بسم الله الرحمن الرحیم

مؤسسه آموزش عالی آزاد ماهان با افتخار تقدیم می‌کند

ریاضی

مجموعه مدیریت، اقتصاد و حسابداری

از سری کتاب‌های کمک آموزشی کارشناسی ارشد و دکتری

دکتر حسن رضاپور

موسسه آموزش عالی آزاد
ماهان
www.mahan.ac.ir

سرشناسه : دکتر حسن رضاپور
عنوان : ریاضی: مجموعه مدیریت، اقتصاد و حسابداری
مشخصات نشر : تهران، مشاوران صعود ماهان، ۹۹
مشخصات ظاهری : ۵۵۹ صفحه رحلی
فروست : سری کتاب‌های کمک آموزشی کارشناسی ارشد و دکتری
شابک : ۸-۸۹۹-۳۸۹-۶۰۰-۹۷۸
وضیعت فهرست‌نویسی : فیپای مختصر
یادداشت : این مدرک در آدرس http://opac.nali.ir قابل دسترسی است
شماره کتاب‌شناسی ملی : ۳۸۹۱۲۵۲

ریاضی

ناشـــر : مشاوران صعود ماهان
مدیر مسئول : هادی سیاری - مجید سیاری
مدیر تولید و برنامه‌ریزی : سمیه بیگی
به قلم : دکتر حسن رضاپور
ویراستار ادبی : منیره میرهدایتی
نوبت و تاریخ چاپ : ۱۳۹۹
شمارگان : ۱۰۰۰ نسخه
قیمت : ۱/۱۵۰/۰۰۰ریال
شابک : ۸-۸۹۹-۳۸۹-۶۰۰-۹۷۸

نشانی: تهران، خیابان ولی‌عصر- بالاتر از تقاطع مطهری- جنب بانک ملی پلاک ۲۰۵۰
شماره تماس: ۴-۸۸۱۰۰۱۱۳

«ن والقلم و ما یسطرون»

کلمه نزد خدا بود و خدا آن را با قلم بر ما نازل کرد.

به پاس تشکر از چنین موهبت الهی، موسسه ماهان درصدد برآمده است تا در راستای انتقال دانش و مفاهیم با کمک اساتید مجرب و مجموعه کتب آموزشی خود برای شما داوطلبان ادامه تحصیل در مقطع کارشناسی ارشد، گام موثری بردارد. امید است تلاش‌های خدمتگزاران شما در این موسسه پایه‌گذار گام‌های بلند فردای شما باشد.

مجموعه کتاب‌های کمک آموزشی ماهان به‌منظور استفاده داوطلبان کنکور کارشناسی ارشد سراسری و آزاد تالیف شده‌اند. در این کتاب‌ها سعی کرده‌ایم با بهره‌گیری از تجربه اساتید بزرگ و کتب معتبر داوطلبان را از مطالعه کتاب‌های متعدد در هر درس بی‌نیاز کنیم.

دیگر تالیفات ماهان برای سایر دانشجویان به‌صورت ذیل می‌باشد:

مجموعه کتاب‌های **۸** آزمون: شامل **۵** مرحله کنکور کارشناسی ارشد **۵** سال اخیر به همراه **۳** مرحله آزمون تالیفی ماهان همراه با پاسخ تشریحی می‌باشد که برای آشنایی با نمونه سوالات کنکور طراحی شده است. این مجموعه کتاب‌ها با توجه به تحلیل **۳** ساله اخیر کنکور و بودجه‌بندی مباحث در هریک از دروس، اطلاعات مناسبی جهت برنامه‌ریزی درسی در اختیار دانشجو قرار می‌دهد.

مجموعه کتاب‌های کوچک: شامل کلیه نکات کاربردی در گرایش‌های مختلف کنکور کارشناسی ارشد می‌باشد که برای دانشجویان جهت جمع‌بندی مباحث در **۲** ماهه آخر قبل از کنکور مفید می‌باشد.

بدین‌وسیله از مجموعه اساتید، مولفان و همکاران محترم خانواده بزرگ ماهان که در تولید و به‌روزرسانی تالیفات ماهان نقش موثری داشته‌اند، صمیمانه تقدیر و تشکر می‌نماییم.

دانشجویان عزیز و اساتید محترم می‌توانند هرگونه انتقاد و پیشنهاد درخصوص تالیفات ماهان را از طریق سایت ماهان به آدرس mahan.ac.ir با ما در میان بگذارند.

موسسه آموزش عالی آزاد ماهان

مقدمه مولف

مجموعه‌ای که پیش رو دارید حاصل سال‌ها تجربه تدریس در دانشگاه‌ها و مؤسسات مختلف است.
در این مجموعه سعی شده با جمع‌آوری مناسب سرفصل‌ها و با تکیه بر حل تست‌های کنکورهای کارشناسی ارشد و دکتری، داوطلبین را برای رقابت در آزمون این مقاطع در رشته‌های مدیریت، حسابداری، اقتصاد و سنجش از دور و .... آماده سازیم.

از جناب آقای دکتر سیاری، ریاست محترم موسسه آموزش عالی آزاد ماهان و تمام مسئولین و دست‌اندرکاران این مؤسسه به خاطر همکاری بی‌مثالشان تشکر می‌نمایم.

از جناب آقای پرفسور صالحی فتح‌آبادی و جناب آقای دکتر شیردل، اساتید راهنمای دوره کارشناسی ارشد و دکترای خود نیز سپاسگزارم که چهره زنده ریاضیات را به من نشان داده‌اند.
از پدر فداکار و مادر مهربانم به خاطر تمام زحمات عاشقانه‌اشان در طول زندگیم، بی‌نهایت سپاسگزارم.
این دو بزرگوار همواره در تمام لحظات مشوق من برای تحصیل و تدریس در امر آموزش بوده‌اند.
از همسر عزیزم یک دنیا قدردان هستم که در تمام لحظات زندگی مشوق و پشتیبان من بوده است.
بی‌شک تمام زمانی که صرف این اثر شد متعلق به او می‌باشد. این اثر را به پدر فداکار، مادر مهربان و همسر عزیزم تقدیم می‌نمایم.

داوطلبین عزیز، هنگام مطالعه این کتاب، سعی کنید از فرمول‌ها و روش‌ها برای خود خلاصه‌نویسی انجام دهید. با مطالعه متن درس و مثال‌های هر فصل، سعی کنید آمادگی لازم برای حل سوالات پایان هر فصل را کسب کنید. بی‌شک این مجموعه، همانند تمامی آثار دیگر، عاری از اشتباه نیست.
خواهشمندم نکات، توصیه‌ها و نظرات خود را به Hassan.Rezapour@gmail.com ارسال نمائید. تا با استفاده از آنها در چاپ‌های بعدی، بهبود چشمگیری حاصل گردد. برای تمامی شما عزیزان، آرزوی موفقیت و پیروزی دارم.

به امید مسیری پرطراوت به فردایی روشن

دکتر حسن رضاپور

فهرست مطالب

فصل اول/ تابع ۹

تست‌های کنکورهای سراسری و آزاد – فصل اول ۳۹

فصل دوم/ حد و پیوستگی ۵۱

تست‌های کنکورهای سراسری و آزاد – فصل دوم ۷۱

فصل سوم/ مشتق و کاربردهای آن ۸۳

تست‌های کنکورهای سراسری و آزاد – فصل سوم ۱۱۱

فصل چهارم/ انتگرال و کاربردهای آن ۱۲۵

تست‌های کنکورهای سراسری و آزاد – فصل چهارم ۱۵۵

فصل پنجم/ توابع چندمتغیره ۱۶۷

تست‌های کنکورهای سراسری و آزاد – فصل پنجم ۱۹۶

فصل ششم/ ماتریس‌ها ۲۰۹

تست‌های کنکورهای سراسری و آزاد – فصل ششم ۲۴۸

فصل هفتم/ کاربرد ریاضیات در مدیریت، حسابداری و اقتصاد ۲۹۹

تست‌های کنکورهای سراسری و آزاد – فصل هفتم ۲۶۸

فصل هشتم/ آنالیز ترکیبی ۲۷۷

تست‌های کنکورهای سراسری و آزاد – فصل هشتم ۲۸۴

فصل نهم/ مجموعه‌ها ۲۸۷

تست‌های کنکورهای سراسری و آزاد – فصل نهم ۲۹۹

فصل دهم/ بسط دو جمله‌ای ۳۰۳

تست‌های کنکورهای سراسری و آزاد – فصل دهم ۳۰۹

فصل یازدهم/ بردار، خط و صفحه ۳۱۱

تست‌های کنکورهای سراسری و آزاد – فصل یازدهم ۳۲۹

فصل دوازدهم/ دنباله و سری ۳۳۱

تست‌های کنکورهای سراسری و آزاد – فصل دوازدهم ۳۵۱

فصل سیزدهم/ معادلات دیفرانسیل ۳۵۷

تست‌های کنکورهای سراسری و آزاد – فصل سیزدهم ۳۶۷

فصل چهاردهم/ اعداد مختلط ۳۷۱

تست‌های کنکورهای سراسری و آزاد – فصل چهاردهم ۳۸۲

پاسخنامه تشریحی ۳۸۵

سوالات و پاسخ‌های ریاضی حسابداری، مدیریت و اقتصاد سال ۹۵ ۵۳۹

سوالات و پاسخ‌های ریاضی حسابداری، اقتصاد دکتری سال ۹٦ ۵۵۲

رياضیِ مدیریت

فصل اول

تابع

تعریف تابع

رابطه: مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها را یک رابطه می‌نامیم.

*مثال ۱: مجموعه‌های **A** و **B** و **C** در زیر یک رابطه هستند:

$A=\{(۱,۲),(۳,۴),(۲,۵),(۴,۳)\}$ $B=\{(۱,۲),(۲,۵),(۱,۶)\}$ $C=\{(۱,۲),(۴,۲),(۱,۲)\}$

تابع: یک رابطه که در آن هیچ دو زوج مرتب متفاوتی دارای مؤلفه‌های اول برابر نباشند تابع نام دارد. به عبارتی یک رابطه بیانگر تابع است، هر گاه زوج‌های مرتب با مؤلفه‌های اول برابر، مؤلفه دوم یکسان داشته باشند.

*مثال ۲: مجموعه‌های **A** و **B** و **C** در *مثال ۱ را در نظر بگیرید. کدام‌یک از آنها تابع نمی‌باشد؟

مجموعه A یک تابع است، زیرا هیچ‌یک از زوج مرتب‌های این مجموعه دارای مؤلفه اول یکسانی نیستند.

مجموعه B تابع نیست، زیرا دو زوج مرتب $(۱,۶)$ و $(۱,۲)$ دارای مؤلفه اول برابر هستند (عدد یک) ولی مؤلفه‌های دوم آنها برابر نیست.

مجموعه C یک تابع است. با وجود اینکه زوج‌های مرتب $(۱,۲)$ و $(۱,۲)$ دارای مؤلفه‌های اول برابر هستند، چون مؤلفه‌های دوم آنها نیز برابر است پس طبق تعریف، مجموعه C بیانگر یک تابع است.

*مثال ۳: مقدار **x** را طوری بیابید که مجموعه $A=\left\{(۲,۲)(-۱,۵)\left(۲,x^۲-۲\right),\left(x+۱,۸\right)\right\}$ یک تابع باشد.

چون دو زوج مرتب $(۲,x^۲-۲)$ و $(۲,۲)$ دارای مؤلفه اول برابر هستند پس باید مؤلفه دوم آنها نیز برابر باشند پس:

$$۲=x^۲-۲\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=\pm ۲$$

حال A را برای دو مقدار به‌دست آمده برای x بررسی می‌کنیم:

$$x=۲\Rightarrow A_۱=\left\{(۲,۲)(-۱,۵)(۲,۲)(۳,۸)\right\}$$

$$x=-۲\Rightarrow A_۲=\left\{(۲,۲)(-۱,۵)(۲,۲)(-۱,۸)\right\}$$

واضح است که اگر $x=۲$، آنگاه مجموعه $A_۱$ یک تابع است. ولی اگر $x=-۲$، آنگاه $A_۲$ به خاطر وجود زوج‌های مرتب $(-۱,۸)$ و $(-۱,۵)$ که دارای مؤلفه اول یکسان ولی مؤلفه دوم نابرابر هستند نمی‌تواند تابع باشد، پس مجموعه A به ازای $x=۲$ یک تابع است.

تعریف دیگری از تابع:

تابع f را توسط زوج‌های مرتب به‌صورت زیر مشخص می‌نماییم:

$$f=\{(x,y)\mid x\in A\ ,\ y=f(x)\}=\{(x,f(x))\mid x\in A\}$$

مثال ٤:

$$f=\{(x,y)\,|\,x\in\{۲,۳\}\ ,\ y=۲x\}=\{(۲,۴),(۳,۶)\}$$

در اینجا x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته می‌نامیم.

نحوه تشخیص تابع

الف) با استفاده از ضابطه تابع: ضابطه $y=f(x)$ یک تابع است، هر گاه از تساوی $x_۱=x_۲$، تساوی $y_۱=y_۲$ نتیجه شود.

مثال ۵: اگر x متغیر مستقل باشد، کدام‌یک از روابط زیر تابع است؟ *(کارشناسی ارشد - اقتصاد سراسری)*

۱) $y^۲=x+۱$ ۲) $y+x^۲-۱=۰$ ۳) $x^۲+y^۲-۱=۰$ ۴) $\sin y=x$

حل: گزینه ۲

باید از تساوی $x_۱=x_۲$ ، $y_۱=y_۲$ را نتیجه بگیریم. در گزینه ۲ داریم:

$$x_۱=x_۲\Rightarrow x_۱^۲=x_۲^۲\Rightarrow ۱-x_۱^۲=۱-x_۲^۲\Rightarrow y_۱=y_۲$$

علت رد سایر گزینه‌ها: اگر در گزینه ۱، مقدار x را ۸ قرار دهیم، داریم:

$$x=۸\Rightarrow y^۲=۸+۱\Rightarrow y^۲=۹\ \Rightarrow y=\pm ۳$$

و این یعنی $(۸,۳)$ و $(۸,-۳)$ اعضای این رابطه‌اند که به ازای یک مقدار x برای y دو مقدار به دست آمده، لذا گزینه ۱ تابع نیست.

در گزینه ۳، x را صفر قرار دهید لذا:

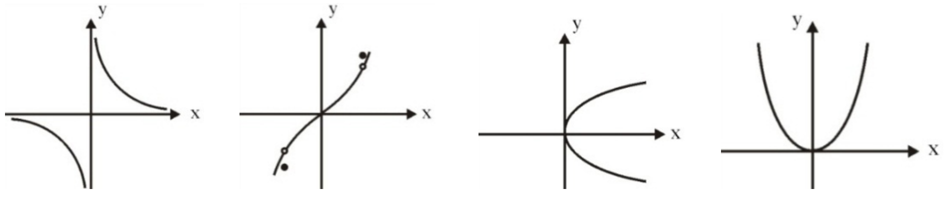
$$x=۰\Rightarrow y^۲-۱=۰\Rightarrow y^۲=۱\Rightarrow y=\pm ۱$$

در گزینه ۴، مقدار x را صفر قرار دهید لذا:

$$x=۰\Rightarrow \sin y=۰\Rightarrow y=۰,\pi,۲\pi,\dots,k\pi,\dots$$

ب) با استفاده از نمودار تابع: اگر هر خط موازی محور y ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آنگاه آن نمودار، یک تابع است. به عبارت دیگر هر گاه اگر خطی موازی محور yها بتوان رسم کرد که نمودار را در دو نقطه (و یا بیش از دو نقطه) قطع کند، آنگاه آن نمودار نمی‌تواند نمودار یک تابع باشد.

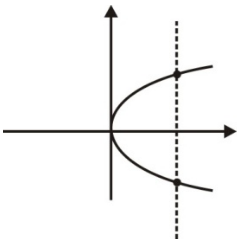
مثال ٦: کدام‌یک از نمودارهای زیر بیانگر نمودار یک تابع نیست؟



(الف) (ب) (ج) (د)

حل: گزینه ۲

نمودار (ب) بیانگر نمودار یک تابع نیست، زیرا می‌توان خطی موازی محور y ها رسم کرد که نمودار تابع را در دو نقطه قطع کند؛ یعنی به‌ازای یک مقدار برای x دو مقدار برای y یافت می‌شود.



تعریف تابع

دامنه: اگر تابع را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب در نظر بگیریم، به مجموعه‌مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب دامنه تابع گوییم؛ به عبارت دیگر مجموعه کلیه مقادیری که متغیر x می‌تواند اختیار کند را دامنه تابع می‌نامیم.
این مجموعه را با D_f نمایش می‌دهند در واقع این مجموعه با نماد ریاضی به‌صورت

$$D_f=\{x\,|\,f(x)\in R\}$$

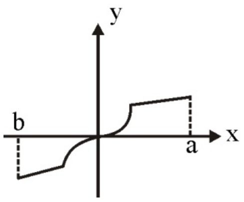
نمایش داده می‌شود. توجه کنید که $f(x)\in R$ به این معناست که $f(x)$ با معنی است.

مثال ۷: دامنه تابع $A=\{(۱,۲)(۳,۴)(۲,۵)(۴,۳)(۱,۲)\}$ را بیابید.

$$\text{دامنه } A = D_A=\{۱,۳,۲,۴\}$$

به دست آوردن دامنه تابع با استفاده از نمودار و ضابطه:

اگر نمودار یک تابع به صورت روبه‌رو باشد:



دامنه تابع، مقادیری است که از تصویر کردن نمودار تابع روی محور xها به دست می‌آید. در این مثال دامنه تابع $[b,a]$ می‌باشد.
برای یافتن دامنه تابع از روی ضابطه، با توجه به نکات زیر و به‌دست آوردن محدودیت‌ها برای x، اشتراک آنها، دامنه تابع را به دست می‌آوریم:

نکات مربوط به دامنه تابع:

۱- دامنه توابع چندجمله‌ای، $\mathbb{R}$ (مجموعه اعداد حقیقی $(-\infty,+\infty)$) می‌باشد.

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\ldots+a_۱x+a_۰\ \Rightarrow\ D_f=\mathbb{R}$$

۲- دامنه توابع کسری برابر است با تمام اعداد حقیقی به جز ریشه‌های مخرج کسر
به عبارتی اگر تابع به صورت $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ باشد، برای یافتن دامنه ابتدا $q(x)$ را مساوی صفر قرار داده و مقادیر x را می‌یابیم(ریشه های مخرج را پیدا می کنیم) پس دامنه f برابر خواهد شد با:

$$D_f=\mathbb{R}-\underbrace{\{x\,|\,q(x)=۰\}}_{\text{ریشه‌های مخرج}}$$

مثال ۸: دامنه تابع $y=\dfrac{x^۲+۴}{e^x-۵}$ را بیابید. $e^x-۵=۰\Rightarrow e^x=۵\Rightarrow x=\text{Ln}۵\Rightarrow D_y=\mathbb{R}-\{\ln ۵\}$

۳- در توابع رادیکالی با فرجه فرد (به صورت $y=\sqrt[۲n+۱]{f(x)}$) رادیکال هیچ محدودیتی ایجاد نمی‌کند و دامنه y با دامنه $f(x)$ برابر است.

مثال ۹: دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $y_۱=\sqrt[۳]{۲x^۲-۴x+۱}$ ب) $y_۲=\sqrt[۵]{\dfrac{x^۲-۹}{x^۲-۱}}$

حل:

الف) چون فرجه رادیکال فرد است، پس رادیکال محدودیتی ایجاد نکرده، لذا دامنه $y_۱$ با دامنه $۲x^۲-۴x+۱$ که یک چندجمله‌ای است برابر است لذا دامنه $y_۱$ برابر است با $\mathbb{R}$.

ب) چون فرجه رادیکال فرد است، دامنه $y_۲$ با دامنه تابع تحت رادیکال برابر است و طبق نکته ۲، دامنه $\dfrac{x^۲-۹}{x^۲-۱}$ که یک تابع کسری است برابر است با $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ پس:

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ ریشه‌های مخرج $\Rightarrow D_{y_2} = \mathbb{R} - \{1, -1\}$

٤- در توابع رادیکالی با فرجه زوج (به صورت $y = \sqrt[2n]{f(x)}$) دامنه تابع برابر است با مقادیری که به ازای آنها تابع زیر رادیکال منفی نشود، پس:

$$D_y = D_{f(x)} \cap \{x \mid f(x) \geq 0\}$$

※مثال ۱۰: دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ کدام است؟ *(کنکور کارشناسی ارشد – سراسری اقتصاد)*

۱) $-1 \leq x < 0$ ۲) $-1 < x \leq 0$ ۳) $x \leq -1$ یا $x \geq 0$ ۴) $x < -1$ یا $x \geq 0$

حل: گزینه ۴

چون فرجه رادیکال زوج است باید تابع زیر رادیکال منفی نشود؛ پس با استفاده از تعیین علامت داریم:

$\frac{x}{x+1} \geq 0$ $x = 0$ ریشه صورت $x = -1$ $\Rightarrow$ ریشه مخرج

x		-1		0	
x	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x}{x+1}$	$+$		$-$	0	$+$

تعریف نشده تعریف نشده

راه حل تستی: x نمی‌تواند عدد ۱- را اختیار کند (زیرا ۱- ریشه مخرج است.) پس گزینه‌های ۱ و ۳ نادرست هستند. برای یافتن گزینه‌صحیح بین گزینه‌های ۲ و ۴، برای مثال چون $f(x)$ می‌تواند عدد ۱ را اختیار کند (زیرا $f(1) = \sqrt{\frac{1}{2}}$) پس ۱ عضو دامنه است، لذا گزینه ۲ نیز نادرست است.

۵- برای یافتن دامنه توابع لگاریتمی به صورت $f(x) = \log_{V(x)}^{U(x)}$ باید داشته باشیم:

الف) $U(x) > 0$ ب) $V(x) > 0$ ج) $V(x) \neq 1$، xهای به دست آمده حاصل از اشتراک قسمت‌های الف، ب و ج دامنه $f(x)$ می‌باشد.

تبصره ۱: پس برای یافتن دامنه $f(x) = \operatorname{Ln} g(x)$ کافی است قرار دهیم: $g(x) > 0$

تبصره (۲): دامنه تابع $y = \sqrt{\log f(x)}$ برابر است با:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ \log f(x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \log f(x) \geq \log 1 \Rightarrow f(x) \geq 1$$

※مثال ۱۱: دامنه تابع $y = \sqrt{\log \frac{5x - x^2}{4}}$ را به‌دست آورید.

با توجه به تبصره ۲ نکته ۵ داریم:

$$f(x) \geq 1 \Rightarrow \frac{5x - x^2}{4} \geq 1 \Rightarrow -x^2 + 5x - 4 \geq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 4 \Rightarrow D = [1, 4]$$

※مثال ۱۲: دامنه تابع $y = \ln\left(\frac{1 - 2e^x}{1 + e^x}\right)$ کدام است؟ *(حسابداری ـ ارشد سراسری)*

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}^+$ ۳) $(-\infty, 1)$ ۴) $(-\infty, -\operatorname{Ln} 2)$

حل: گزینه ۴

با استفاده از تبصره (۱) نکته ۵ باید $\frac{1 - 2e^x}{1 + e^x} > 0$ و چون این عبارت کسری است باید $1 + e^x \neq 0$، اما $1 + e^x \neq 0$ همواره و به ازای هر x ای برقرار است پس باید:

$$\frac{1-2e^x}{1+e^x}>0 \xrightarrow{1+e^x>0} 1-2e^x>0 \Rightarrow 1>2e^x \Rightarrow e^x<\frac{1}{2} \Rightarrow x<\ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x<\ln 2^{-1} \Rightarrow x<-\ln 2$$
$$\Rightarrow x\in(-\infty,-\ln 2)$$

راه حل تستی: دقت کنید $x=0$ نمی‌تواند عضو دامنه باشد، زیرا جلوی $\ln$ را منفی می‌کند: $f(0)=\ln\left(-\frac{1}{2}\right)$ پس گزینه‌های ۱ و ۳ نادرست هستند.

گزینه ۲ نیز نادرست است زیرا $x=1$ هم نمی‌تواند عضو دامنه باشد چون جلوی $\ln$ را منفی می‌کند:

$$f(1)=\ln\Big(\frac{\overbrace{1-2e}^{\text{منفی}}}{\underbrace{1+e}_{\text{مثبت}}}\Big)$$

پس گزینه ۴ صحیح است.

۶- دامنه توابع $f(x)=\sin(h(x))$ یا $g(x)=\cos(h(x))$ یا $p(x)=a^{h(x)}$ که $a>0$ و $a\neq 0$ می‌باشد برابر است با دامنه $h(x)$.

$$7)\ f(x)=\tan(h(x)) \Rightarrow D_f=D_{h(x)}\cap\left\{x\,\middle|\,h(x)\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$8)\ f(x)=\cot(h(x)) \Rightarrow D_f=D_{h(x)}\cap\left\{x\,\middle|\,h(x)\neq k\pi\right\}$$

۹- توابع به صورت $\operatorname{Arcsin}(p(x))$ و $\operatorname{Arccos}(p(x))$ به صورت $D_{p(x)}\cap\{x\,|\,|p(x)|\leq 1\}$ می‌باشد. پس به طور خاص دامنه $\operatorname{Arcsin}x$ و $\operatorname{Arccos}x$ برابر است با $|x|\leq 1$.

۱۰- دامنه $\operatorname{Arctan}(h(x))$ و $\operatorname{Arccot}(h(x))$ برابر است با دامنه $h(x)$.

مثال ۱۳: دامنه تابع $f(x)=\sqrt{\log\frac{x+2}{x^2}}$ کدام است؟ *(مدیریت و حسابداری ـ ارشد سراسری)*

۱) $(0,2]$ ۲) $(-2,0)$ ۳) $(-2,0)\cup(0,1)$ ۴) $[-1,0)\cup(0,2]$

حل: گزینه ۴

چون تابع جلوی لگاریتم باید مثبت باشد: (الف $\frac{x+2}{x^2}>0$) و تابع زیر رادیکال منفی نمی‌تواند باشد. (ب $\log\frac{x+2}{x^2}\geq 0$) و مخرج کسر هم صفر نباشد. (ج $x^2\neq 0$) اشتراک xهای حاصل از الف و ب و ج دامنه تابع است:

$$\text{(الف}\ \frac{x+2}{x^2}>0 \xrightarrow[\text{مثبت است}]{x^2\ \text{همیشه}} x+2>0 \Rightarrow x>-2$$

$$\text{(ب}\ \log\frac{x+2}{x^2}\geq 0 \Rightarrow \log\frac{x+2}{x^2}\geq \log 1 \Rightarrow \frac{x+2}{x^2}\geq 1$$

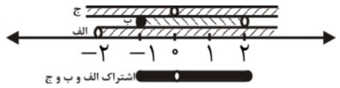
$$\Rightarrow x\in[-1,2]$$

$$\text{(ج}\ x^2\neq 0 \Rightarrow x\neq 0$$

حل:

$$x>-2\ \cap\ +2\geq x\geq -1\ \cap\ x\neq 0 \Rightarrow x\in[-1,0)\cup(0,2]$$

تذکر: برای یافتن اشتراک می‌توانید از محور اعداد کمک بگیرید.



حل تستی: داریم $f(۲)=\sqrt{\log ۱}=\sqrt{۰}=۰$ پس ۲ می‌تواند عضو دامنه باشد. لذا گزینه‌های ۲ و ۳ غلط هستند. اما از بین گزینه‌های ۱ و ۴ چون اگر $x=-۱$ باشد، مشکلی ایجاد نمی‌کند: $f(-۱)=\sqrt{\log ۱}=۰$ ، پس ۱− هم می‌تواند عضو دامنه باشد. لذا گزینه ۴ صحیح است.

برد تابع

تعریف برد: اگر تابع را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب در نظر بگیریم، به مجموعه مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب برد تابع می‌گوییم.
به عبارت دیگر مجموعه کلید مقادیری که متغیر وابسته y می‌تواند اختیار کند برد f نام دارد و با R_f نشان داده و به‌صورت:

$$R_f=\{y \mid y=f(x)\ ,\ x\in D_f\}$$

تعریف می‌شود.

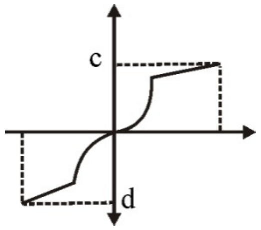
مثال ۱۴: برد تابع $A=\{(۱,۲),(۳,۴),(۲,۵),(۴,۳),(۱,۲)\}$ را بیابید.

حل:

$$\text{برد}A=R_f=\{۲,۴,۵,۳\}$$

یافتن برد با استفاده از نمودار و ضابطه:

اگر نمودار یک تابع به صورت روبه‌رو باشد، برد تابع، مقادیری است که از تصویر کردن نمودار تابع روی محور yها به‌دست می‌آید. در این مثال برد تابع $[d,c]$ می‌باشد.



برای یافتن برد از روی ضابطه تابع به نکات ذیل دقت کنید:

نکات مربوط به برد تابع:

۱) اگر $a,b>۰$، برد توابع به صورت $f(x)=\sqrt{ax+b}$ و $g(x)=\sqrt{ax^۲-b}$ برابر است با:

$$R_f=R_g=\mathbb{R}^+\cup\{۰\}=[۰,+\infty)$$

۲) اگر $a,b>۰$ برد تابع $f(x)=\sqrt{b-ax^۲}$ برابر است با: $\left[۰,\sqrt{b}\right]$

۳) برد تابع $f(x)=\dfrac{ax}{x^۲+۱}$ همواره برابر است با: $\left[-\dfrac{a}{۲},\dfrac{a}{۲}\right]$

مثال ۱۵: برد توابع زیر را بیابید.

الف) $y_۱=\sqrt{\frac{۲}{۳}x+۷}$ ب) $y_۲=\sqrt{x^۲-۴}$ ج) $y_۳=\sqrt{۴-x^۲}$

حل:

برد توابع $y_۱$ و $y_۲$ با توجه به نکته ۱ برابر است با: $[۰,+\infty)$

برد تابع $y_۳$ با توجه به نکته ۲ برابر است با: $\left[۰,\sqrt{۴}\right]=[۰,۲]$

*مثال ١٦: برد تابع $y=\sqrt{1-x^2}$ کدام است؟ *(کارشناسی ارشد – سراسری حسابداری)*

١) $\mathbb{R}-(-1,1)$
٢) $\mathbb{R}^+$
٣) $[0,1]$
۴) $[-1,1]$

حل: گزینه ٣

با توجه به نکته ٢ پاسخ واضح است.

٤) در توابع به صورت $y(x)=au^2(x)+bu(x)+c$ که $u(x)$ تابعی از x و کراندار می‌باشد $\alpha\le u(x)\le\beta$ ، با محاسبه $f(u)$ به ازای $u=\alpha$ و $u=\beta$ و $u=\frac{-b}{2a}$ و مقایسه آنها، برد y بین کمترین و بیشترین $f(u)$ به ازای uهای فوق می‌باشد.

*مثال ١٧:برد $y=\sin^2 x+2\sin x-1$ را محاسبه نمایید.

حل: کافی است قرار دهید $u=\sin x$ تا به فرم کلی شماره ۴ دست پیدا کنید. ضمناً $-1\le u=\sin x\le 1$ ، پس اطلاعات مسئله به شکل زیر می‌باشد:

$$f(u)=u^2+2u-1 \quad و \quad \alpha=-1\le u\le 1=\beta$$

$$f(u)\Big|_{u=1}=2 \quad , \quad f(u)\Big|_{u=-1}=-2 \quad , \quad f(u)=\Big|_{u=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2}=-1}=-2$$

پس برد تابع بین ٢- و ٢ یعنی $[-2,2]$ می‌باشد.

٥) در توابع هموگرافیک که به صورت $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ می‌باشد، داریم:

برد y: $R_y=\mathbb{R}-\left\{\frac{a}{c}\right\}$ 	دامنه y: $D_y=\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$

*مثال ١٨: برد تابع $f=\left\{(x,y)\,|\,y=\frac{x+4}{x},x,y\in\mathbb{R}\right\}$ در مجموعه اعداد حقیقی کدام است؟ *(کارشناسی ارشد – سراسری مدیریت)*

١) $\mathbb{R}-\{1\}$
٢) $\mathbb{R}-\{0\}$
٣) $\mathbb{R}$
۴) $\mathbb{R}^+$

حل: گزینه ١

بنابر نکته ۵ برد y برابر است با:

$$\mathbb{R}-\left\{\frac{a}{c}\right\}=\mathbb{R}-\{1\}$$

٥) با استفاده از ضابطه معکوس تابع:

این بخش در قسمت تابع معکوس به تفصیل بحث خواهد شد. در اینجا فقط به این نکته اشاره می‌کنیم که اگر $f^{-1}(x)$ معکوس تابع $f(x)$ باشد، آنگاه: $R_f=D_{f^{-1}(x)}$ و $R_{f^{-1}}=D_f$

پس برای یافتن برد یک تابع، اگر آن تابع معکوس‌پذیر باشد، با یافتن معکوس آن، دامنه تابع معکوس را به عنوان برد تابع اصلی لحاظ می‌نماییم.

*مثال ١٩: برد تابع $f(x)=\frac{4x-3}{x+2}$ را با استفاده از ضابطه معکوس تابع بیابید.

حل: برای یافتن معکوس تابع باید x را بر حسب y یافت:

$$y=\frac{4x-3}{x+2}$$

$$yx+2y=4x-3\Rightarrow yx-4x=-3-2y\ \Rightarrow\ x(y-4)=-3-2y$$

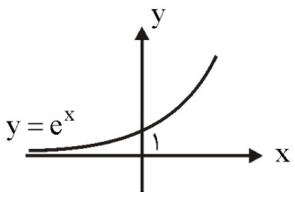
$$\Rightarrow x=\frac{-3-2y}{y-4}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{3+2x}{4-x}\Rightarrow D_{f^{-1}(x)}=\mathbb{R}-\{4\}=R_f=f \text{ برد}$$

٦) در بخش معرفی چند تابع مهم، برد و دامنه آنها را به خاطر بسپارید که می‌توان از آنها به خوبی برای یافتن دامنه و برد توابع کمک گرفت. در این قسمت بر حسب نیاز فقط به دو مورد بسیار مهم اشاره می‌کنیم:

الف) توابع نمایی　　　**ب)** توابع لگاریتمی

الف) تابع نمایی $y=e^x$:

نمودار $y=e^x$ به صورت روبه‌رو است:



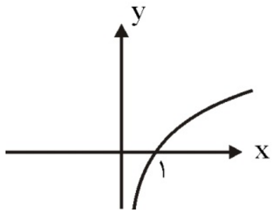
دامنه $y=e^x$، $\mathbb{R}$ می‌باشد. ضمناً:

الف) اگر $x>0$ آنگاه $y>1$ ، ب) اگر $x=0$ آنگاه $y=1$ ، ج) اگر $x<0$ آنگاه $0<y<1$.

پس y هیچگاه منفی و یا صفر نمی‌شود؛ یعنی برد y برابر است با: $R_y=(0,+\infty)$

ب) تابع لگاریتمی:

(i) نمودار تابع $y=\log_a^x$ (که $a>1$) به صورت روبه‌رو می‌باشد:

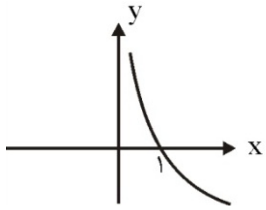


دامنه y، $\mathbb{R}^+$ است. ضمناً:

الف) اگر $x>1$ آنگاه $y>0$　　ب) اگر $x=1$ آنگاه $y=0$　　ج) اگر $0<x<1$ آنگاه $y<0$

تذکر: تابع $y=\text{Ln}x$ در این قسمت قرار می‌گیرد.

(ii) نمودار تابع $y=\log_a^x$ که $0<a<1$ به صورت روبه‌رو می‌باشد:



دامنه y، $\mathbb{R}^+$ است. ضمناً برای برد به نکات زیر توجه نمایید:

الف) اگر $x>1$ آنگاه $y<0$　　ب) اگر $x=0$ آنگاه $y=0$　　ج) اگر $0<x<1$ آنگاه $y>0$

مثال ۲۰: برد تابع $y=\text{Ln}\left(2x^2+1\right)$ کدام است؟　　*(کارشناسی ارشد – سراسری مدیریت)*

۱) $\mathbb{R}$　　۲) $(0,1)$　　۳) $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　۴) $[0,+\infty)$

حل: گزینه ۴

در $y=\ln\left(2x^2+1\right)$ قرار دهید $t=2x^2+1$، ضمناً $t\geq 1$. پس $y=\text{Ln}t$ که در آن $t\geq 1$.

با استفاده از نکته در صفحهٔ قبل اگر $t=1$، آنگاه $y=0$　　(۱)

و اگر $t>1$، آنگاه $y>0$　　(۲)

پس برد تابع $(1)\cup(2)$ یعنی $[0,\infty)$ می‌باشد.

مثال ۲۱: برد تابع حقیقی **f** به معادله $y=2+e^{-x+1}$ برابر است با:　　*(کارشناسی ارشد – سراسری حسابداری)*

۱) $\mathbb{R}$　　۲) $(-\infty,2]$　　۳) $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$　　۴) $(2,+\infty)$

حل: گزینه ۴

با توجه به نکته ۶- الف دامنه تابع R می‌باشد. قرار دهید $t=-x+1$، پس $y=2+e^{t}$. چون x می‌تواند همه مقادیر $\mathbb{R}$ را اختیار کند پس e^{t} مقادیر $(0,+\infty)$ را می‌تواند اختیار کند لذا $2+e^{t}$ مقادیر $(2,+\infty)$ را می‌تواند بگیرد. پس برد تابع $y=2+e^{-x+1}$ برابر است با $(2,+\infty)$.

مثال ۲۲: برد یا حوزه مقادیر تابع f به معادله $y=e^{\frac{-x^2}{2}}$ کدام است؟ *(کارشناسی ارشد – سراسری مدیریت)*

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}^{+}$ ۳) $(0,1)$ ۴) $(0,1]$

حل: گزینه ۴

دامنه تابع $\mathbb{R}$ می‌باشد. قرار دهید $t=-\frac{x^2}{2}$، پس $t\in(-\infty,0]$ بنا به نکته ۶ الف $y=e^{t}$ که اگر $t=0$، آنگاه $y=1$ و اگر $t<0$، آنگاه $0<y<1$ پس چون $t\le 0$ لذا $0<y\le 1$.

تابع یک به یک

تعریف: تابع $\begin{cases} f:A\to B \\ y=f(x)\end{cases}$ را یک به یک می‌گوییم هر گاه به ازای هر y از برد تابع، تنها یک x از دامنه نظیر شده باشد.

راه‌های تشخیص یک‌به‌یک بودن یک تابع

الف) با استفاده از ضابطه تابع **ب)** با استفاده از نمودار تابع

الف) تشخیص یک به یک بودن تابع با استفاده از ضابطه تابع: گوییم تابع $f(x)$ یک به یک است هر گاه بتوان از تساوی $f(x_1)=f(x_2)$ تساوی $x_1=x_2$ را نتیجه گرفت: $\left(\forall x\in D_f\ :\ f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2\right)$

مثال ۲۳: آیا تابع $y-x^2=1$ یک به یک است؟

حل: خیر تابع یک به یک نیست.

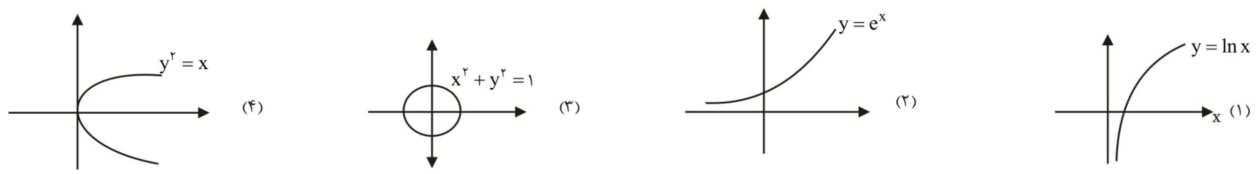
$$y=1+x^2$$

$$y_1=y_2\Rightarrow 1+x_1^2=x_1^2=x_2^2\Rightarrow x_1=\pm x_2$$

پس از تساوی $y_1=y_2$ داریم: $x_1=\pm x_2$ (یعنی نتوانستیم از $y_1=y_2$ نتیجه بگیریم $x_1=x_2$، بلکه نتیجه گرفتیم $x_1=x_2$ یا $x_1=-x_2$).

ب) تشخیص یک‌به‌یک بودن تابع با استفاده از نمودار آن:

اگر هر خط موازی محورxها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند آنگاه تابع مدنظر، یک‌به‌یک می‌باشد. در نمودارهای رسم شده زیر شماره‌های ۱ و ۲ نمودار یک‌تابع یک‌به‌یک هستند ولی نمودارهای شماره ۳ و ۴، یک به‌یک نمی‌باشند.



نکته

نکات زیر برای توابع یک‌به‌یک حائز اهمیت می‌باشند:

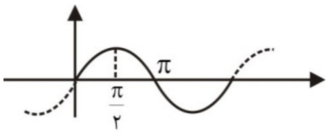
الف) توابع ثابت، زوج و متناوب یک‌به‌یک نیستند.

ب) یک تابع پیوسته، یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر اکیداً یکنوا باشد.

مثال ۲۴: یک‌به‌یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.

۱) $y = \sin x$

با توجه به نمودار تابع که به‌صورت

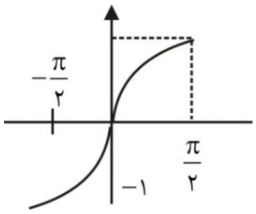


می‌باشد واضح است تابع یک‌به‌یک نیست.

ضمناً $y = \sin ۰ = \sin \pi = ۰$ یعنی $(۰,۰)$, $(۰,\pi)$ نقاط این تابع هستند پس واضح است تابع یک‌به‌یک نیست.

۲) $y = \sin x$ و $x \in \left[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۴}\right]$

با محدود کردن دامنه تابع، نمودار آن به‌صورت



می‌باشد که واضح است تابع یک‌به‌یک است.

۳) $y = e^x$

چون $y' = e^x > ۰$ پس تابع اکیداً صعودی است پس یک‌به‌یک است.

٤) $y = x^۲ e^x$

باید از تساوی $y_۱ = y_۲$ نتیجه بگیریم $x_۱ = x_۲$ تا نشان دهیم تابع یک‌به‌یک است اما:

$$y_۱ = y_۲ \Rightarrow \quad x_۱^۲ e^{x_۱} = x_۲^۲ e^{x_۲} \Rightarrow \quad x_۱^۲ = x_۲^۲ \Rightarrow x_۱ = \pm x_۲$$

پس تابع یک‌به‌یک نمی‌باشد.

٥) $y = \sqrt{x + |x|}$

$$y_۱ = y_۲ \Rightarrow \sqrt{x_۱ + |x_۱|} = \sqrt{x_۲ + |x_۲|} \Rightarrow x_۱ + |x_۱| = x_۲ + |x_۲| \Rightarrow |x_۱| = |x_۲| \Rightarrow x_۱ = \pm x_۲ \Rightarrow$$ یک‌به‌یک نیست

٦) $y = x + \sqrt{x}$

$y' = ۱ + \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow y' > ۰ \Rightarrow$ اکیداً صعودی $\Rightarrow$ یک‌به‌یک

تابع معکوس و معکوس تابع

با جابه‌جا کردن دامنه و برد یک تابع رابطه جدیدی به‌دست می‌آید که به آن معکوس تابع می‌گوئیم. اگر این رابطه خود نیز یک تابع باشد به‌آن تابع معکوس گوئیم و این دو تابع را معکوس یکدیگر می‌نامیم.

معکوس تابع $y = f(x)$ را با $y^{-۱} = f^{-۱}(x)$ نمایش می‌دهیم.

به عبارت دیگر اگر تابع f را به عنوان مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب در نظر بگیریم، در تابع $f^{-۱}$ جای مولفه‌های f عوض می‌شود یعنی داریم:

$$f^{-۱} = \{(x,y) \mid y = f(x)\}$$

نکته

دامنه تابع برابر برد تابع معکوسش $\left(D_f = R_{f^{-۱}}\right)$ و برد تابع با دامنه تابع معکوسش $\left(R_f = D_{f^{-۱}}\right)$ برابر است.

نکته

اگر تابعی یک‌به یک باشد، g را معکوس f گویند هر گاه:

$$fog(x) = gof(x) = x$$

معکوس تابع f را با $f^{-۱}$ نمایش داده و داریم:

$$f^{-۱}(f(x)) = f\left(f^{-۱}(x)\right) = x$$

ریاضی مدیریت

نکته نمودار تابع f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ متقارن می‌باشند.

نکته

$$(fog)^{-1}(x)=g^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)$$

نکته معکوس تابعی فرد یک تابع فرد است.

قضیه: یک تابع معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر یک به یک باشد.

مثال ۲۵: تابع معکوس $y=\frac{۴x-۳}{x+۲}$ ، دامنه و برد آن را بدست آورید.

$$y=\frac{۴x-۳}{x+۲}\Rightarrow yx+۲y=۴x-۳\Rightarrow yx-۴x=-۳-۲y$$

$$x(y-۴)=-۳-۲y\Rightarrow x=\frac{۳+۲y}{۴-y}$$

حال برای نوشتن تابع معکوس به‌جای x قرار دهید $f^{-1}(x)$ و به‌جای y قرار دهید x، پس داریم:

$$f^{-1}(x)=\frac{۳+۲x}{۴-x}\ ,D_{f^{-1}}=R_f=\mathbb{R}-\{۴\},D_f=R_{f^{-1}}=R-\{-۲\}$$

نکته همان‌طور که در مثال بالا دیدید برای یافتن معکوس یک تابع x را برحسب y می‌یابیم و در نهایت به‌جای x قرار می‌دهیم $f^{-1}(x)$ و به‌جای y قرار می‌دهیم x.

نکته $fof^{-1}(x)=f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ و $f^{-1}of(x)=f^{-1}(f(x))=x$

مثال ۲۶: اگر $x>۰$ ، $f(x)=x-\frac{۱}{x}$ ، $f^{-1}\left(\frac{۳}{۲}\right)$ کدام است؟ *(کارشناسی ارشد – سراسری حسابداری)*

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۲

حل: گزینه ۴ راه‌حل اول: ابتدا $f^{-1}(x)$ را می‌یابیم:

$$y=x-\frac{۱}{x}=\frac{x^۲-۱}{x}\Rightarrow y=\frac{x^۲-۱}{x}\Rightarrow yx=x^۲-۱$$

$$\Rightarrow x^۲-yx=۱\Rightarrow x^۲-yx+\frac{y^۲}{۴}-\frac{y^۲}{۴}=۱\Rightarrow\left(x-\frac{y}{۲}\right)^۲=۱+\frac{y^۲}{۴}$$

$$x-\frac{y}{۲}=\pm\sqrt{۱+\frac{y^۲}{۴}}\Rightarrow x=\frac{y}{۲}\pm\sqrt{۱+\frac{y^۲}{۴}}\xrightarrow{x>۰}x=\frac{y}{۲}+\sqrt{۱+\frac{y^۲}{۴}}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{۲}+\sqrt{۱+\frac{x^۲}{۴}}\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{۳}{۲}\right)=۲\Rightarrow$$

راه‌حل دوم:

$$f(x)=x-\frac{۱}{x}\ ,\ x>۰\Rightarrow f^{-۱}\left(\frac{۳}{۲}\right)=?$$

نکته مهم: هرگاه ضابطه $y=f(x)$ داده شده باشد و مقدار $f^{-۱}(a)$ را بخواهند کافی‌ست قرار دهیم $f(x)=a$ و x را از این رابطه بیابیم:

$$\frac{۳}{۲}=f(x)\Rightarrow\frac{۳}{۲}=x-\frac{۱}{x}\Rightarrow\frac{۳}{۲}=\frac{x^۲-۱}{x}\Rightarrow ۲x^۲-۳x-۲=۰$$

با حل این معادله چون $\Delta=۹-۴(۲)(-۲)=۲۵$ داریم:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۳\pm۵}{۴}=۲,-\frac{۱}{۲}$$

چون در صورت سؤال قید شده $x>۰$ پس $x=-\frac{۱}{۲}$ قابل قبول نیست و $x=۲$ جواب مسأله می‌باشد.

مثال ۲۷: اگر $x>۱$ و $f(x)=x^۲-۲x+۴$ باشد آنگاه $f^{-۱}(x)$ کدام است؟ *(کارشناسی ارشد ــ سراسری مدیریت)*

۱) $۱+\sqrt{x-۳}$ ۲) $۱+\sqrt{x+۳}$ ۳) $۱\pm\sqrt{x-۳}$ ۴) $-۱+\sqrt{x-۳}$

حل: گزینه ۱ راه‌حل اول:

$$y=x^۲-۲x+۴=(x-۱)^۲+۳\Rightarrow y-۳=(x-۱)^۲\Rightarrow x-۱=\pm\sqrt{y-۳}$$

$$\Rightarrow x=۱\pm\sqrt{y-۳}\xrightarrow{x>۱}x=۱+\sqrt{y-۳}\Rightarrow f^{-۱}(x)=۱+\sqrt{x-۳}$$

راه‌حل دوم: حل تستی

تذکر مهم: اگر (x,y) نقطه‌ای صادق در $f(x)$ باشد $(y=f(x))$ آنگاه (y,x) در $f^{-۱}(x)$ صدق می‌کند یعنی $f^{-۱}(y)=x$.

چون $f(۲)=۴$ یعنی $(۲,۴)$ در $f(x)$ صادق است و تنها گزینه‌ای که $(۴,۲)$ در آن صادق است گزینه باشد زیرا:

$$۱+\sqrt{۴-۳}=۱+\sqrt{۱}=۲$$

مثال ۲۸: تابع $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۲}$ مفروض است. نمودار $f^{-۱}(x)$ محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ *(کارشناسی ارشد ــ مدیریت شهری)*

۱) -۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

حل: راه‌حل اول:

$$y=\frac{۲x-۱}{x+۲}\Rightarrow xy+۲y=۲x-۱\Rightarrow x(y-۲)=-۱-۲y$$

$$\Rightarrow x=\frac{۱+۲y}{۲-y}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۱+۲x}{۲-x}\xrightarrow{x=۰}f^{-۱}(۰)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow$$ گزینه ۳ صحیح است

راه‌حل دوم: نمودار $f^{-۱}$ محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند یعنی حاصل $f^{-۱}(۰)$ را بیابید. پس چون ضابطه $f(x)$ داده شده و $f^{-۱}(۰)$ مدنظر است. گزینه ۳ صحیح است $\Leftarrow ۰=\frac{۲x-۱}{x+۲}\Rightarrow ۲x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$

مثال ۲۹: اگر $f(x)=\ln\frac{x+۱}{x}$ باشد آنگاه $f^{-۱}(۲)$ کدام است؟ *(کارشناسی ارشد ــ سراسری اقتصاد)*

۱) $\frac{۱}{e^۲-۱}$ ۲) $e^۲+۱$ ۳) $\ln\frac{۳}{۲}$ ۴) $\ln\frac{۲}{۳}$

حل: گزینه ۱ سعی کنید سؤال را از روش تشریحی حل کنید. حال به حل تستی آن می‌پردازیم:

$$2=\ln\frac{x+1}{x}\Rightarrow \ln e^2=\ln\frac{x+1}{x}\Rightarrow e^2=\frac{x+1}{x}\Rightarrow e^2x=x+1\Rightarrow x(e^2-1)=1$$

$\Rightarrow x=\frac{1}{e^2-1}\Rightarrow$ گزینه ۱ صحیح است

*مثال ۳۰: اگر $f(x)=\frac{e^x+2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ آنگاه $f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) ۰

حل: گزینه ۴ باید x را از رابطه $\frac{e^x+2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{3}{2}$ بیابیم. در عباراتی که بطور همزمان e^x و e^{-x} وجود دارد گاهی بهتر است صورت و مخرج کسر را در e^x ضرب کنیم پس:

$$\frac{3}{2}=\frac{e^x+2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\times\frac{e^x}{e^x}\Rightarrow\frac{3}{2}=\frac{e^{2x}+2}{e^{2x}+1}\Rightarrow 3e^{2x}+3=2e^{2x}+4$$

$\Rightarrow e^{2x}=1\Rightarrow e^{2x}=e^0\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0\Rightarrow$ گزینه ۴ صحیح است.

تابع پوشا

تابع $\begin{cases}f:A\to B\\ y=f(x)\end{cases}$ را یک تابع پوشا می‌نامیم هرگاه برد تابع f تمام مجموعه B را شامل شود، یعنی هر گاه $R_f=B$.

*مثال ۳۱: پوشا بودن یا نبودن توابع زیر را بررسی کنید.

۱) $f:Q\to Q$
$y=x$

حل: x تنها مقادیر گویا را می‌تواند اختیار کند و چون $y=x$ پس برد تابع نیز مجموعه اعداد گویاست پس تابع پوشاست.

۲) $f:R\to R$
$y=x^2+2x+6$

حل: دقت کنید y را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$y=x^2+2x+1+5=(x+1)^2+5$$

چون $(x+1)^2\ge 0$ پس $(x+1)^2+5\ge 5$ پس $y\ge 5$ لذا برد y برابر است با $[5,+\infty)$ چون برد تابع کل مجموع $\mathbb{R}$ را نمی‌پوشاند پس y پوشا نیست.

تابع یکنوا

این بخش را در فصل مشتق به تفصیل بحث خواهیم کرد. در این جا مختصری به تعریف توابع یکنوا می‌پردازیم:

تعریف: اگر $x_1\ge x_2$ آنگاه $y_1\ge y_2$ تابع y را صعودی گوئیم.

همچنین اگر $x_1\ge x_2$ آنگاه $y_1\le y_2$ تابع y را نزولی گوئیم.

به توابع صعودی یا نزولی توابع یکنوا گفته می‌شود.

نکته

برای تشخیص یکنوایی (صعودی یا نزولی بودن) یک تابع، کافی است از آن مشتق بگیرید.

۱) اگر در $[a,b]$ داشته باشیم $f'\ge 0$ آنگاه **f** صعودی و اگر $f'\le 0$ آنگاه **f** نزولی است.

یادآوری تعیین علامت چندجمله‌ای‌ها

$y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a$ را یک چند جمله‌ای درجه n می‌نامیم. $x_\circ$ را ریشه یک چند جمله‌ای نامیم هرگاه $y(x_\circ)=\circ$.

– در حالت خاص $y=ax+b$ (دو جمله‌ای درجه ی اول)، ریشه به‌صورت زیر محاسبه می‌شود، $ax+b=\circ$ پس $x=-\frac{b}{a}$ حال می‌توان $ax+b$ را به‌صورت زیر تعیین علامت کرد:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	مخالف علامت a	$\circ$	موافق علامت a

※ **مثال ۳۲:** علامت $y=-۲x+۳$ در چه فاصله‌ای مثبت است؟

$$y=\circ \Rightarrow y=-۲x+۳=\circ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

x	$-\infty$	$\frac{۳}{۲}$	$+\infty$
$-۲x+۳$	$\underbrace{+}_{ج}$	$\circ$	-

پس y در فاصله $\left(-\infty,\frac{۳}{۲}\right)$ دارای علامت مثبت می‌باشد.

در حالت خاص $y=ax^۲+bx+c$ (سه جمله‌ای درجه ۲) برای یافتن ریشه اقدامات زیر را انجام دهید.

$\Delta=b^۲-۴xc$ در این‌صورت:

- اگر $\Delta>\circ$ آنگاه ریشه‌ها به‌صورت $x_{۱,۲}=-\frac{b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$ می‌باشد.
- اگر $\Delta=\circ$ آنگاه ریشه مضاعف از رابطه $x=-\frac{b}{۲a}$ محاسبه می‌گردد.
- اگر $\Delta<\circ$ آنگاه معادله ریشه حقیقی ندارد.

اما برای تعیین علامت سه جمله‌ای درجه ۲ از حالات زیر بهره ببرید:

الف) $\Delta>\circ$:

(فرض کنید $x_۱<x_۲$)

x	$-\infty$	$x_۱$		$x_۲$	$+\infty$
y	موافق علامت a	$\circ$	مخالف علامت a	$\circ$	موافق علامت a

ب) $\Delta=\circ$:

x	$-\infty$	x	$+\infty$
y	موافق علامت a	$\circ$	موافق علامت a

ج) $\Delta < 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
y	همواره موافق علامت a	

*مثال ۳۳: دامنه تابع $y=\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2-6x+5}}$ را بیابید.

چون زیر رادیکال نباید منفی شود به دنبال مقادیری از x هستیم که $\dfrac{x^2-4}{x^2-6x+5}\geq 0$ پس:

$x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2$ ، $x^2-6x+5=0 \Rightarrow x=1,5$ ریشه‌های صورت

x		-2		1		2		5	
x^2-4	+	0	−		−	0	+		+
x^2-6x+5	+		+	0	−		−	0	+
$\dfrac{x^2-4}{x^2-6x+5}$	+ جواب		−	تعریف نشده	+ جواب		−	تعریف نشده	+ جواب

پس $D_y=(-\infty,-2]\cup(1,2]\cup(5,+\infty)$

نکته

در معادله $ax^2+bx+c=0$ اگر $a+b+c=0$ آنگاه ریشه‌ها به‌صورت $\left.\begin{matrix} x=\dfrac{c}{a} \\ x=1 \end{matrix}\right\}$ می‌باشند.

نکته

در معادله $ax^2+bx+c=0$ همواره داریم: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}\ ,\ x_1.x_2=\dfrac{c}{a}$

توابع زوج و فرد

تعریف تابع زوج: تابع $f(x)$ را زوج می‌نامیم، هرگاه دامنه آن نسبت به مبدأ متقارن باشد (یعنی به ازای هر $x\in D_f$ آنگاه $-x\in D_f$) و داشته باشیم: $\forall x\in D_f\ ,\ f(-x)=f(x)$

تعریف تابع فرد: تابع $f(x)$ را فرد می‌نامیم، هرگاه دامنه آن نسبت به مبدأ متقارن باشد $(\forall x\in D_f \to -x\in D_f)$ و داشته باشیم:
$\forall x\in D_f\ ,\ f(-x)=-f(x)$

نکات توابع زوج و فرد:

۱) توابع زوج نسبت به محور yها متقارن و توابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن می‌باشند.

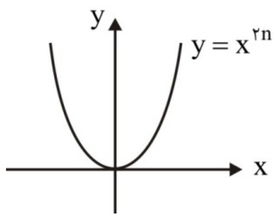
*مثال ۳۴: زوج و فرد بودن توابع: $f(x)=x^{2n}$ و $h(x)=x^{2n+1}$ ، $g(x)=0$ و $p(x)=x^2+x^3$ را بررسی نمائید.

حل:

الف) $f(x)=x^{2n}$: دامنه $f(x)$ برابر همه مجموعه اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) است و داریم:

$$f(-x)=(-x)^{2n}=\left((-x)^2\right)^n=\left(x^2\right)^n=x^{2n}=f(x)\Rightarrow f(-x)=f(x)$$

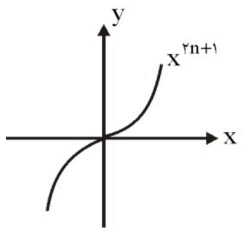
پس $f(x)$ یک تابع زوج است. ضمناً همان‌طور که از نمودار تابع $f(x)$ پیداست $f(x)$ نسبت به محور y ها متقارن است پس زوج می‌باشد.



ب) $h(x)=x^{2n+1}$: دامنه $h(x)$ برابر $\mathbb{R}$ است (متقارن می‌باشد) و داریم:

$$h(-x)=(-x)^{2n+1}=-(x)^{2n+1}=-h(x)\Rightarrow h(-x)=-h(x)$$

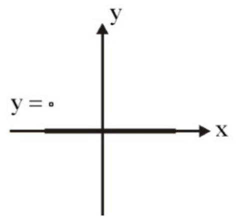
پس $h(x)$ یک تابع فرد است. ضمناً همان‌طور که از نمودار تابع $h(x)$ پیداست $h(x)$ نسبت به مبدأ مختصات متقارن است پس فرد می‌باشد.



ج) $g(x)=0$: دامنه $g(x)$ برابر $\mathbb{R}$ است (متقارن می‌باشد) و داریم:

$$g(-x)=0=-g(x)=g(x)\Rightarrow g(-x)=g(x)\ ,\ g(-x)=-g(x)$$

پس $g(x)$ هم زوج و هم فرد است. ضمناً از نمودار $g(x)=0$ پیداست که هم نسبت به مبدأ مختصات و هم نسبت به محور yها متقارن است؛ یعنی هم زوج و هم فرد است.



د) $p(x)=x^2+x^3$. دامنه $p(x)$ برابر $\mathbb{R}$ است (متقارن می‌باشد.) ولی:

$$p(-x)=(-x)^2+(-x)^3=x^2-x^3$$

$p(-x)\neq -p(x)$ پس p فرد نیست ضمناً $p(-x)\neq p(x)$ پس زوج نیست؛ لذا $p(x)$ نه زوج و نه فرد است.

۲) شرط لازم و نه کافی برای فرد بودن تابع $f(x)$ آن است که یا $f(0)=0$ یا $f(0)$ موجود نباشد.

۳) حاصل‌ضرب و تقسیم یک تابع زوج و یک تابع فرد، تابعی فرد است اما حاصلضرب و تقسیم دو تابع زوج (یا دو تابع فرد) تابعی زوج است.

٤) مجموع (تفاضل) دو تابع زوج، تابعی زوج و مجموع (تفاضل) دو تابع فرد، تابعی فرد است.

۵) مجموع (تفاضل) یک تابع زوج و یک تابع فرد (که هیچ‌کدام تابع ثابت صفر نمی‌باشند) تابعی است نه زوج و نه فرد.

٦) تابع $f(x)=\log\left(\dfrac{ax+b}{ax-b}\right)$ فرد است.

۷) تابع ثابت، $f(x)=c$ ، یک تابع زوج است.

*مثال ۳۵: کدام تابع بر روی دامنه خودش نه زوج است و نه فرد؟ *(کارشناسی ارشد – سراسری مدیریت)*

۱) $f(x)=x.|x|$ ۲) $f(x)=|x|.\cos x$ ۳) $f(x)=x-\frac{1}{x^2}$ ۴) $f(x)=\log\frac{1+x}{1-x}$

حل: گزینه ۳

$$f(x)=x-\frac{1}{x^2}\Rightarrow f(-x)=-x-\frac{1}{(-x)^2}=-x-\frac{1}{x^2}=-\left(x+\frac{1}{x^2}\right)$$

$\Rightarrow f(-x)\neq f(x)\ ,\ f(-x)\neq -f(x)\Rightarrow$ $f(x)$ نه زوج و نه فرد است

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱ $:f(x)=x|x|\Rightarrow f(-x)=(x|-x|)=-f(x)\Rightarrow$ فرد است

گزینه ۲ $:f(x)=|x|\cos x\Rightarrow f(-x)=|-x|.\cos(-x)=|x|\cos x=f(x)\Rightarrow$ زوج است

گزینه ۴ $:f(x)=\log\frac{1+x}{1-x}\Rightarrow f(-x)=\log\frac{1-x}{1+x}=\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\log\frac{1+x}{1-x}\Rightarrow$ فرد است.

ضمناً دامنه گزینه‌های ۱ و ۲ برابر $\mathbb{R}$ و گزینه ۴ برابر (۱ و ۱-) می‌باشند که متقارن هم هستند.

*مثال ۳۶: اگر **f** تابعی حقیقی باشد، کدام تابع بر روی دامنه خود نه زوج است و نه فرد؟ *(کارشناسی ارشد – سراسری اقتصاد)*

۱) $D_f=(-1,1):f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$ ۲) $D_f=\mathbb{R}^+:f(x)=x^2$

۳) $D_f=\mathbb{R}:f(x)=x\cos x$ ۴) $D_f=\mathbb{R}:f(x)=x\sin x$

حل: گزینه ۲

دقت کنید در گزینه ۲ دامنه تابع $f(x)$ به $\mathbb{R}^+$ محدود شده است؛ یعنی دامنه تابع متقارن نمی‌باشد، پس این تابع x^2 با دامنه $\mathbb{R}^+$ نه زوج است و نه فرد. ضمناً گزینه‌های ۱ و ۳ توابعی فرد و گزینه ۴ یک تابع زوج است.

*مثال ۳۷: تابع با ضابطه $f(x)=|x-1|-|x+1|$ چگونه است؟ *(کارشناسی ارشد – سراسری حسابداری)*

۱) فرد ۲) زوج ۳) هم فرد و هم زوج ۴) نه فرد و نه زوج

حل: گزینه ۱

دامنه تابع $\mathbb{R}$ می‌باشد (متقارن است). ضمناً داریم:

$$f(-x)=|-x-1|-|-x+1|=|-(x+1)|-|1-x|=|x+1|-|x-1|=-f(x)\Rightarrow f(-x)=-f(x)$$

۸) هر گاه f، تابعی با دامنه متقارن باشد آن را می‌توان به صورت مجموع یک تابع فرد و یک تابع زوج نوشت:

$$f(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))+\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$$

که در آن f یک تابع دلخواه با دامنه متقارن، $\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$ یک تابع زوج و $\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$ یک تابع فرد است.

تساوی دو تابع

تعریف: دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را برابر می‌گوییم هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) دامنه دو تابع با هم برابر باشند: $D_f=D_g$

۲) به ازای هر عضو از دامنه، ضابطه آنها نیز با هم برابر باشند: $\forall x\in D_f=D_g\Rightarrow f(x)=g(x)$

تابع

*مثال ۳۸: بررسی کنید آیا توابع زیر با هم برابر هستند یا خیر؟

$$۱)\begin{cases} f(x)=۱ \\ g(x)=\dfrac{x}{x} \end{cases}$$

حل: این دو تابع با هم برابر نیستند، زیرا دامنه یکسانی ندارند. دامنه تابع $f(x)=۱$، $\mathbb{R}$ می‌باشد ولی دامنه تابع $g(x)=\dfrac{x}{x}$ برابر $\mathbb{R}-\{۰\}$ است لذا $f(x)\neq g(x)$.

$$۲)\begin{cases} f(x)=\log x^۲ \\ g(x)=۲\log x \end{cases}$$

حل: این دو تابع نیز با هم برابر نیستند زیرا $D_f=\{x\,|\,x\in R, x\neq ۰\}=R-\{۰\}$ اما دامنه تابع $g(x)$ اعداد حقیقی مثبت یعنی $D_g=R^+$ است؛ پس $D_f\neq D_g$.

$$۳)\begin{cases} f(x)=\log x^۲ \\ g(x)=۲\log|x| \end{cases}$$

حل: این دو تابع با هم برابرند زیرا هم دامنه آنها با هم برابر است: $D_f=D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$
و هم ضابطه آنها برابرند پس: $f(x)=g(x)$

اعمال اصلی روی توابع

مجموع، تفاضل، حاصلضرب و تقسیم دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ با توجه به دامنه‌شان به صورت زیر خواهد بود:

$$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)\ ,\ D_{f\pm g}=D_f\cap D_g$$
$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)\ ,\ D_{f\times g}=D_f\cap D_g$$
$$(f/g)(x)=f(x)/g(x)\ \text{و}\ g\neq ۰,\ D_{f/g}=(D_f\cap D_g)-\{x\,|\,g(x)=۰\}$$

*مثال ۳۹: فرض کنید $f(x)=\{(۱,۰)(۲,۳)(۴,۶)(۵,۸)\}$ و $g(x)=\{(۱,۲)(۴,۳)(۹,۸)\}$، اعمال اصلی روی توابع $f(x)$ و $g(x)$ را انجام دهید.

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\{(۱,۲+۰)(۴,۳+۶)\}=\{(۱,۲)(۴,۹)\}$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\{(۱,۲-۰)(۴,۳-۶)\}=\{(۱,۲)(۴,-۳)\}$$
$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=\{(۱,۲\times ۰)(۴,۳\times ۶)\}=\{(۱,۰)(۴,۱۸)\}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=f(x)/g(x)=\left\{\left(۱,\frac{۰}{۲}\right),\left(۴,\frac{۶}{۳}\right)\right\}=\{(۱,۰),(۴,۲۱)\}$$
$$(g/f)(x)=g(x)/f(x)=\left\{\left(۴,\frac{۳}{۶}\right)\right\}=\left\{\left(۴,\frac{۱}{۲}\right)\right\}$$

همانطور که در مثال قبل دقت کردید، اعمال توابع روی توابعی به صورت زوج مرتب بدین‌سان هستند که اعمال روی مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌هایی انجام می‌گیرد که دارای مؤلفه اول برابر هستند.

ترکیب توابع

تعریف: ترکیب دو تابع $\begin{cases} g:A\to B \\ y=g(x) \end{cases}$ و $\begin{cases} f:B\to C \\ y=f(x) \end{cases}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "fog"'] & B \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

$$fog:A\to C$$
$$fog(x)=f(g(x))$$

و دامنه آن برابر است با:

ریاضی مدیریت

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

مثال ۴۰: اگر $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=2x+1$ باشد، $f(g(x))$ کدام است؟ *(کارشناسی ارشد ـ آزاد حسابداری)*

۱) $2x^2-1$ ۲) $4x(x+1)$ ۳) $2x^2+1$ ۴) $4x^2+1$

حل: گزینه ۲

$$f(g(x))=(2x+1)^2-1=4x^2+1+4x-1=4x^2+4x=4x(x+1)$$

پس برای یافتن $f(g(x))$ در ضابطه $f(x)$ هر کجا که x وجود داشت به جای آن $g(x)$ قرار می‌دهیم.

مثال ۴۱: اگر $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=\frac{x+1}{x-2}$، $fog(x)$ و $gof(x)$ و دامنه آنها را بیابید.

$$fog(x)=f(g(x))=\frac{1}{\frac{x+1}{x-2}}=\frac{x-2}{x+1}$$

$$D_f=\mathbb{R}-\{0\}\ \ ,\ \ D_g=\mathbb{R}-\{2\}$$

$$D_{fog(x)}=\{x \mid D_g\in g(x)\in D_f\}=\ D_{fog(x)}=\{x \mid D_g\in g(x)\in D_f\}=\{\overbrace{x\in\mathbb{R}-\{2\}}^{x\neq 2} \mid \overbrace{\frac{x+1}{x-2}\in\mathbb{R}-\{0\}}^{\frac{x+1}{x-2}\neq 0}\}=\left\{x\neq 2 \mid \frac{x+1}{x-2}\neq 0\right\}$$

$$=\{x\neq 2, x\neq -1\}=\mathbb{R}-\{2,-1\}$$

دقت کنید برای یافتن دامنه $fog(x)$ حتما باید از تعریف آن استفاده کنید و نمی‌توانید ضابطه $fog(x)$ را بیابید و دامنه آن را به عنوان D_{fog} معرفی کنید.

$$gof(x)=g(f(x))=\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-2}=\frac{1+x}{1-2x}$$

$$D_{gof(x)}=\left\{x\neq 0 \mid \frac{1}{x}\neq 2\right\}\Rightarrow D_{gof}=\mathbb{R}-\left\{0,\frac{1}{2}\right\}$$

نکات:

نکته

دقت کنید یک راه حل تستی برای یافتن دامنه ترکیب توابع این است که از اولین مرحله که از **f** یا **g** خارج می‌شویم، دامنه‌های موجود را بیابیم، نه در مرحله بعدی و نه بعد از ساده کردن. برای روشن‌تر شدن مطلب به مثال قبل (۴۱) در هر دو قسمت دقت کنید. برای یافتن D_{fog} بدون توجه به تعریف و با استفاده از این نکته تستی وقتی که $f(g(x))$ را تشکیل می‌دهیم داریم:

$$f(g(x))=\frac{1}{\frac{x+1}{x-2}}$$

حال عبارت فوق را ساده نکنید و دامنه‌ها را بیابید. در کسر بزرگ‌تر $\frac{1}{\frac{x+1}{x-2}}$ باید مخرج مخالف صفر باشد؛ پس $\frac{x+1}{x-2}\neq 0$ یعنی $x\neq 2$ (۱) و در کسر کوچک‌تر هم مخرج باید مخالف صفر باشد یعنی در $\frac{x+1}{x-2}$ باید، $x-2\neq 0$ پس $x\neq 2$ (۲) حال اشتراک (۱) و (۲) برابر است با $\mathbb{R}-\{-1,2\}$. استفاده از این روش منوط به این شرط است که هیچ ساده‌کردنی نباید رخ دهد.

برای یافتن دامنه **gof** داریم: $gof(x)=\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-2}$ ، پس مخرج کسرهای مشخص‌شده نباید صفر شود؛ یعنی $x\neq 0$ (۱)، ضمناً مخرج کسر اصلی هم نباید صفر شود یعنی $\frac{1}{x}-2\neq 0$ پس $x\neq\frac{1}{2}$ (۲) و دامنه **gof** برابر خواهد شد با $(1)\cap(2)=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2},0\right\}$

*مثال ۴۲: اگر داشته باشیم $f(x)=\frac{2e^x-1}{e^x+1}$ و $g(x)=Lnx$، $fog(2)$ کدام است؟ (کارشناسی ارشد ـ سراسری حسابداری)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

حل: گزینه ۳

راه حل اول: ابتدا $fog(x)$ را بیابید و به جای x قرار دهید ۲، پس داریم:

$$fog(x)=f(g(x))=\frac{2e^{Lnx}-1}{e^{Lnx}+1}=\frac{2x-1}{x+1}\Rightarrow fog(2)=\frac{2\times 2-1}{2+1}=\frac{3}{3}=1$$

راه حل دوم: $g(2)$ را بیابید و مقدار آن را در f قرار دهید:

$$g(2)=Ln2$$

$$fog(2)=f(g(2))=f(Ln2)=\frac{2e^{\ln 2}-1}{e^{\ln 2}+1}=\frac{2\times 2-1}{2+1}=\frac{3}{3}=1$$

نکته

$$f^{-1}of(x)=x\ ,\ fof^{-1}(x)=x$$

*مثال ۴۳: اگر $f(x)=\frac{1}{x+1}$ باشد، $fof^{-1}(4)$ کدام است؟ (کارشناسی ارشد ـ سراسری حسابداری)

۱) ۵ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{1}{5}$

حل: گزینه ۳

$$fof^{-1}(x)=x\Rightarrow fof^{-1}(4)=4$$

*مثال ٤٤: اگر $f(x)=\frac{1}{x+1}$، آنگاه:

الف) $fofof(1)$

ب) $f^{-1}ofof^{-1}(1)$ را محاسبه کنید.

حل:

الف) راه‌حل اول:

$$fofof(x)=f(f(f(x)))$$

$$fof(x)=f(f(x))=\frac{1}{\frac{1}{x+1}+1}=\frac{x+1}{x+2}$$

$$fofof(x)=f(f(f(x)))=f\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=\frac{1}{\frac{x+1}{x+2}+1}=\frac{x+2}{2x+3}$$

$$\Rightarrow fofof(1)=\frac{1+2}{2+3}=\frac{3}{5}$$

راه حل دوم:

$$\text{fofof}(۱)=f(f(f(۱)))\xrightarrow[]{f(۱)=\frac{۱}{۲}}f\left(f\left(\frac{۱}{۲}\right)\right)\xrightarrow[]{f(۱)=\frac{۲}{۳}}f\left(\frac{۲}{۳}\right)=\frac{۱}{\frac{۲}{۳}+۱}=\frac{۳}{۵}$$

ب)

$$f^{-۱}\left(f\left(f^{-۱}(۱)\right)\right)\xrightarrow[]{f\left(f^{-۱}(x)\right)=x}f^{-۱}(۱)$$

نکته تستی: چون ضابطه $f(x)$ داده شده $f^{-۱}(۱)$ را می‌خواهند، پس $f(x)=۱$ قرار داده و x حاصل پاسخ می‌باشد.

$$f(x)=\frac{۱}{x+۱},\ f^{-۱}(۱)=?\Rightarrow ۱=\frac{۱}{x+۱}\Rightarrow x+۱=۱\Rightarrow x=۰$$

*مثال ۴۵: اگر $f(x)=\frac{۳-x}{۲+x}$ و $\text{fog}(x)=\frac{۴+x}{۲x}$، آنگاه $g(x)$ کدام است؟ *(کارشناسی ارشد – سراسری مدیریت و حسابداری)*

۱) $\frac{۴x-۸}{۳x+۴}$ ۲) $\frac{۳x+۴}{۲x+۱}$ ۳) $\frac{۳x-۴}{۲x+۵}$ ۴) $\frac{۲x+۲}{۲x-۱}$

حل: گزینه ۱

$$\text{fog}(x)=\frac{۴+x}{۲x}\Rightarrow f(g(x))=\frac{۳-g(x)}{۲+g(x)}\Rightarrow\frac{۴+x}{۲x}=\frac{۳-g(x)}{۲+g(x)}$$

$$\Rightarrow ۸+۴g(x)+۲x+xg(x)=۶x-۲xg(x)$$

$$\Rightarrow ۸+g(x)(۴+۳x)-۴x=۰\Rightarrow g(x)=\frac{۴x-۸}{۴+۳x}$$

نکته

همان‌طور که در *مثال قبل دقت کردید اگر ضابطه $\text{fog}(x)$ و $f(x)$ در مسئله داده شده باشد و $g(x)$ مورد سؤال واقع شود برای محاسبه $g(x)$ باید $f(g(x))$ را بر حسب $g(x)$ نوشت و با $\text{fog}(x)$ داده شده در سؤال برابر قرار داد تا ضابطه $g(x)$ حاصل شود.

*مثال ۴۶: اگر f و g توابعی حقیقی در $\mathbb{R}$ باشند و داشته باشیم: $f(x)=\frac{۴+x}{۱-x}$ و $\text{fog}(x)=\frac{x}{۲+x}$، تابع $g(x)$ کدام است؟
(کارشناسی ارشد – سراسری اقتصاد)

۱) $\frac{۳-۲x}{x-۴}$ ۲) $\frac{۲+x}{x}$ ۳) $\frac{۴+۲x}{۲+x}$ ۴) $\frac{-۳x-۸}{۲+۲x}$

حل: گزینه ۴

$$\text{fog}(x)=f(g(x))=\frac{۴+g(x)}{۱-g(x)}=\frac{x}{۲+x}$$

$$\Rightarrow ۸+۴x+۲g(x)+xg(x)=x-xg(x)$$

$$۸+۳x+g(x)(۲+۲x)=۰\Rightarrow g(x)=\frac{-۸-۳x}{۲+۲x}$$

تابع متناوب

تعریف: تابع f را متناوب می‌نامیم هرگاه عدد $T>۰$ موجود باشد به طوری‌که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $f(x+T)=f(x)$. ضمناً کوچک‌ترین عدد T را دوره تناوب اصلی تابع f می‌نامند.

نکات توابع متناوب:

۱- اگر T دوره تناوب تابع f باشد، برای هر مضرب صحیح T داریم: $f(x+nT)=f(x)$ که $n \in \mathbb{Z}$.

۲- به جز تابع ثابت، سایر چندجمله‌ای‌ها متناوب نیستند. توابع ثابت متناوبند ولی دارای دوره تناوب اصلی نمی‌باشند.

۳- اگر f یک تابع متناوب با دوره تناوب اصلی T باشد، تابع $f(ax+b)$ نیز متناوب با دوره تناوب اصلی $\frac{T}{|a|}$ است.

۴- دوره تناوب توابع زیر را به خاطر بسپارید:

$$\begin{cases} f(x)=\sin^{۲n}(ax+b) \\ f(x)=\cos^{۲n}(ax+b) \end{cases} , \begin{cases} f(x)=\tan^{n} ax \\ f(x)=\cot^{n} ax \end{cases} \Rightarrow T=\frac{\pi}{|a|}$$

$$\begin{cases} g(x)=\sin^{۲n+۱}(ax+b) \\ g(x)=\sin^{۲n+۱}(ax+b) \end{cases} \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|a|}$$

۵- دوره تناوب $nx-[nx]$ و $[nx]-[-nx]$ برابر $\frac{۱}{n}$ می‌باشد.

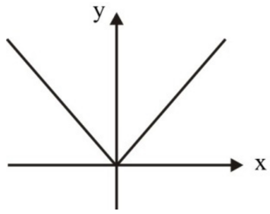
*مثال ۴۷: دوره تناوب اصلی $f(x)=\frac{\sin x-\sin ۲x}{\cos x-\cos ۲x}$ را به‌دست آورید.

حل:

$$f(x)=\frac{۲\sin(-\frac{x}{۲})\cos\frac{۳x}{۲}}{-۲\sin\frac{۳x}{۲}\sin(-\frac{x}{۲})}=-\cot\frac{۳x}{۲} \Rightarrow T=\frac{\pi}{|a|}=\frac{\pi}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۲\pi}{۳}$$

معرفی چند تابع خاص و مهم

تابع قدرمطلق: تابع قدرمطلق به صورت $|x|=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$ تعریف می‌شود و نمودار آن به صورت زیر می‌باشد:



نکات:

۱- دامنه تابع قدرمطلق $\mathbb{R}$ و برد آن $[۰,\infty)$ می‌باشد، این تابع یک به یک نمی‌باشد و در نقطه صفر مشتق‌پذیر نیست.

۲- نکات زیر از خواص قدرمطلق حاصل می‌شود:

۱) $|a|\geq ۰$

۲) $|a-b|=|b-a|$

۳) $x^۲=a^۲ \Leftrightarrow |x|=|a| \Leftrightarrow x=\pm a$

۴) $|a.b|=|a||b|$

۵) $\sqrt{a^۲}=|a|$

۶) $x^۲\leq a^۲ \Leftrightarrow |x|\leq|a| \Leftrightarrow -a\leq x\leq a$

۷) $|a/b|=\frac{|a|}{|b|}$ و $b\neq ۰$

۸) $|a^n|=|a|^n$

۹) $x^۲\geq a^۲ \Leftrightarrow |x|\geq|a| \Leftrightarrow x\geq a$ یا $x\leq -a$

۱۰) $|x|=a \Leftrightarrow x=\pm a$

۱۱) $|a+b|\leq|a|+|b|$

۱۲) $|a|-|b|\leq|a-b|$