصل $A(I-A)^2$ کدام است؟

حل: طبق نکته ۹ اگر A و B تعویض‌پذیر باشند ؛ یعنی $AB=BA$ ، آنگاه تمام اتحادهای جبری در مورد آنها صادق است. چون $AI=IA$ پس:

$$A(I-A)^2=A(I+A^2-2A)=AI+AA^2-2A^2=AI+0-0=A$$

نکته

۱۱: اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$ باشد آنگاه:

اگر n زوج باشد $A^n=\begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & a^n \end{bmatrix}$ و اگر n فرد باشد آنگاه $A^n=\begin{bmatrix} 0 & a^n \\ a^n & 0 \end{bmatrix}$ است.

نکته

۱۲: اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ باشد آنگاه:

اگر n زوج باشد $A^n=\begin{bmatrix} (ab)^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & (ab)^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}$ و اگر n فرد باشد آنگاه $A^n=\begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$ است.

نکته

۱۳: از ضرب ماتریس 2×2 مانند $T=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در نقطه A به مختصات $A=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نقطه A' که تبدیل یافته نقطه A تحت ماتریس T است حاصل می‌شود.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

* **مثال ٦:** تبدیل یافته دایره $x^2+y^2=1$ را تحت ماتریس $T=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ به‌دست آورید.

حل: یک نقطه روی دایره را $A=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و تبدیل یافته آن را $A'=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ می‌نامیم.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\to\begin{cases} 0+3y=x'\to y=\dfrac{x'}{3} \\ -2x+0=y'\to x=-\dfrac{y'}{2} \end{cases}\to x^2+y^2=1\to\left(-\frac{y'}{2}\right)^2+\left(\frac{x'}{3}\right)^2=1$$

معادله $\frac{(x')^2}{9}+\frac{(y')^2}{4}=1$ به دست می‌آید که یک بیضی افقی به مرکز $(0,0)$ و $a=3$ و $b=2$ است.

ماتریس دوران

ماتریسی را که در نقطه A ضرب شود و نقطه A را حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی به زاویه θ دوران دهد تا نقطه A' حاصل شود، با علامت R_θ نشان داده و داریم $R_\theta=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. همچنین $R_{-\theta}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ مشخص است.

۱) $(R_\theta)^n = R_{n\theta}$ یا $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{bmatrix}$

۲) $R_\theta R_\alpha = R_{\theta+\alpha}$

* **مثال ۷:** حاصل $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}^{12}$ را به‌دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{bmatrix}^{12} = \begin{bmatrix}\cos 3\pi & -\sin 3\pi\\ \sin 3\pi & \cos 3\pi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

* **مثال ۸:** حاصل $\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}^{13}$ را به‌دست آورید.

$$\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}^{13} = \begin{bmatrix}2\times\frac{1}{2} & -2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} & 2\times\frac{1}{2}\end{bmatrix}^{13} = \begin{bmatrix}2\cos 60 & -2\sin 60\\ 2\sin 60 & 2\cos 60\end{bmatrix}^{13} = 2^{13}\begin{bmatrix}\cos 60 & -\sin 60\\ \sin 60 & \cos 60\end{bmatrix}$$

$$2^{13}(R_{60})^{13} = 2^{13}((R_{60})^6)^2 R_{60} = 2^{13}R_{60} \to A = 2^{13}\begin{bmatrix}\cos 60 & -\sin 60\\ \sin 60 & \cos 60\end{bmatrix} = 2^{13}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\to A = 2^{12}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$$

ماتریس ترانهاده

هرگاه در ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ جای سطرها و ستون‌ها را عوض کنیم ماتریس به‌وجود آمده را ترانهاده ماتریس A گویند و با A' یا A^T نمایش می‌دهند.

* **خواص:**

۱) $(A')' = A$

۲) $(kA)' = kA'\ ,\ k\in\mathbb{R}$

۳) $(A\pm B)' = A'\pm B'$

۴) $(AB)' = B'A'$

* **مثال ۹:** هرگاه A یک ماتریس 2×2 باشد، کدام ماتریس می‌تواند AA^T باشد؟

۱) $\begin{bmatrix}3 & 2\\ 7 & 3\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}3 & 3\\ 4 & 7\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

حل: گزینه ۱ درست است.

نکات زیر را در مورد AA^T به‌خاطر داشته باشید.

۱) AA^T همواره متقارن است.

۲) $|AA^T| = |A|^2 \geq 0$

۳) روی قطر اصلی AA^T هیچ‌گاه عدد منفی قرار نمی‌گیرد.

چون گزینه‌های ۲و۴ متقارن نیستند پس نمیتوانند پاسخ مساله باشند، ضمناً دترمینان گزینه ۳ منفی است که این برای AA^T امکان پذیر نیست، پس تنها گزینه ممکن ، گزینه اول است.

* **مثال ۱۰:** اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد ، ماتریس A^n را بەدست آورید.

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad , \quad A^۳=AA^۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۶ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\rightarrow A^n=\begin{bmatrix} ۱ & ۲n \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

ماتریس متقارن (هرمیتی)

ماتریس مربعی $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ را متقارن گویند ، هرگاه $\forall i,j \rightarrow a_{ij}=a_{ji}$ ، به‌عبارت دیگر $A=A'$. در ماتریس متقارن هر دو درایه که در طرفین قطر اصلی نسبت به آن به طور متقارن قرار گرفته‌اند ، مساوی هستند. به‌طور مثال ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۳ \\ -۲ & ۰ & -۴ \\ ۳ & -۴ & ۵ \end{bmatrix}$ متقارن است. یعنی در ماتریس متقارن داریم: $a_{ij}=a_{ji}$.

ماتریس پادمتقارن (ضد متقارن)

ماتریس مربعی $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ را پادمتقارن گویند، هرگاه $\forall i,j \rightarrow a_{ij}=-a_{ji}$ ، به‌عبارت دیگر $A=-A'$. در ماتریس پادمتقارن هر دو درایه که در طرفین قطر اصلی نسبت به آن به‌طور متقارن قرار گرفته‌اند قرینه هستند. همچنین درایه‌های قطر اصلی همگی صفر است.

دقت کنید هر ماتریس مربعی را همواره می‌توان به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن نمایش داد.

$$A=\overbrace{\frac{۱}{۲}(A+A')}^{\text{متقارن}}+\overbrace{\frac{۱}{۲}(A-A')}^{\text{پاد متقارن}}$$

نکته ۱۴: هرگاه A ماتریس قطری باشد، آنگاه متقارن است.

نکته ۱۵: اگر A ماتریسی متقارن باشد، آنگاه A^n ، $(n\in\mathbb{N})$ متقارن است.

نکته ۱۶: اگر A ماتریسی پادمتقارن باشد، آنگاه توان‌های زوج A ماتریس متقارن و توان‌های فرد A ماتریس پادمتقارن خواهد بود.

نکته ۱۷: ماتریس مربعی صفر، هم متقارن است هم پاد متقارن.

نکته ۱۸: حاصل جمع و تفاضل چند ماتریس متقارن، ماتریس متقارن بوده و حاصل جمع و تفاضل چند ماتریس پادمتقارن، ماتریس پادمتقارن است.

نکته ۱۹: اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم مرتبه باشند، آنگاه $(AA'-BB')$ و $(AB'+BA')$ ماتریس‌هایی متقارن هستند.

* مثال ۱۱: اگر A ماتریسی $n\times n$ باشد، آنگاه AA'، $A-A'$، $A'A$ و $A+A'$ از نظر متقارن بودن چگونه هستند؟

$(AA')'=(A')'A'=AA' \to$ متقارن

$(A-A')'=A'-(A')'=A'-A=-(A-A') \to$ پادمتقارن

$(A'A)'=A'(A')'=A'A \to$ متقارن

$(A+A')'=A'+(A')'=A'+A=A+A' \to$ متقارن

* مثال ۱۲: اگر A و B دو ماتریس هرمیتی باشند، کدامیک از ترکیب‌های زیر هرمیتی هستند؟

۱) $A^۲B^۲$ ۲) $AB-BA$ ۳) AB ۴) $AB+BA$

حل: گزینه ۴ صحیح است.

A و B هرمیتی هستند ، بنابراین $A'=A$ و $B'=B$

$(AB+BA)'=(AB)'+(BA)'=B'A'+A'B'=BA+AB=AB+BA$

دترمینان

دترمینان هر ماتریس مربعی مانند A را با نماد $|A|$ یا $\det(A)$ نمایش می‌دهند.

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \det(A)=ad-bc$$

دترمینان کهاد یا مینور (Minor)

در هر ماتریس مربعی $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ برای هر عضو آن مانند a_{ij} یک دترمینان تعریف می‌کنیم که آن را دترمینان کهاد یا مینور عنصر سطر iام و ستون jام نامیده و با M_{ij} نمایش می‌دهیم و مقدار آن از دترمینانی که از حذف سطر iام و ستون jام به‌دست آمده، محاسبه می‌شود.

همسازه (kofactor)

در هر ماتریس مربعی مانند $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ همسازه هر عنصر مانند a_{ij} را با نماد Δ_{ij} نمایش می‌دهیم و $\Delta_{ij}=(-۱)^{i+j}M_{ij}$. اگر برای تمام درایه‌های ماتریس A همسازه متناظرشان نوشته شود، ماتریس همسازه به‌وجود می‌آید. $N=[\Delta_{ij}]$

دترمینان ماتریس مربعی مرتبه n

دترمینان هر ماتریس مربعی مساوی با مجموع حاصل ضرب عناصر یک سطر یا یک ستون دلخواه در همسازه متناظرشان است.

توجه: برای محاسبه یک دترمینان بهتر است آن را حول سطر یا ستونی بسط دهیم که تعداد عضوهای صفر آن بیشتر باشد.

بسط نسبت به سطر i ام:

$$\det(A)=\sum_{j=۱}^{n}(-۱)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$$

بسط نسبت به ستون j ام:

$$\det(A)=\sum_{i=۱}^{n}(-۱)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$$

نکته ۲۰: $|A|=|A'|$ و $|AB|=|A||B|$ و $|A^n|=|A|^n$

نکته ۲۱: از تعویض دو سطر یا دو ستون یک ماتریس مربع با هم، تنها علامت دترمینان تغییر می‌کند.

نکته ۲۲: هرگاه دو سطر یا دو ستون یک ماتریس مساوی باشند، دترمینان ماتریس صفر است. اگر در یک ماتریس، سطری مضرب سطر دیگر و یا ستونی مضرب ستون دیگر باشد حاصل دترمینان صفر است.

نکته ۲۳: وجود سطر تمام صفر و یا ستون تمام صفر باعث صفر شدن دترمینان ماتریس می‌شود.

نکته ۲۴: اعمال سطری ـ ستونی مقدماتی: هرگاه به سطر (یا ستون) یک ماتریس، مضاربی از سطرهای دیگر (یا ستون‌های دیگر) اضافه و یا کم شود حاصل دترمینان تغییر نمی‌کند.

نکته ۲۵: هرگاه تمام درایه‌های یک ماتریس $n\times n$ در عددی مانند k ضرب شود، دترمینان ماتریس در k^n ضرب می‌شود ؛ یعنی $|kA|=k^n|A|$.

نکته ۲۶: دترمینان ماتریس‌های قطری، بالا مثلثی و پایین مثلثی برابر حاصلضرب عناصر قطر اصلی است.

نکته ۲۷: اگر A ماتریس $m\times n$ و B ماتریس $n\times m$ بوده و $m>n$، در این صورت $C=AB$ ماتریس $m\times m$ است و $|C|=|AB|=۰$

نکته ۲۸: دترمینان ماتریس پادمتقارن از مرتبه فرد همواره صفر است.

نکته ۲۹: اگر A ماتریس $n\times n$ باشد ، به‌طوریکه تمام عناصر روی قطر اصلی آن برابر x و بقیه درایه‌های آن برابر y باشد دترمینان ماتریس برابر $(x+y(n-۱))(x-y)^{n-۱}$ است.

نکته ۳۰: دستور ساروس برای محاسبه دترمینان‌های ۳×۳:

برای این منظور دو ستون اول ماتریس را کنار آن نوشته و به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \rightarrow \det(A)=\left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right| = (aei+bfg+cdh)-(bdi+afh+ceg)$$

* **مثال ۱۳:** حاصل دترمینان $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۲ & -۲ \end{bmatrix}$ را بیابید.

حل:

روش اول: اگر بخواهیم دترمینان را با روش بسط نسبت به سطر (ستون) بیابیم بهتر است سطر یا ستونی انتخاب شود که تعداد صفرهای آن بیشتر است. دترمینان را با بسط نسبت به سطر سوم می‌یابیم.

$$|A|=(-۱)^{۳+۱}(۰)\begin{vmatrix} ۲ & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix}+(-۱)^{۳+۲}(۲)\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}+(-۱)^{۳+۳}(-۲)\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix}=(-۲)(۱)+(-۲)(۱)=-۴$$

روش دوم: روش ساروس:

$$\begin{array}{ccc:cc} ۱ & ۲ & ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۱ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۲ & -۲ & ۰ & ۲ \end{array} \Rightarrow |A| = (۱\times۳\times(-۲)+(۲\times۱\times۰)+(۰\times۱\times۲)) - ((۲\times۱\times(-۲))+(۱\times۱\times۲)+(۰\times۳\times۰)) = -۶+۲=-۴$$

نکته

۳۱: اگر A ماتریس شبه مثلثی باشد، یعنی تمام درایه‌های بالا یا پایین قطر فرعی آن صفر باشند، دترمینان A از حاصلضرب درایه‌های روی قطر فرعی آن به‌دست آمده که علامت عدد حاصل از رابطه $(-۱)^{\frac{n(n-۱)}{۲}}$ محاسبه می‌شود.

نکته

۳۲: معادله خط راستی که از دو نقطه $A(a,b)$ و $B(c,d)$ عبور می‌کند، برابر است با:

$$\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ a & b & ۱ \\ c & d & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

نکته

۳۳: مساحت مثلث ABC که در آن $A(x_۱,y_۱)$، $B(x_۲,y_۲)$ و $C(x_۳,y_۳)$ رأس‌های مثلث باشند، برابر است با:

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} x_۱ & y_۱ & ۱ \\ x_۲ & y_۲ & ۱ \\ x_۳ & y_۳ & ۱ \end{vmatrix}$$

نکته

۳۴: دترمینان واندرموند: اگر در یک ماتریس مربعی از مرتبه n، درایه‌های سطر یا ستون اول همگی از توان $(n-۱)$ و درایه‌های سطر یا ستون دوم همگی از توان $(n-۲)$ و ... و درایه‌های سطر یا ستون آخر همگی یک باشند آنگاه برای محاسبه دترمینان کافی است سطر یا ستونی را که درایه‌های آن از توان یک هستند انتخاب کرده و هر درایه را منهای تمام درایه‌های بعدی کرده و حاصل‌ها را در هم ضرب کنیم.

$$\begin{vmatrix} a^۳ & b^۳ & c^۳ & d^۳ \\ a^۲ & b^۲ & c^۲ & d^۲ \\ a & b & c & d \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

$$\begin{vmatrix} a^۲ & a & ۱ \\ b^۲ & b & ۱ \\ c^۲ & c & ۱ \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c)$$

ماتریس متعامد: ماتریس A را متعامد گوییم هرگاه $A' = A^{-۱}$ باشد. شرایط ماتریس متعامد به‌صورت زیر است:

۱) $|A|=+۱$ یا $|A|=-۱$

۲) اندازه مؤلفه‌های تمام سطرها و ستون‌ها برابر یک باشد. به‌طور مثال برای یک ماتریس ۳×۳ باید داشته باشیم:

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \; ; \; \sqrt{a^2+b^2+c^2}=1 \; , \; \sqrt{d^2+e^2+f^2}=1 \; , \; \sqrt{g^2+h^2+i^2}=1$$

$$\sqrt{a^2+d^2+g^2}=1 \; , \; \sqrt{b^2+e^2+h^2}=1 \; , \; \sqrt{c^2+f^2+i^2}=1$$

۳) ضرب داخلی دو به دوی سطرها (ستون‌ها) برابر صفر شود. به طور مثال باید $a.d+b.e+c.f=0$ و $a.g+b.h+c.i=0$ و ...

*** مثال ۱۴:** اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$، در این صورت $|BA|$ چقدر است؟

حل: طبق نکته ۲۷ چون $B_{4\times3}$ و $A_{3\times4}$، بنابراین $|BA|=0$.

*** مثال ۱۵:** اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 2 & 4 \\ \cos\alpha & 0 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، $\det(A)$ را به‌دست آورید.

حل: طبق نکته ۳۱ داریم:

$$\det(A)=(-1)^{\frac{3\times2}{2}}\times\sin\alpha\times2\times\cos\alpha=-2\sin\alpha\cos\alpha=-\sin2\alpha$$

*** مثال ۱۶:** اگر $A=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، $\det(A)$ را به‌دست آورید.

حل: طبق نکته ۲۹ داریم $n=5$، $x=5$ و $y=2$، بنابراین:

$$\det(A)=(5+4\times2)(5-2)^4=13\times3^4=1053$$

*** مثال ۱۷:** حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & a & 2a^2-1 \\ 1 & b & 2b^2-1 \\ 1 & c & 2c^2-1 \end{vmatrix}$ را به‌دست آورید.

حل: اگر C_1 و C_3 ستون اول و سوم باشند با $C_1+C_3\to C_3$ داریم:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 2a^2 \\ 1 & b & 2b^2 \\ 1 & c & 2c^2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$$

دترمینان به‌دست آمده واندرموند است ، پس:

$$\det(A)=-2(a-b)(a-c)(b-c)=2(a-b)(a-c)(c-b)$$

* **مثال ۱۸:** اگر A یک ماتریس پایین مثلثی و 4×4 بوده و روی قطر اصلی آن اعداد طبیعی و متمایز باشد و داشته باشیم $|A|=24$ در این صورت $|A+I|$ چقدر است؟

حل: چون ماتریس پایین مثلثی است دترمینان آن برابر حاصلضرب اعداد روی قطر اصلی است. اعداد روی قطر اصلی عبارتند از ۴، ۳، ۲، ۱. در ماتریس $[A+I]$ درایه‌های روی قطر اصلی عبارتند از ۵، ۴، ۳، ۲ و چون $A+I$ پایین مثلثی است پس:

$|A+I|=2\times 3\times 4\times 5=120$.

* **مثال ۱۹:** معکوس ماتریس $A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

حل: با بسط برحسب سطر سوم دترمینان برابر ۱ می‌شود. اندازه تمام سطرها و ستون‌ها برابر یک بوده و ضرب داخلی دوبه دوی سطرها (ستون‌ها) صفر است ، پس ماتریس متعامد است و داریم $A^{-1}=A'$:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

* **مثال ۲۰:** اگر $A=\begin{bmatrix}2\cos\theta & 1 & 0\\ 1 & 2\cos\theta & 1\\ 0 & 1 & 2\cos\theta\end{bmatrix}$ باشد، $\det A$ را به‌دست آورید.

حل: با بسط برحسب سطر اول داریم:

$$\det A=2\cos\theta\begin{vmatrix}2\cos\theta & 1\\ 1 & 2\cos\theta\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\cos\theta\end{vmatrix}=2\cos\theta(4\cos^2\theta-1)-2\cos\theta$$

$$\det A=2\cos\theta(4\cos^2\theta-2)=4\cos\theta(2\cos^2\theta-1)=4\cos\theta\cos 2\theta$$

$$\det A=\frac{4\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta}{\sin\theta}=\frac{2\sin 2\theta\cos 2\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin 4\theta}{\sin\theta}$$

* **مثال ۲۱:** اگر $A=\begin{bmatrix}1+a^2 & -a & 0\\ a & 1+a^2 & a\\ 0 & a & 1+a^2\end{bmatrix}$ باشد، $\det A$ را به‌دست آورید.

$$R_1+R_3\to R_3\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1+a^2 & -a & 0\\ a & 1+a^2 & a\\ 1+a^2 & 0 & 1+a^2\end{bmatrix}\xrightarrow{C_1-C_3\to C_1}\begin{bmatrix}1+a^2 & -a & 0\\ 0 & 1+a^2 & a\\ 0 & 0 & 1+a^2\end{bmatrix}$$

ماتریس بالا مثلثی است و $\det A=(1+a^2)^3$.

※ **مثال ۲۲:** اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۴ & ۰ & ۰ \\ ۵ & ۳ & ۴ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، $\det A$ را به‌دست آورید.

حل: با بسط برحسب سطر اول داریم:

$$\det A = ۱\times\begin{vmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۴ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۰ \end{vmatrix} - ۲\times\begin{vmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۵ & ۴ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۰ \end{vmatrix} = ۱\times ۴\times\begin{vmatrix} ۴ & ۱ \\ ۳ & ۰ \end{vmatrix} - ۲\times ۳\times\begin{vmatrix} ۴ & ۱ \\ ۳ & ۰ \end{vmatrix} = -۱۲+۱۸=۶$$

※ **مثال ۲۳:** اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۳ & -۱ & ۴ \end{bmatrix}$ حاصل $|AA^T|$ را به‌دست آورید.

$$AA^T=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۳ & -۱ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & -۱ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۱ \\ ۱ & ۲۶ \end{bmatrix}\to \det A = ۵\times ۲۶-۱=۱۲۹$$

※ **مثال ۲٤:** اگر A و B دو ماتریس ۳×۳ باشند و $|A|=۲$ و $|B|=۴$ حاصل $|A^۳B^۲A^{-۱}|$ را به‌دست آورید.

حل: در ادامه اشاره خواهد شد که $\left|A^{-۱}\right|=\dfrac{۱}{|A|}$ پس ؛

$$|A^۳B^۲A^{-۱}|=|A^۳||B^۲||A^{-۱}|=|A|^۳\times|B|^۲\times\frac{۱}{|A|}=۲^۳\times ۴^۲\times\frac{۱}{۲}=۶۴$$

※ **مثال ۲۵:** اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ فرض شود، $\det A$ را به‌دست آورید.

حل: ستون دوم را با ستون اول جمع کرده و حاصل را در ستون اول قرار می‌دهیم. با این عمل ماتریس بالا مثلثی می‌شود و $\det A=(۵)(۱)(۵)(۱)(۳)=۷۵$.

※ **مثال ۲٦:** اگر $A=\begin{bmatrix} ۴x & ۳x & ۲x & x \\ ۵x & \sin x & \cos x & ۴ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۵ & \cos x & -\sin x & ۰ \end{bmatrix}$ ، حاصل $\dfrac{d}{dx}(\det A)$ را به‌دست آورید.

حل: سطر اول x برابر سطر سوم می‌باشد بنابراین دترمینان صفر بوده و مشتق خواسته شده برابر صفر است.

※ **مثال ۲۷:** اگر $A=\begin{bmatrix} a & b+c & ۱ \\ b & a+c & ۱ \\ c & a+b & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، $\det A$ را به‌دست آورید.

$$C_۲+C_۱\to C_۱\to A=\begin{bmatrix} a+b+c & b+c & ۱ \\ a+b+c & a+c & ۱ \\ a+b+c & a+b & ۱ \end{bmatrix}=(a+b+c)\begin{bmatrix} ۱ & b+c & ۱ \\ ۱ & a+c & ۱ \\ ۱ & a+b & ۱ \end{bmatrix}\to \det A=۰$$

ریاضی عمومی ۲

* **مثال ۲۸:** اگر $x+y+z=0$ و $A=\begin{bmatrix} a+x & y & z \\ x & a+y & z \\ x & y & a+z \end{bmatrix}$ باشد، $\det A$ را به‌دست آورید.

$$C_1+C_2+C_3 \to C_1 \to A=\begin{bmatrix} a+x+y+z & y & z \\ a+x+y+z & a+y & z \\ a+x+y+z & y & a+z \end{bmatrix} \xrightarrow{x+y+z=0} A=\begin{bmatrix} a & y & z \\ a & a+y & z \\ a & y & a+z \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3-R_1\to R_3]{R_2-R_1\to R_2} A=\begin{bmatrix} a & y & z \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = a^3$$

ماتریس معکوس

اگر برای ماتریس مربعی A ماتریس مربعی B وجود داشته باشد ، طوریکه $AB=BA=I$، آنگاه A را وارون‌پذیر نامیده و B را وارون یا معکوس A گویند.

> **نکته ۳۵:** شرط لازم و کافی برای آنکه ماتریس مربعی A معکوس‌پذیر باشد آن است که $|A|\neq 0$ باشد.

* **مثال ۲۹ :** به ازای کدام مقدار C ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -c \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2c & -4 \end{bmatrix}$ معکوس‌پذیر است؟ *(کارشناسی ارشد سراسری – مهندسی نفت)*

۱) $C\neq 2,3$ ۲) $C\neq -2,5$ ۳) $C\neq 1,3$ ۴) $C\neq -2,4,1$

حل: گزینه ۱ صحیح است.

$$A \text{ معکوس‌پذیر است} \Leftrightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow |A| \xlongequal[\text{به سطر اول}]{\text{بسط نسبت}} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2c & 4 \end{vmatrix} + (-c)\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2c \end{vmatrix} = (-12-2c)+2c^2 \neq 0 \Rightarrow c\neq -2,3$$

> **نکته ۳۶:** اگر دترمینان ماتریس مخالف صفر باشد ، ماتریس را غیرمنفرد یا ناتکین می‌گویند.

> **نکته ۳۷:** $A^{-1}A=AA^{-1}=I$

خواص ماتریس معکوس

۱) $(A^{-1})^{-1}=A$

۲) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

۳) $(A')^{-1}=(A^{-1})'$

۴) $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$

۵) $(KA)^{-1}=\frac{1}{K}A^{-1} \quad , \quad k\in\mathbb{R}$

۶) $\det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}$

اثبات مورد ۶:
$$AA^{-۱}=I\to|AA^{-۱}|=|I|\to|A||A^{-۱}|=۱\to|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}$$

ماتریس الحاقی :

اگر ماتریس همسازه را با N نمایش دهیم ترانهاده ماتریس همسازه ماتریس الحاقی است و به‌صورت $N'=\operatorname{adj}(A)=A^*$ نمایش می‌دهند. عناصر ماتریس همساز، N از رابطه روبه‌رو به‌دست می‌آیند: $N_{ij}=(-۱)^{i+j}M_{ij}$

نکته

۳۸: ماتریس معکوس از رابطه $A^{-۱}=\frac{N'}{|A|}$ به‌دست می‌آید.

نکته

۳۹: معکوس ماتریس ۲×۲ به‌صورت زیر است:
$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\to A^{-۱}=\frac{۱}{\det(A)}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

مثال ۳۰: اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۲\\ ۰ & ۱ & ۳\\ -۱ & ۲ & ۱\end{bmatrix}$، ماتریس $A^{-۱}$ را بیابید.

$$|A|\xlongequal[\text{ستون سوم}]{\text{بسط نسبت به}}۲\begin{vmatrix}۳ & ۱\\ ۱ & ۲\end{vmatrix}-۱\begin{vmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۱\end{vmatrix}=۱۰+۱=۱۱$$

$$N_{۱۱}=(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix}۱ & ۰\\ ۲ & -۱\end{vmatrix}=-۱,\ N_{۱۲}=(-۱)^{۱+۲}\begin{vmatrix}۳ & ۰\\ ۱ & -۱\end{vmatrix}=۳,\ N_{۱۳}=(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix}۳ & ۱\\ ۱ & ۲\end{vmatrix}=۵$$

$$N_{۲۱}=(-۱)^{۲+۱}\begin{vmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & -۱\end{vmatrix}=۵,\ N_{۲۲}=(-۱)^{۲+۲}\begin{vmatrix}۲ & ۲\\ ۱ & -۱\end{vmatrix}=-۴,\ N_{۲۳}=(-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & ۲\end{vmatrix}=۳$$

$$N_{۳۱}=-۲,\ N_{۳۲}=-۶,\ N_{۳۳}=-۱$$

پس $|A|=۱۱$ و $N=\begin{bmatrix}۵ & ۳ & -۱\\ ۳ & -۴ & ۵\\ -۱ & -۶ & -۲\end{bmatrix}$ و در نتیجه داریم:

$$N'=\begin{bmatrix}-۱ & ۵ & -۲\\ ۳ & -۴ & -۶\\ ۵ & ۳ & -۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}N'=\frac{۱}{۱۱}\begin{bmatrix}-۱ & ۵ & -۲\\ ۳ & -۴ & -۶\\ ۵ & ۳ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۱۱} & \frac{۵}{۱۱} & -\frac{۲}{۱۱}\\ \frac{۳}{۱۱} & \frac{-۴}{۱۱} & \frac{-۶}{۱۱}\\ \frac{۵}{۱۱} & \frac{۳}{۱۱} & \frac{-۱}{۱۱}\end{bmatrix}$$

نکته

۴۰: اگر $A_{n\times n}$ یک ماتریس مربعی باشد، آن گاه:

۱- $\det(\operatorname{adj}A)=(\det A)^{n-۱}$

۲- $(AB)^T=B^TA^T$

اثبات: اگر فرض کنیم $|A|=k$ ، داریم $|A^{-1}|=\frac{1}{k}$.

$$A^{-1}=\frac{N'}{|A|}=\frac{adj(A)}{|A|}\to A^{-1}=\frac{N'}{k}\to kA^{-1}=N'\to |kA^{-1}|=|N'|$$

$$\to |N'|=k^n|A^{-1}|=k^n\times\frac{1}{k}=k^{n-1}\Rightarrow \det(adjA)=(\det A)^{n-1}$$

نکته ۴۱: اگر A یک ماتریس $n\times n$ باشد ، داریم:

$$\det(adj(adj(A)))=|A|^{(n-1)^2}$$

نکته ۴۲: اگر A ماتریسی وارون‌پذیر باشد ، آنگاه:

$$(A^*)^*=|A|^{n-2}A\quad;\quad (kA)^*=k^{n-1}A^*\qquad k\in\mathbb{R}$$

نکته ۴۳: اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه n و B ماتریس وارون‌پذیر و هم مرتبه با ماتریس A باشد ، آنگاه:

$$(B^{-1}AB)^n=B^{-1}A^nB$$

نکته ۴۴: اگر I ماتریس همانی (واحد) و A ماتریس $n\times n$ باشد ، داریم $A.adj(A)=|A|I$.

نکته ۴۵: اگر A، B و $A+B$ ماتریس‌هایی وارون‌پذیر باشد ، آنگاه ماتریس $A^{-1}+B^{-1}$ نیز وارون‌پذیر است.

*** مثال ۳۱:** اگر $A=\begin{bmatrix}-1&1&2\\1&2&0\\2&1&1\end{bmatrix}$ ، مجموع عناصر ماتریس $A.adj(A)$ را به‌دست آورید.

حل: طبق نکته ۴۴ داریم:

$$A.adj(A)=I|A|\quad,\quad |A|=9\to A.adj(A)=9\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{bmatrix}$$

پس مجموع عناصر ماتریس ۲۷ است.

*** مثال ۳۲:** اگر $A=\begin{bmatrix}2&1&2\\0&1&3\\-1&2&1\end{bmatrix}$ باشد ، حاصل $\det(adj(adj(A)))$ چقدر است؟

حل: طبق نکته ۴۰ داریم:

$$|A|=(-2+12)-(-3+2)=11\to \text{دترمینان}=(11)^{(n-1)^2}=11^4$$

*** مثال ۳۳:** از رابطه $3A^{300}-4A^{400}-5I=0$ ، وارون A را به‌دست آورید.

حل:

$$3A^{300}-4A^{400}=5I \Rightarrow \frac{3}{5}A^{300}-\frac{4}{5}A^{400}=I \Rightarrow A(\frac{3}{5}A^{299}-\frac{4}{5}A^{399})=I \quad ,$$

$$AA^{-1}=I \Rightarrow A^{-1}=\frac{3}{5}A^{299}-\frac{4}{5}A^{399}$$

※ **مثال ۳۴:** اگر A یک ماتریس 3×3 و وارون‌پذیر باشد که در رابطه $2A^{2}-A^{-1}=0$ صدق می‌کند، حاصل $\det A$ را به‌دست آورید.

حل:

$$2A^{2}-A^{-1}=0 \xrightarrow{\times A} 2A^{3}-AA^{-1}=0 \to 2A^{3}=I \to A^{3}=\frac{1}{2}I \to |A|^{3}=(\frac{1}{2})^{3}|I|=\frac{1}{8}\times 1=\frac{1}{8} \to |A|=\frac{1}{2}$$

نکته ٤٦: اگر هدف محاسبه عنصر سطر i ام ستون j ام در معکوس A (یعنی a_{ij}^{-1}) باشد، داریم:

$$a_{ij}^{-1}=\frac{1}{|A|}N_{ji}$$

※ **مثال ۳۵:** عنصر سطر دوم ستون سوم در معکوس ماتریس $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $-\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{2}{9}$ ۴) $-\frac{2}{9}$

حل: گزینه ۴ صحیح است.

$$|A|=9\ ,\ N_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-2 \Rightarrow a_{23}^{-1}=\frac{1}{|A|}N_{32}=-\frac{2}{9}$$

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

در ماتریس مربعی $n\times n$ اگر بتوان λ را طوری تعیین کرد که $AX=\lambda X$، آنگاه λ را مقدار ویژه و X را بردار ویژه متناظر با آن مقدار ویژه می‌نامند. X یک بردار $n\times 1$ و λ یک عدد است.

ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. تشکیل $AX=\lambda X$ به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}ax_1+bx_2=\lambda x_1\\ cx_1+dx_2=\lambda x_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(a-\lambda)x_1+x_2=0\\ cx_1+(d-\lambda)x_2=0\end{cases}$$

این معادلات دارای جواب بدیهی $x_1=x_2=0$ است. اگر معادلات در شکل ماتریسی نوشته شوند، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix}a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow (A-\lambda I)X=0$$

مقادیری برای λ وجود دارد که $\det(A-\lambda I)=0$ می‌شود و دستگاه دیگر دارای جواب بدیهی $x_1=x_2=0$ نخواهد بود. این مقدارهای λ را مقادیر ویژه می‌نامند.

نکته ٤٧: برای محاسبه مقادیر ویژه ماتریس A باید معادله $\det(A-\lambda I)=0$ حل شود.

نکته

۴۸: ماتریس مربعی مرتبه n دارای n مقدار ویژه است که لزوماً متمایز نیستند.

نکته

۴۹: در ماتریس مربعی $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ مقادیر ویژه از حل معادله $\lambda^{2}-(a+d)\lambda+ad-bc=0$ به‌دست می‌آیند.

نکته

۵۰: برای محاسبه بردار ویژه (X) متناظر با مقدار ویژه λ باید معادله $(A-\lambda I)X=0$ حل شود.

* مثال ۳۶: امتداد ویژه نظیر کوچکترین مقدار ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ موازی کدام بردار است؟ *(کارشناسی ارشد ـ سراسری MBA)*

۱) $(-1,0,1)$ ۲) $(0,1,-1)$ ۳) $(1,-1,0)$ ۴) $(1,1,0)$

حل: گزینه ۳ صحیح است.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)=0 \to \lambda=1,2,3$$

حال بردار ویژه متناظر با $\lambda=1$ را می‌یابیم.

$$(A-I)(V)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{V=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

پس $x+y=0$ ، یعنی $x=-y$ و تنها گزینه‌ای که در آن $x=-y, z=0$ می‌باشد گزینه ۳ است.

نکته

۵۱: مقادیر ویژه ماتریس A با مقادیر ویژه ماتریس ترانهاده (A') برابر است.

نکته

۵۲: اگر λ یک مقدار ویژه ماتریس A باشد ، آنگاه $m\lambda$ یک مقدار ویژه ماتریس mA است.

نکته

۵۳: اگر λ یک مقدار ویژه ماتریس A باشد ، آنگاه λ^{n} یک مقدار ویژه ماتریس A^{n} است.

نکته

۵۴: اگر λ یک مقدار ویژه ماتریس A باشد ، آنگاه $\frac{1}{\lambda}$ یک مقدار ویژه ماتریس A^{-1} است.

نکته

۵۵: مقادیر ویژه هر ماتریس قطری، بالامثلثی و پایین مثلثی درایه‌های موجود روی قطر اصلی است.

نکته ۵۶: مقادیر ویژه‌ی دو ماتریس AB و BA یکسان بوده اما بردارهای ویژه آنها متفاوت است.

نکته ۵۷: بردارهای ویژه یک ماتریس متقارن بر هم عمود هستند.

نکته ۵۸: اگر λ مقدار ویژه ماتریس A باشد و $f(x)$ یک چندجمله‌ای در نظر گرفته شود ، مقدار ویژه $f(A)$ برابر $f(\lambda)$ است.

※ **مثال ۳۷:** مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix}۴ & ۱\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

$$\det(A-\lambda I)=۰ \Rightarrow \begin{vmatrix}۴-\lambda & ۱\\ -۲ & ۱-\lambda\end{vmatrix}=۰ \Rightarrow \lambda^{۲}-۵\lambda+۶=۰ \Rightarrow \lambda=۲,\lambda=۳$$

بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda=۲$

$$(A-\lambda I)X=۰ \Rightarrow (A-۲I)X=۰ \Rightarrow \begin{bmatrix}۲ & ۱\\ -۲ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\ x_۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\ ۰\end{bmatrix} \Rightarrow ۲x_۱+x_۲=۰$$

اگر $x_۱$ را به عنوان پایه انتخاب کنیم داریم $X=\begin{bmatrix}x_۱\\ -۲x_۱\end{bmatrix}$ و $x_۱\in\mathbb{R}-\{۰\}$.

بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda=۳$

$$(A-\lambda I)X=۰ \Rightarrow (A-۳I)X=۰ \Rightarrow \begin{bmatrix}۱ & ۱\\ -۲ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\ x_۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\ ۰\end{bmatrix} \Rightarrow x_۱+x_۲=۰$$

اگر $x_۱$ را به عنوان پایه انتخاب کنیم داریم $X=\begin{bmatrix}x_۱\\ -x_۱\end{bmatrix}$ و $x_۱\in\mathbb{R}-\{۰\}$

※ **مثال ۳۸:** اگر $\lambda=۳$ یک مقدار ویژه ماتریس A باشد، آنگاه یک مقدار ویژه ماتریس $A^{۳}-A^{۲}-۷I$ کدام است؟

$$f(x)=x^{۳}-x^{۲}-۷ \Rightarrow \text{مقدار ویژه}=(۳)^{۳}-(۳)^{۲}-۷=۲۷-۹-۷=۱۱$$

※ **مثال ۳۹:** اگر یک مقدار ویژه ماتریس A برابر ۲ باشد، کدام‌یک از موارد زیر یک مقدار ویژه ماتریس $۳A^{۲}-۵A+۴I$ است؟

۱) ۶   ۲) ۴   ۳) ۲-   ۴) ۱

حل: گزینه ۱ صحیح است.

$$f(x)=۳x^{۲}-۵x+۴ \Rightarrow f(۲)=۱۲-۱۰+۴=۶$$

اثر ماتریس (trace)

اثر ماتریس A، $tr(A)$، مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس A است، یعنی:

$$tr(A)=\sum_i a_{ii}$$

نکته

۵۹: اثر ماتریس برابر مجموع مقادیر ویژه ماتریس A نیز است. به عبارت دیگر داریم:

$$tr(A)=\sum_{i} a_{ii}=\sum_{j} \lambda_j$$

به طور مثال فرض کنید A یک ماتریس ۳×۳ باشد. این ماتریس دارای سه مقدار ویژه $\lambda_۱$، $\lambda_۲$ و $\lambda_۳$ است. همچنین عناصر قطر اصلی آن $a_{۱۱}$، $a_{۲۲}$ و $a_{۳۳}$ هستند. طبق این نکته باید $\lambda_۱+\lambda_۲+\lambda_۳=a_{۱۱}+a_{۲۲}+a_{۳۳}$.

نکته

۶۰: رابطه دترمینان ماتریس و مقادیر ویژه: دترمینان یک ماتریس با حاصلضرب مقادیر ویژه آن ماتریس برابر است؛ یعنی $\det(A)=\prod_{j}\lambda_j$.
برای مثال اگر $\lambda_۱$، $\lambda_۲$ و $\lambda_۳$ مقادیر ویژه یک ماتریس ۳×۳ باشد آنگاه: $\det(A)=\lambda_۱\lambda_۲\lambda_۳$

نکته

۶۱: برای ماتریس ۳×۳ رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{۱}{۲}\left[(trA)^۲-(tr(A^۲))\right]=\lambda_۱\lambda_۲+\lambda_۱\lambda_۳+\lambda_۲\lambda_۳$$

نکته

۶۲: اگر حداقل یکی از مقادیر ویژه ماتریسی صفر باشد، چون دترمینان، حاصلضرب مقادیر ویژه است، دترمینان نیز صفر شده و ماتریس معکوس‌پذیر نخواهد بود.

نکته

۶۳: اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم مرتبه باشند همواره داریم:

$$\det(AB)=\det(BA)\quad,\quad tr(AB)=tr(BA)$$

* **مثال ۴۰:** اگر A ماتریسی ۳×۳ معکوس‌پذیر با مقادیر ویژه ۲، ۳ و ۴ باشد، در این صورت $(trA)^۲-(trA^۲)$ برابر چه مقداری است؟

$$(trA)^۲-(trA^۲)=۲(۴\times۳+۴\times۲+۳\times۲)=۵۲$$

* **مثال ۴۱:** اگر $A=\begin{bmatrix}۱&-۱&۲\\۲&۱&۳\\۱&۲&۱\end{bmatrix}$ باشد، $tr(A.adjA)$ کدام است؟

حل: می‌دانیم $A.adjA=|A|I$ پس:

$$\det A=(۱-۳+۸)-(-۲+۶+۲)=۰ \Rightarrow A.adjA=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix} \Rightarrow tr(A.adjA)=۰$$

* **مثال ۴۲:** اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۱&\dots&۱\\۲&۲&\dots&۲\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\n&n&\dots&n\end{bmatrix}$ باشد، $tr(AA')$ را به‌دست آورید.

حل: در واقع باید مجموع درایه‌های قطر اصلی AA' را به‌دست آوریم. چون در A' جای سطر و ستون A عوض شده است ، مولفه واقع در قطر اصلی A' با مولفه واقع در قطر اصلی A برابر است. ($A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۲ \\ ۳ & ۳ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow A'=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$)

برای به‌دست آوردن درایه (i,i)ام ماتریس AA' باید سطر iام A را درستون iام A' ضرب کنیم ، پس حاصل برابر $(i,i,...).(i,i,...)=ni^۲$ است؛ بنابراین:

$$tr(AA')=\sum_{i=۱}^{n} ni^۲ = n\sum_{i=۱}^{n} i^۲ = n\times\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}=\frac{n^۲(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

نکته ٦٤: اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم مرتبه باشند ، همواره داریم $|AB|=|BA|$ و $tr(AB)=tr(BA)$.

* **مثال ٤٣:** اگر $AB=\begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۴ & -۵ \end{bmatrix}$ باشد، دراین صورت BA کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -۱ & ۷ \\ ۶ & ۷ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱۱ & ۲ \\ ۸ & -۳ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ -۵ & ۶ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۷ & ۸ \\ ۳ & ۳ \end{bmatrix}$

حل: گزینه ۲ صحیح است.

داریم $|AB|=۴۹$ و $tr(AB)=۱۰$ و تنها گزینه ۲ هر دو این ویژگی را دارد.

استقلال خطی

اگر $u_۱,u_۲,...,u_m$ بردارهایی دلخواه در R^n باشند و ترکیب خطی آن‌ها برابر صفر باشد ؛ یعنی $c_۱u_۱+c_۲u_۲+...+c_mu_m=۰$ آنگاه بردارهای مذکور مستقل خطی هستند اگر $c_۱=c_۲=...=c_m=۰$ و اگر حداقل یکی از c_iها صفر نباشد بردارهای مذکور وابسته خطی هستند. اگر بردار $\vec{۰}$ در مجموعه‌ای از بردارها قرار گیرد، مجموعه حاصل وابسته خطی است.

همچنین می‌توان گفت شرط مستقل خطی بودن بردارها آن است که هیچ برداری را نتوان برحسب ترکیب خطی مابقی بردارها نوشت. به عبارت دیگر بردارها مستقل خطی هستند ، اگر و تنها اگر دترمینان ماتریس حاصل از قرار دادن بردارها در سطرها یا ستون‌های ماتریس برابر صفر نباشد.

* **مثال ٤٤:** مقادیر ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

حل: $\lambda=-۱$ یک مقدار ویژه است زیرا:

$$A-\lambda I=A+I=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\xrightarrow{\text{سطرهای مساوی}} \det(A-\lambda I)=۰$$

چون رتبه ماتریس $A+I$ برابر یک است سه بردار ویژه مستقل متناظر با $\lambda=-۱$ وجود دارد ؛ یعنی $\lambda=-۱$ یک مقدار ویژه مکرر از مرتبه ۳ است.
از طرفی $trA=\sum\lambda_i$ پس $-۱-۱-۱+\lambda_۴=۰$ در نتیجه مقدار ویژه دیگر برابر ۳ خواهد بود.

رتبه (Rank)

تعریف: رتبه یک ماتریس برابر با تعداد سطرهای مستقل خطی (تعداد ستون‌های مستقل خطی) است.

> **نکته ٦٥:** رتبه یک ماتریس $A_{m\times n}$ برابر مرتبه بزرگترین دترمینان مربعی غیرصفر است که می‌توان از ماتریس استخراج نمود.

> **نکته ٦٦:** رتبه ماتریس A با رتبه ماتریس A' یا (A^T) برابر است.

> **نکته ٦٧:** روشی برای تعیین رتبه ماتریس 3×3
> اگر دترمینان 3×3 مخالف صفر باشد ، رتبه ۳ خواهد بود. اگر دترمینان 3×3 صفر شود قطعاً رتبه ۳ نبوده و می‌تواند ۲ باشد. اگر تمام دترمینان‌های 2×2 استخراج شده از ماتریس صفر باشند رتبه ۲ نیز نبوده و رتبه ۱ خواهد شد. اما اگر حداقل یک دترمینان 2×2 وجود داشته باشد که مخالف صفر شود رتبه ماتریس ۲ می‌شود.

> **نکته ٦٨:** برای ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ اگر دترمینان $n\times n$ مخالف صفر باشد رتبه ماتریس برابر n خواهد بود.

* **مثال ٤٥:** رتبه ماتریس $A=\begin{bmatrix}8&3&1&6\\-1&6&2&4\\7&9&3&10\\15&12&4&16\end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

حل: رتبه ماتریس می‌تواند ۴ باشد ، یعنی اینکه هر ۴ سطر مستقل خطی باشد. اگر R_1، R_2، R_3 و R_4 به ترتیب سطرهای اول تا چهارم باشد مشخص است که $R_3=R_1+R_2$ و $R_4=2R_1+R_2$ یعنی سطرهای سوم و چهارم مستقل خطی نیستند ، پس رتبه می‌تواند ۲ باشد. سطرهای اول و دوم مستقل هستند چون ضریبی از یکدیگر نیستند؛ بنابراین رتبه ماتریس ۲ خواهد بود.

* **مثال ٤٦:** رتبه ماتریس $\begin{bmatrix}3&2&0\\6&4&0\\9&6&0\end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

حل: رتبه می‌تواند ۳ باشد اما $R_2=2R_1$ و $R_3=3R_1$ بنابراین سطر دوم و سوم مستقل نبوده و رتبه ماتریس ۱ است. البته به‌صورت زیر هم می‌توان عمل کرد.

دترمینان 3×3 برابر صفر است بنابراین رتبه نمی‌تواند ۳ باشد (می‌تواند ۲ باشد.) از طرفی تمام دترمینان‌های 2×2 استخراج شده از ماتریس نیز صفر بوده بنابراین رتبه ۱ است.

با اعمال سطری مقدماتی (جابه‌جا کردن دو سطر، ضرب یک سطر در یک عدد مخالف صفر و افزودن ضریبی از یک سطر به سطر دیگر) می‌توان به ماتریسی دست یافت که رتبه آن با رتبه ماتریس اولیه برابر است.

* **مثال ٤٧:** فرض کنید A یک ماتریس 4×4 بوده و $A=[a_{ij}]$ و داشته باشیم $a_{ij}=\begin{cases}1 & i\neq j\\-1 & i=j\end{cases}$. رتبه ماتریس A را به‌دست آورید.

حل: با توجه به مساله ماتریس را به صورت زیر تشکیل داده و از روش گوس استفاده می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[R_1+R_4\to R_4]{R_2-R_3\to R_2\ ,\ R_3-R_4\to R_3}A=\begin{bmatrix}-1&1&1&1\\0&-2&2&0\\0&0&-2&2\\0&2&2&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2+R_4\to R_4}A=\begin{bmatrix}-1&1&1&1\\0&-2&2&0\\0&0&-2&2\\0&0&4&0\end{bmatrix}\xrightarrow{2R_3+R_4\to R_4}A=\begin{bmatrix}-1&1&1&1\\0&-2&2&0\\0&0&-2&2\\0&0&0&4\end{bmatrix}$$

چهار سطر مخالف صفر وجود دارد؛ بنابراین رتبه ۴ است. توجه کنید ماتریس به وجود آمده بالامثلثی و دترمینان آن ۱۶− است. چون دترمینان مرتبه ۴ مخالف صفر است رتبه ۴ خواهد بود.

* **مثال ٤٨:** رتبه ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

حل: مشخص است که $R_3=2R_2-R_1$ پس سطر سوم مستقل خطی نبوده و رتبه می‌تواند ۲ باشد. چون سطر اول و دوم ضریبی از یکدیگر نیستند پس رتبه ۲ است.

* **مثال ٤٩:** رتبه ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&5&4&3&2\\5&4&3&2&1\\6&9&7&5&3\\11&13&10&7&4\end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

حل: مشخص است که $R_3=R_1+R_2$ و $R_4=R_2+R_3$ بنابراین سطرهای سوم و چهارم مستقل خطی نیستند و چون سطرهای ۱ و ۲ ضریبی از یکدیگر نیستند از هم مستقل بوده و رتبه ماتریس ۲ می‌شود.