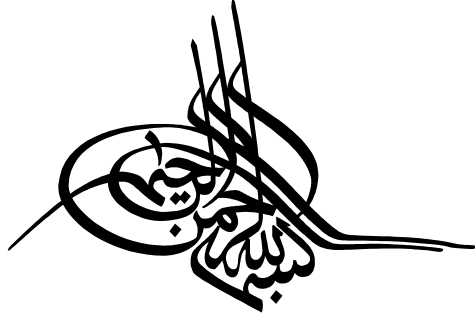




تئوری الاستیسیته و پلاستیسیته (مجموعه عمران)

مؤلف: علیرضا سلطانی

دکترا

سلطانی - علیرضا

تئوری الاستیسیته و پلاستیسیته (مجموعه عمران)

مشاوران صعود ماهان: ۱۴۰۱

۱۴۱ ص: جدول، نمودار (آمادگی آزمون دکتری عمران)

ISBN: 978-600-458-671-9

فهرست نویسی بر اساس اطلاعات فیبا.

فارسی - چاپ اول

الاستیسیته و پلاستیسیته (مجموعه عمران)

ج - عنوان

رده بندی کنگره:

۱۳۹۱ ت ۹ ۸۱۶۴ س / LB ۲۳۵۳

۳۷۸/۱۶۶۴

رده بندی دیویی

۲۷۳۸۴۱۳

کتابخانه ملی ایران

انتشارات مشاوران صعود ماهان



موسسه آموزش عالی آزاد
www.mahan.ac.ir

- ☐ نام کتاب: تئوری الاستیسیته و پلاستیسیته
- ☐ مولف: علیرضا سلطانی
- ☐ مدیران مسئول: هادی و مجید ستاری
- ☐ مسئول تولید: سمیه بیگی
- ☐ ناشر: مشاوران صعود ماهان
- ☐ نوبت و تاریخ چاپ: (چاپ اول) / ۱۴۰۱
- ☐ تیراژ: ۱۰۰۰ نسخه
- ☐ قیمت: ۲/۱۹۰/۰۰۰ ریال
- ☐ شابک: ISBN ۹۷۸-۶۰۰-۴۵۸-۶۷۱-۹

انتشارات مشاوران صعود ماهان: تهران - خیابان ولیعصر، بالاتر از تقاطع ولیعصر مطهری، پلاک ۲۰۵۰

تلفن: ۸۸۱۰۰۱۱۳ و ۸۸۴۰۱۳۱۳

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به موسسه آموزش عالی آزاد ماهان می باشد. و هرگونه اقتباس و کپی برداری از این اثر بدون اخذ مجوز پیگرد قانونی دارد.

مقدمه ناشر

بنام خدا

ایمان دارم که هر تغییر و تحول بزرگی در مسیر زندگی بدون تحول معرفت و نگرش میسر نخواهد بود. پس بیایید با اندیشه توکل، تفکر، تلاش و تحمل در توسعه دنیای فکریمان برای نیل به آرامش و آسایش توأمان اولین گام را برداریم. چون همگی یقین داریم دانایی، توانایی می آورد.

شاد باشید و دلی را شاد کنید

برادران سیاری

مقدمه مولف

تئوری الاستیسیته و پلاستیسیته یکی از اساسی‌ترین دروس رشته‌ی مهندسی عمران (گرایش مهندسی سازه) می‌باشد که برای آزمون دکتری از آن سوال طرح می‌شود. در کتاب حاضر، هر فصل شامل خلاصه درس، مثال‌ها و سوالات طبقه‌بندی شده می‌باشد. تنظیم مطالب در این کتاب به گونه‌ای است که خواننده‌ی آن می‌تواند با مطالعه‌ی متن، اولاً مفاهیم بنیادین را فرا گرفته و با بررسی نکات، مثال‌هایی که در انتهای هر مطلب آورده شده است دانش خود را ژرفای بیش‌تری بخشیده و بر توانایی‌های علمی و عملی خود در این زمینه بیفزاید و ثانیاً خود را به بهترین نحو برای شرکت در آزمون ورودی دکتری آماده سازد. سعی شده است منبعی قابل اطمینان در اختیار دانشجویان عزیز قرار داده شود و طبیعتاً با وجود تمام تلاش‌هایی که برای تدوین و گردآوری این کتاب صورت گرفته، خالی از نقص نخواهد بود. با این حال از همه‌ی عزیزان تقاضا داریم خطاهای ما را گوشزد کنند تا در آینده مجموعه‌ی بهتری فراهم گردد.

وظیفه‌ی خود می‌دانم از همه‌ی دست‌اندرکاران تهیه‌ی این کتاب که به‌نحوی در به‌ثمر رسیدن آن نقش موثر داشته‌اند قدردانی نمایم، هم‌چنین از مدیریت محترم موسسه‌ی ماهان، که کار چاپ و نشر آن‌را بر عهده داشتند تشکر فراوان نمایم. در انتها خداوند بزرگ را شاکرم که توانایی ارائه‌ی این مجموعه را به این بنده‌ی حقیر خود عنایت فرمود و علاوه بر آن صبر و متانت همسر را در زمان تالیف این کتاب پاس می‌دارم که با سعه‌ی صدر خود، امکان انجام این مهم را میسر نمود و حقیقتاً بدون مساعدت‌های ایشان به سرانجام رساندن این کتاب غیرممکن می‌نمود.

علیرضا سلطانی
a.soltani@tmu.ac.ir

فصل اول: تحلیل تنش و کرنش

۹	۱-۱ مقدمه
۹	۲-۱ تحلیل تنش
۹	۱-۲-۱ تعریف تنش
۱۱	۲-۲-۱ تانسور تنش
۱۴	۳-۲-۱ مولفه‌های تنش در یک صفحه با راستای اختیاری
۱۶	۴-۲-۱ تنش‌های اصلی و صفحات اصلی
۱۸	۵-۲-۱ تبدیل تنش
۲۰	۶-۲-۱ تنش‌های برشی ماکزیمم
۲۱	۷-۲-۱ معادلات دیفرانسیل تعادل
۲۵	۳-۱ تحلیل کرنش
۲۵	۱-۳-۱ مقدمه
۲۶	۲-۳-۱ کرنش محوری
۲۷	۳-۳-۱ کرنش زاویه‌ای یا برشی
۳۰	۴-۳-۱ تانسور کرنش و خواص آن
۳۲	۵-۳-۱ کرنش در دستگاه مختصات استوانه‌ای
۳۳	۶-۳-۱ کرنش در دستگاه مختصات کروی
۳۴	۷-۳-۱ معادلات سازگاری

فصل دوم: روابط و معادلات بنیادی

۳۷	۱-۲ مقدمه
۳۷	۲-۲ انرژی کرنشی (ارتجاعی) در اجسام الاستیک
۴۱	۳-۲ رابطه تنش و کرنش در اجسام ارتجاعی خطی
۴۴	۴-۲ اثر صفحات و محورهای تقارن بر ضرایب C_{ijkl}
۴۶	۵-۲ نمایش‌های مختلف ضرایب ارتجاعی در مورد مصالح ارتجاعی خطی ایزوتروپیک
۵۰	۶-۲ چگالی انرژی کرنشی اجسام ارتجاعی خطی ایزوپارامتریک بر حسب ضرایب ارتجاعی
۵۰	۷-۲ ویژگی‌های مسائل تئوری ارتجاعی

فصل سوم: مسائل تئوری ارتجاعی در حالات خاص

۵۹	۱-۳ مقدمه
۵۹	۲-۳ مسائل تئوری ارتجاعی دو بعدی
۷۲	۳-۳ خمش تیر یک سرگیردار تحت اثر بار متمرکز - مقطع مستطیلی
۷۷	۴-۳ حل مسائل متقارن محوری
۸۰	۵-۳ پیچش

فصل چهارم: روش‌های انرژی

۸۹	۱-۴ تعاریف بنیادی
۸۹	۲-۴ اصل تغییر مکان مجازی
۹۱	۳-۴ اصل نیروی مجازی
۹۳	۴-۴ قانون بتی
۹۴	۵-۴ اصل انرژی پتانسیل مینیمم
۹۶	۶-۴ قضیه اول کاشیلیانو
۹۷	۷-۴ اصل انرژی پتانسیل مکمل مینیمم
۱۰۰	۸-۴ قضیه دوم کاستیلیانو

فصل پنجم: نمونه سؤالات حل شده

۱۱۰	مجموعه سؤالات دکتری
۱۱۶	پاسخنامه سؤالات دکتری

منابع

تحلیل تنش و کرنش

۱-۱ مقدمه

تحلیل های تنش و کرنش، مبانی مورد نیاز را برای تحلیل رفتار سیستم سازه ای (Structural system) که تحت اثر بارگذاری قرار دارد، فراهم می نماید.

تحلیل تنش

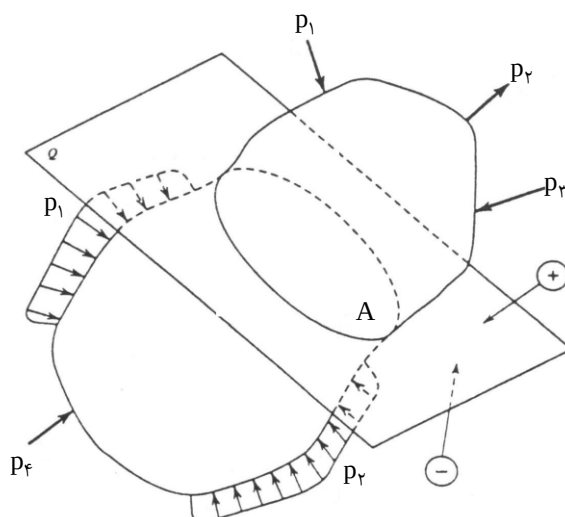
- مفاهیم بنیادی تنش
- تانسور تنش
- تبدیلات در تانسور تنش
- تنش های اصلی
- تنش های برشی ماکزیمم یا مینیمم
- معادلات تعادل

تحلیل کرنش

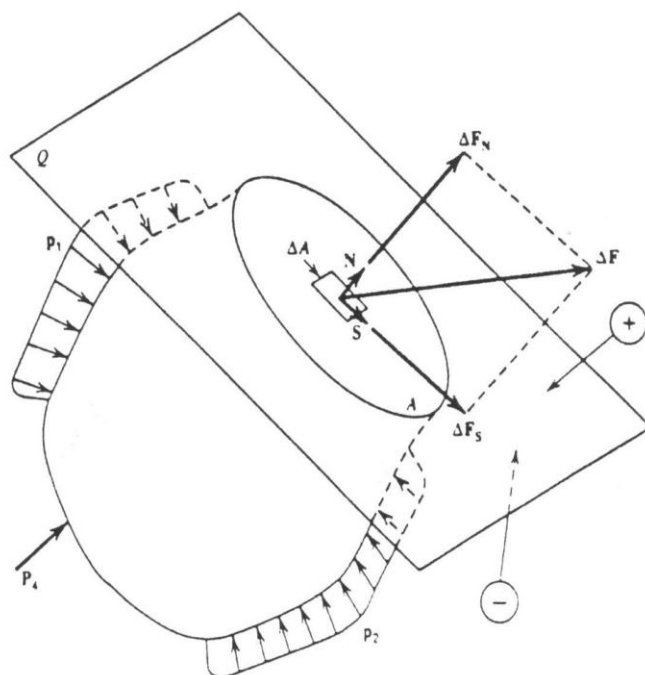
- مفاهیم بنیادی کرنش
- تانسور کرنش
- تبدیلات در تانسور کرنش
- کرنش های اصلی
- کرنش های برشی
- معادلات سازگاری

۲-۱ تحلیل تنش

۱-۲-۱- تعریف تنش



یک جسم عمومی دلخواه را در نظر بگیرید که تحت اثر نیروهای عمل کننده در سطح آن قرار دارد (نیروهای گسترده P_1 و P_2 و نیروهای متمرکز P_1 و P_2 و P_3). یک صفحه دلخواه موهومی Q را از میان جسم عبور دهید. این صفحه جسم را در امتداد سطح A برش می‌دهد. یک سوی صفحه Q را با علامت (+) و سوی دیگر را با علامت منفی (-) نمایش می‌دهیم. قسمتی از جسم در سمت مثبت Q نیروهایی را به قسمت دیگر از جسم در سمت منفی Q اعمال می‌نماید. این نیروها از طریق صفحه Q به وسیله تماس مستقیم دو قسمت جسم در دو سمت Q منتقل می‌شوند. نیرویی را که از طریق سطح جزیی ΔA از A به وسیله سمت راست Q منتقل می‌شود با ΔF نمایش می‌دهیم.

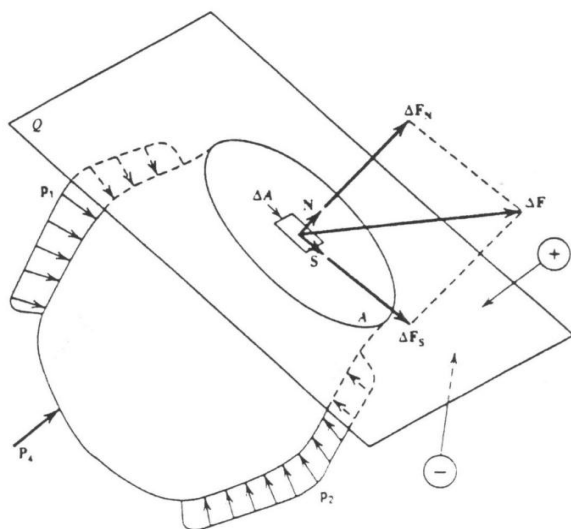


نیروی ΔF را می‌توان به دو مؤلفه ΔF_N (نیروی نرمال یا عمودی) و ΔF_S (نیروی برشی یا مماسی) در امتداد بردار واحد نرمال N و بردار مماسی S نسبت به صفحه Q تجزیه نمود:

$$\Delta F = \sqrt{\Delta F_N^2 + \Delta F_S^2}$$

مقدار متوسط نیرو در واحد سطح عبارتند از:

$$\frac{\Delta F}{\Delta A} = (\text{تنش متوسط})$$



$$\frac{\Delta F_N}{\Delta A} = (\text{تنش نرمال متوسط})$$

$$\frac{\Delta F_S}{\Delta A} = (\text{تنش برشی متوسط})$$

مفهوم تنش در یک نقطه با فرض بی نهایت کوچک شدن ΔA حاصل می شود. بنابراین بردار تنش $\vec{\sigma}$ به صورت زیر مشخص می شود:

$$\vec{\sigma} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta F}}{\Delta A}$$

و بطور مشابه بردار تنش نرمال و بردار تنش مماسی به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\vec{\sigma}_N = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta F}_N}{\Delta A} \quad (\text{تنش نرمال})$$

$$\vec{\sigma}_S = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta F}_S}{\Delta A} \quad (\text{تنش برشی یا مماسی})$$

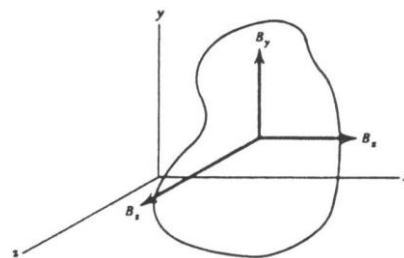
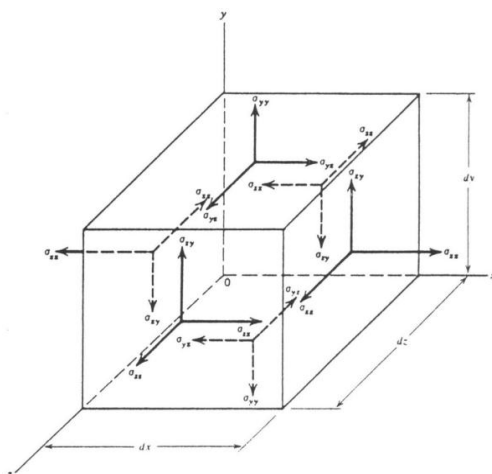
اکنون با شناختی که از بردار تنش بدست آوردیم، می توان چهار مشخصه زیر را برای آن بیان کرد:

- ۱) بردار تنش از جنس نیرو در واحد سطح است.
- ۲) بردار تنش در هر نقطه، نمایانگر عمل نیروهای یک طرف مقطع خاص برش گذرنده از آن نقطه به طرف دیگر است.
- ۳) بردار تنش در هر نقطه روی سطحی عمل می کند که راستای آن سطح از ابتدا در ارزیابی بردار تنش مؤثر بوده است.
- ۴) بردار تنش در یک نقطه محدود به یک راستا و جهت خاص نمی باشد (یعنی در یک نقطه بی نهایت تنش می توان تعریف کرد).

نکته: از آنجا که در یک نقطه در فضای سه بعدی، بیش از سه راستای مستقل نمی توان تشخیص داد، در نتیجه هرگاه در نقطه ای سه بردار تنش مربوط به سه راستای مستقل مشخص باشند، می توان بردار تنش مربوط به هر راستای اختیاری را تعیین کرد.

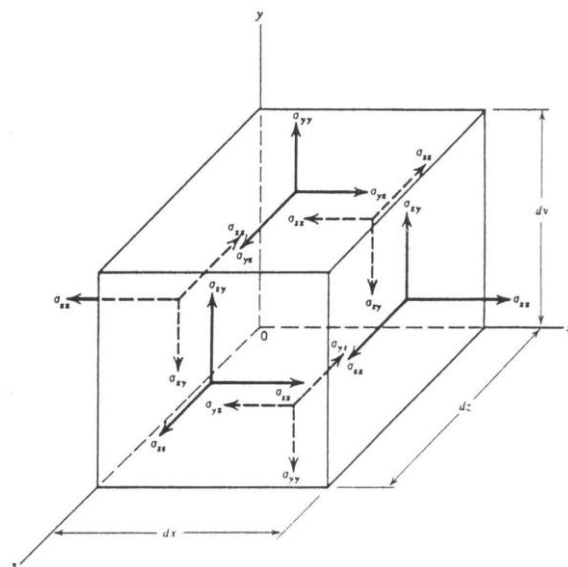
۱-۲-۲ تانسور تنش

برای مشخص نمودن حالت تنش (State of Stress) در یک نقطه از دیاگرام چسم آزاد استفاده می کنیم. این جسم آزاد به صورت یک مکعب مستطیل با ابعاد بی نهایت کوچک dx و dy و dz در نظر گرفته می شود، به عبارت دیگر نقطه مورد نظر به صورت یک مکعب مستطیل با ابعاد بینهایت کوچک فرض می شود که وجوه آن موازی با محوره های x و y و z می باشند (توضیحی در مورد صفحاتی که از نقطه مورد نظر عبور می کنند).



بارهایی که در جسم آزاد مذکور عمل می کنند به دو نوع تقسیم می شوند:

- ۱- نیروهای سطحی (Surface Forces) که در سطح جسم آزاد عمل می‌کنند، نظیر نیروهای تماسی که شامل بارهای متمرکز و واکنش‌ها در یک نقطه می‌باشند و بارهای گسترده.
- ۲- نیروهای حجمی (Body Forces) که در حجم جسم آزاد عمل می‌کنند، نظیر نیروهای ثقلی و نیروهای اینرسی.



برای سادگی و سهولت ارائه مطالب، عنصر بینهایت کوچک را با یک گوشه در مبدا O نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم که مولفه‌های تنش در سرتاسر عنصر حجمی یکنواخت (ثابت) می‌باشند. (توضیح در مورد صفحاتی که از نقطه مورد نظر عبور می‌کنند و تجزیه مولفه برشی نیرو به دو مولفه)

برای صفحات یا وجوه عمود بر محور X تنش‌های σ_{xx} و σ_{xy} و σ_{xz} را داریم.

برای صفحات یا وجوه عمود بر محور Y تنش‌های σ_{yx} و σ_{yy} و σ_{yz} را داریم.

برای صفحات یا وجوه عمود بر محور Z تنش‌های σ_{zx} و σ_{zy} و σ_{zz} را داریم.

در ارتباط با مفهوم حالت تنش در یک نقطه، نه مؤلفه تنش به صورت زیر وجود دارند:

برای صفحات یا وجوه عمود بر محور X:

$$\vec{\sigma}_{xx} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} \quad \vec{\sigma}_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A} \quad \vec{\sigma}_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A}$$

برای صفحات یا وجوه عمود بر محور Y:

$$\vec{\sigma}_{yx} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} \quad \vec{\sigma}_{yy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A} \quad \vec{\sigma}_{yz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A}$$

برای صفحات یا وجوه عمود بر محور Z:

$$\vec{\sigma}_{zx} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} \quad \vec{\sigma}_{zy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A} \quad \vec{\sigma}_{zz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A}$$

نکته: توجه شود که در σ_{ab} ، a نمایش دهنده امتدادی است که بر صفحه عمود است و b نمایش دهنده امتداد مربوط به مولفه تنش است.



نکته: تانسور تنش را می توان به شکل زیر تعریف کرد:

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{نمایش تانسوری})$$

بطور اختصار تانسور تنش را بصورت σ_{ij} , $i=1,2,3$, $j=1,2,3$ نشان می دهند.

۱ بیانگر محور X ها

۲ بیانگر محور Y ها

۳ بیانگر محور Z ها

انواع کمیت ها:

یک کمیت اسکالر، کمیتی است که تنها دارای یک مؤلفه در یک دستگاه مختصات اختیاری است. مؤلفه مذکور هنگامی که در مختصات اختیاری دیگری به نام اندازه گیری شود، تغییری نمی کند (تانسور از مرتبه صفر).

یک کمیت برداری، کمیتی است که دارای سه مؤلفه در یک دستگاه مختصات اختیاری است. مؤلفه های مذکور هنگامی که در مختصات اختیاری دیگری به نام اندازه گیری شوند، به صورت قانونمند تغییر می کنند (تانسور از مرتبه اول).

یک کمیت تانسوری، از مرتبه دوم کمیتی است که دارای ۹ مؤلفه در یک دستگاه مختصات اختیاری x_i است. مؤلفه های مذکور هنگامی که در مختصات اختیاری دیگری به نام x_i اندازه گیری شوند به صورت قانونمند تغییر می کنند (تانسور از مرتبه دوم).

$$\sigma_{ij} \text{ و } i=1,2,3 \text{ و } j=1,2,3$$

نکته: خواص تانسور تنش عبارتند از:

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

۱- تانسور تنش در یک نقطه مورد بحث قرار می گیرد ،

۲- عناصر قطر اصلی تانسور، مؤلفه های قائم تنش هستند،

۳- عناصر واقع در غیر قطر اصلی، مؤلفه های برشی (مماسی) هستند،

۴- تانسور تنش یک اصطلاح ریاضی است که به موجودیتی فیزیکی به نام تنش اطلاق می شود،

۵- تانسور تنش متقارن است.

نکته: می توان اثبات کرد که تانسور تنش از خاصیت تقارن برخوردار است. به عبارت دیگر داریم:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} , \sigma_{xz} = \sigma_{zx} , \sigma_{zy} = \sigma_{yz}$$

نکته: برای اثبات خاصیت تقارن، معادله تعادل مکعب تنش را می نویسیم. مطابق معادلات تعادل، باید لنگر نیروهای وارد بر مکعب حول هر یک از محورها و نسبت به هر نقطه، معادل صفر گردد. به عبارت دیگر داریم:

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow \sigma_{zx} dx dy dz - \sigma_{xz} dx dy dz = 0 \Rightarrow \sigma_{zx} = \sigma_{xz}$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow \sigma_{yx} dx dy dz - \sigma_{xy} dx dy dz = 0 \Rightarrow \sigma_{yx} = \sigma_{xy}$$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow \sigma_{yz} dx dy dz - \sigma_{zy} dx dy dz = 0 \Rightarrow \sigma_{yz} = \sigma_{zy}$$

در معادلات بالا از نیروهای ناشی از شتاب و وزن جسم صرف نظر شده است، ولی می‌توان نشان داد که نتیجه به دست آمده در حالت کلی نیز صحیح است. معادلات تعادل بالا نشان می‌دهند که کمیت های تنش های برشی واقع در دو سطح عمود مجاور هم، همیشه مساوی هستند و جهت آنها طوری است که یا به طرف همدیگر بوده یا این که از همدیگر دور می‌شوند.

۱-۲-۳ مؤلفه های تنش در یک صفحه با راستای اختیاری

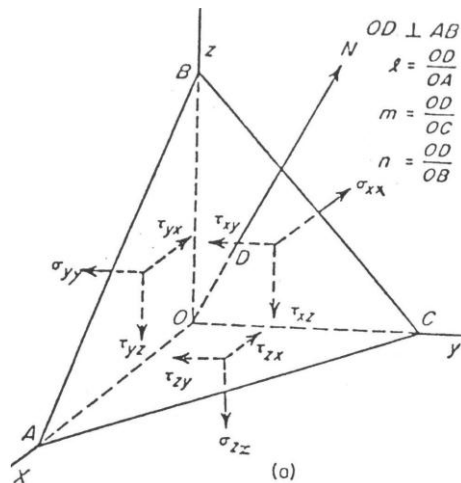
بردار تنش $\vec{T}_x$ و $\vec{T}_y$ و $\vec{T}_z$ در صفحاتی که به ترتیب عمود بر محورهای x و y و z می‌باشند، عبارتند از:

$$\begin{cases} \vec{T}_x = \sigma_{xx}\vec{i} + \sigma_{xy}\vec{j} + \sigma_{xz}\vec{k} \\ \vec{T}_y = \sigma_{yx}\vec{i} + \sigma_{yy}\vec{j} + \sigma_{yz}\vec{k} \\ \vec{T}_z = \sigma_{zx}\vec{i} + \sigma_{zy}\vec{j} + \sigma_{zz}\vec{k} \end{cases}$$

اینک بردار تنش در یک صفحه مایل دلخواه P را که از مکعب تنش بریده شده است، مورد ملاحظه قرار می‌دهیم.
نکته: بردار نرمال واحد عمود بر صفحه P عبارت است از:

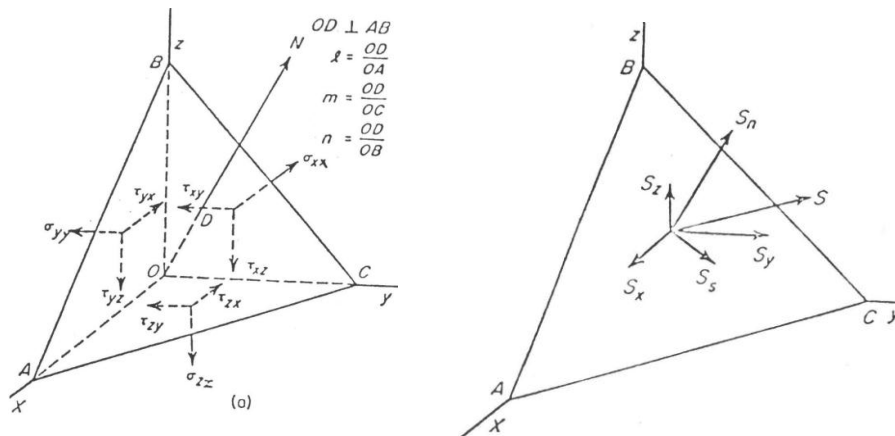
$$\vec{N} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$$

که در آن l و m و n کوسینوس‌های هادی بردار $\vec{N}$ واحد می‌باشند.



مؤلفه های بردار تنش در یک صفحه مایل دلخواه P را می‌توان از تعادل ایستایی یک چهاروجهی بی نهایت کوچک که از این صفحه مایل و صفحات مختصات تشکیل شده است، به دست آورد.

در شکل مذکور، تنش ها را در سه صفحه مختصات نشان داده ایم. مساحت مثلث بی نهایت کوچک ABC را با ΔA نشان می‌دهیم. در این صورت مساحت وجوه AOB و COB و AOC به ترتیب برابر هستند با $m\Delta A$ و $l\Delta A$ و $n\Delta A$. بردار عمل کننده در وجه ABC را با S نمایش می‌دهیم و مؤلفه های x و y و z آن را با S_x و S_y و S_z نشان داده شده‌اند.



از تعادل نیروها در راستای X داریم:

$$S_x \Delta A = \sigma_{xx} l \Delta A + \sigma_{yx} m \Delta A + \sigma_{zx} n \Delta A$$

$$\Rightarrow S_x = l \sigma_{xx} + m \sigma_{yx} + n \sigma_{zx}$$

بطور مشابه از تعادل نیروها در راستای Y و Z نتایج زیر حاصل خواهند شد:

$$S_y = l\sigma_{xy} + m\sigma_{yy} + n\sigma_{zy}$$

$$S_z = l\sigma_{xz} + m\sigma_{yz} + n\sigma_{zz}$$

با استفاده از نمادگذاری تانسوری، مولفه های تنش در صفحه مایل را به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$S_j = n_i \sigma_{ij}, j = 1, i = 1, 2, 3$$

$$j = 2, i = 1, 2, 3$$

$$j = 3, i = 1, 2, 3$$

سه معادله مذکور، محاسبه مؤلفه های تنش در هر صفحه مایل را که به وسیله بردار نرمال واحد N تعریف می شوند میسر می سازد، به شرط این که نش مؤلفه تنش معلوم باشند.

بنابراین خواهیم داشت:

$$\vec{S} = S_x \vec{i} + S_y \vec{j} + S_z \vec{k}$$

برای به دست آوردن تنش نرمال S_n که در این صفحه عمل می‌کند از حاصل ضرب داخلی $S_N = \vec{S} \cdot \vec{N}$ استفاده می‌کنیم به عبارت دیگر داریم:

$$S_n = lS_x + mS_y + nS_z$$

$$S_n = l^2 \sigma_{xx} + m^2 \sigma_{yy} + n^2 \sigma_{zz} + 2(lm \sigma_{xy} + mn \sigma_{yz} + nl \sigma_{zx})$$

با استفاده از نماد گذاری تانسوری می‌توان S_N را بصورت زیر نوشت:

$$S_n = \sigma_{ij}.n_i.n_j \quad i, j = 1, 2, 3$$

برای به دست آوردن تنش برشی برآیند S_s عمل کننده در این صفحه خواهیم داشت:

$$S_s = \sqrt{S^2 - S_n^2} \Rightarrow S_s = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 - S_n^2}$$

۴-۲-۱ تنش های اصلی و صفحات اصلی (Principal Stresses & Principal Planes)

فرض کنید که راستای صفحه ABC به گونه ای است که برآیند تنش S در این صفحه عمود بر صفحه است، به عبارت دیگر داریم: $S = S_n$ و $S_s = 0$

در این صورت صفحه مذکور، صفحه اصلی (Principal Plane) در آن نقطه است و راستای نرمال آن، راستای اصلی (Principal Direction) و تنش $S = S_n$ ، تنش اصلی (Principal Stress) نامیده می شود.

فرض کنید که صفحه ABC یک صفحه اصلی در نقطه O باشد بگونه ای که $S = S_n$. در این صورت S دارای همان کوسینوس های هادی l و m و n مشابه بردار نرمال واحد $\vec{n}$ می باشد. در این صورت مؤلفه های S در راستای x و y و z عبارتند از:

$$S_x = lS$$

$$S_y = mS$$

$$S_z = nS$$

در این صورت معادلات مربوط به مؤلفه های تنش در یک صفحه مایل به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\begin{aligned} S_x &= l\sigma_{xx} + m\sigma_{yx} + n\sigma_{zx} \\ S_y &= l\sigma_{xy} + m\sigma_{yy} + n\sigma_{zy} \\ S_z &= l\sigma_{xz} + m\sigma_{yz} + n\sigma_{zz} \end{aligned} \quad \begin{cases} l(\sigma_{xx} - S) + m\sigma_{yx} + n\sigma_{zx} = 0 \\ l\sigma_{xy} + m(\sigma_{yy} - S) + n\sigma_{zy} = 0 \\ l\sigma_{xz} + m\sigma_{yz} + n(\sigma_{zz} - S) = 0 \end{cases}$$

به صورت نمادگذاری تانسوری نیز داریم:

$$n_i (\sigma_{ij} - \delta_{ij} S) = 0$$

در نمادگذاری تانسوری، δ_{ij} دلتای کرونکر نامیده می شود که به صورت زیر تعریف می شود:

$$i = j \Rightarrow \delta_{ij} = 1$$

$$i \neq j \Rightarrow \delta_{ij} = 0$$

برای اینکه معادلات مذکور دارای جواب غیر صفر به ازای l و m و n باشند، باید دترمینان ضرایب آن مساوی صفر باشد. به عبارت دیگر داریم:

$$\begin{cases} l(\sigma_{xx} - S) + m\sigma_{yx} + n\sigma_{zx} = 0 \\ l\sigma_{xy} + m(\sigma_{yy} - S) + n\sigma_{zy} = 0 \\ l\sigma_{xz} + m\sigma_{yz} + n(\sigma_{zz} - S) = 0 \end{cases} \quad |\sigma_{ij} - \delta_{ij} S| = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - S & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - S & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - S \end{vmatrix} = 0$$

از بسط دترمینان مذکور، یک معادله درجه سوم (cubic Equation) به ازای S خواهیم داشت:

$$S^3 - I_1 S^2 - I_2 S - I_3 = 0$$

که در آنها داریم: $S^3 - I_1 S^2 - I_2 S - I_3 = 0$ (مجموع قطر تانسور تنش)

$$I_2 = - \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (\text{مجموع کوفاکتور های قطر تانسور تنش})$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\sigma_{xy}\sigma_{yz}\sigma_{zx} - (\sigma_{xx}\sigma_{yz}^2 + \sigma_{yy}\sigma_{zx}^2 + \sigma_{zz}\sigma_{xy}^2) \quad (\text{دترمینان تانسور تنش})$$

می توان ثابت کرد که معادله بالا دارای سه ریشه حقیقی (Real Root) است و در نتیجه حداقل سه تنش اصلی وجود دارند که به صورت σ_1 و σ_2 و σ_3 نشان داده می شوند. از جایگذاری پسرستی این جواب ها در معادلات مربوط به مولفه های تنش در یک صفحه مایل، کوسینوس های هادی متناظر l و m و n به دست می آیند، البته با شرط:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

اگر سه ریشه σ_1 و σ_2 و σ_3 متمایز باشند، در این صورت سه راستای اصلی متناظر، منحصر بفرد خواهند بود و بر یکدیگر متعامد (Orthogonal) خواهند بود. اگر دو ریشه از این سه ریشه مساوی باشند، در این صورت یک راستا منحصر بفرد خواهد بود و دو راستای دیگر می تواند هر دو راستای دلخواهی باشند که بر نخستین راستا متعامد می باشند. اگر هر سه ریشه مساوی باشند، در این صورت هیچ راستای منحصر بفردی وجود نخواهند داشت و هر سه راستای متعامد دلخواهی می توانند انتخاب شوند. این وضعیت تنش به عنوان حالت تنش هیدرواستاتیک معروف است.

فرض کنید که به جای سه محور x و y و z ، یک مجموعه متفاوت محوره های x' ، y' ، z' را در نقطه O در نظر بگیریم. در این صورت معادله تعیین تنش های اصلی مانند معادله درجه سوم ذکر شده خواهد بود، به جز این که I_1 و I_2 و I_3 بر حسب تنش های σ'_x ، σ'_y ، σ'_z نسبت به محوره های جدید تعریف خواهند شد. به عنوان مثال داریم:

$$I_1 = \sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} + \sigma'_{zz}$$

$$I_2 = \dots$$

$$I_3 = \dots$$

اما تنش های اصلی، کمیت های فیزیکی می باشند و واضح است که بستگی به محوره های مختصات انتخاب شده ندارند. بنابراین مقادیر I_1 و I_2 و I_3 باید در هر دستگاه مختصاتی یکسان باشند تا این که مقادیر مشابهی را برای σ_1 و σ_2 و σ_3 به دست دهند. بنابراین به عنوان مثال خواهیم داشت:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} + \sigma'_{zz}$$

I_1 و I_2 و I_3 به ترتیب ناوردهای (Invariants) اول و دوم و سوم تانسور تنش نامیده می شوند.

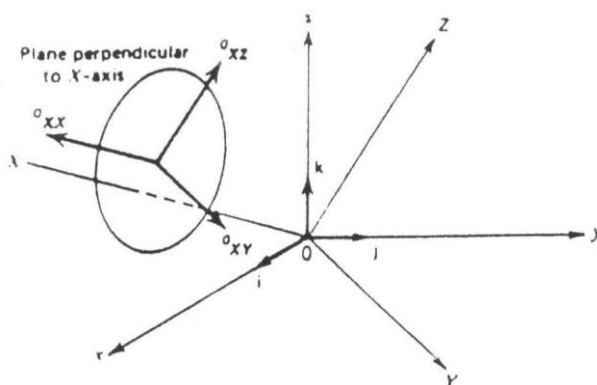
اگر راستاهای اصلی را به عنوان محورهای مختصات در نظر بگیریم، در این صورت ناورداهای تنش، فرم ساده زیر را به خود خواهند گرفت:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned}$$

باید یادآور شد که ناورداهای I_1 و I_2 و I_3 که در معادلات بالا ظاهر می‌شوند، سه کمیت مستقل هستند که حالت تنش و نیز σ_1 و σ_2 و σ_3 را مشخص می‌نمایند. به عبارت دیگر با معلوم بودن σ_1 و σ_2 و σ_3 می‌توان کمیت‌های I_1 و I_2 و I_3 را محاسبه نمود و با داشتن I_1 و I_2 و I_3 نیز می‌توان σ_1 و σ_2 و σ_3 را به دست آورد.

۱-۲-۵ تبدیل تنش (Transformation of Stress)

فرض کنید (x, y, z) و (X, Y, Z) نمایشگر دو دستگاه مختصات دکارتی با مبدأ مشترک باشند.



کوسینوس‌های زوایای بین محورهای مختصات (x, y, z) و (X, Y, Z) در جدول زیر درج شده‌اند. هر درایه این جدول عبارت است از زاویه بین محورهای مختصات که در بالای ستون و سمت چپ سطر مربوطه. زوایای مذکور از محورهای (x, y, z) به محورهای (X, Y, Z) اندازه گرفته می‌شوند. به عنوان مثال داریم:

$$l_1 = \cos \theta_{xX}, \quad l_2 = \cos \theta_{xY}$$

Direction Coninex

	x	y	z
X	l_1	m_1	n_1
Y	l_2	m_2	n_2
Z	l_3	m_3	n_3

از آنجاکه محورهای (x, y, z) و (X, Y, Z) متعامدند، از این رو کوسینوس‌های هادی جدول مذکور باید روابط زیر را ارضا نمایند:

برای عناصر سطری داریم:

$$\begin{cases} l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1, & i = 1, 2, 3 \\ l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0, \dots \end{cases}$$

برای عناصر ستونی نیز داریم:

$$\begin{cases} l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1, \dots \\ l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 = 0, \dots \end{cases}$$

مولفه های تنش σ_{XX} و σ_{YY} و σ_{ZZ} نسبت به محورهای (X, Y, Z) تعریف می شوند، همان گونه که تنش های σ_{yy} و σ_{xx} و σ_{zz} نسبت به محورهای (x, y, z) تعریف می شوند.

از نتایج روابط مؤلفه های تنش در یک صفحه با راستای دلخواه می توان نوشت:

$$S_n = l^2 \sigma_{xx} + m^2 \sigma_{yy} + n^2 \sigma_{zz} + 2(lm \sigma_{xy} + mn \sigma_{yz} + nl \sigma_{zx})$$

$$\begin{cases} \sigma_{XX} = l_1^2 \sigma_{xx} + m_1^2 \sigma_{yy} + n_1^2 \sigma_{zz} + 2l_1 m_1 \sigma_{xy} + 2l_1 n_1 \sigma_{xz} + 2m_1 n_1 \sigma_{yz} = \vec{\sigma}_X \cdot \vec{N}_1 \\ \sigma_{YY} = l_2^2 \sigma_{xx} + m_2^2 \sigma_{yy} + n_2^2 \sigma_{zz} + 2l_2 m_2 \sigma_{xy} + 2l_2 n_2 \sigma_{xz} + 2m_2 n_2 \sigma_{yz} = \vec{\sigma}_Y \cdot \vec{N}_2 \\ \sigma_{ZZ} = l_3^2 \sigma_{xx} + m_3^2 \sigma_{yy} + n_3^2 \sigma_{zz} + 2l_3 m_3 \sigma_{xy} + 2l_3 n_3 \sigma_{xz} + 2m_3 n_3 \sigma_{yz} = \vec{\sigma}_Z \cdot \vec{N}_3 \end{cases}$$

سه بردار واحد N_1 و N_2 و N_3 که به صورت زیر تعریف می شوند، در راستاهای X و Y و Z قرار دارند.

$$\vec{N}_1 = l_1 \vec{i} + m_1 \vec{j} + n_1 \vec{k}$$

$$\vec{N}_2 = l_2 \vec{i} + m_2 \vec{j} + n_2 \vec{k}$$

$$\vec{N}_3 = l_3 \vec{i} + m_3 \vec{j} + n_3 \vec{k}$$

$$\vec{\sigma}_X = (l_1 \sigma_{xx} + m_1 \sigma_{yx} + n_1 \sigma_{zx}) \vec{i} + (l_1 \sigma_{xy} + m_1 \sigma_{yy} + n_1 \sigma_{zy}) \vec{j} + (l_1 \sigma_{xx} + m_1 \sigma_{yz} + n_1 \sigma_{zz}) \vec{k}$$

$$\vec{\sigma}_Y = (l_2 \sigma_{xx} + m_2 \sigma_{yx} + n_2 \sigma_{zx}) \vec{i} + (l_2 \sigma_{xy} + m_2 \sigma_{yy} + n_2 \sigma_{zy}) \vec{j} + (l_2 \sigma_{xx} + m_2 \sigma_{yz} + n_2 \sigma_{zz}) \vec{k}$$

$$\vec{\sigma}_Z = (l_3 \sigma_{xx} + m_3 \sigma_{yx} + n_3 \sigma_{zx}) \vec{i} + (l_3 \sigma_{xy} + m_3 \sigma_{yy} + n_3 \sigma_{zy}) \vec{j} + (l_3 \sigma_{xx} + m_3 \sigma_{yz} + n_3 \sigma_{zz}) \vec{k}$$

بنابراین σ_{XY} و σ_{XZ} و σ_{YZ} را می توان به صورت زیر بدست آورد:

$$\begin{aligned} \sigma_{XY} &= \vec{\sigma}_X \cdot \vec{N}_2 = \vec{\sigma}_Y \cdot \vec{N}_1 \\ &= l_1 l_2 \sigma_{xx} + m_1 m_2 \sigma_{yy} + n_1 n_2 \sigma_{zz} + (m_1 n_2 + m_2 n_1) \sigma_{yz} + (l_1 n_2 + l_2 n_1) \sigma_{zx} + (l_1 m_2 + l_2 m_1) \sigma_{xy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{XZ} &= \vec{\sigma}_X \cdot \vec{N}_3 = \vec{\sigma}_Z \cdot \vec{N}_1 \\ &= l_1 l_3 \sigma_{xx} + m_1 m_3 \sigma_{yy} + n_1 n_3 \sigma_{zz} + (m_1 n_3 + m_3 n_1) \sigma_{yz} + (l_1 n_3 + l_3 n_1) \sigma_{zx} + (l_1 m_3 + l_3 m_1) \sigma_{xy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{YZ} &= \vec{\sigma}_Y \cdot \vec{N}_3 = \vec{\sigma}_Z \cdot \vec{N}_2 \\ &= l_2 l_3 \sigma_{xx} + m_2 m_3 \sigma_{yy} + n_2 n_3 \sigma_{zz} + (m_2 n_3 + m_3 n_2) \sigma_{yz} + (l_2 n_3 + l_3 n_2) \sigma_{zx} + (l_2 m_3 + l_3 m_2) \sigma_{xy} \end{aligned}$$

در حالت کلی اگر تانسور تنش در نقطه مورد نظر نسبت به محورهای X و Y و Z را با σ و تانسور تنش در نقطه مورد نظر نسبت به محورهای X و Y و Z را با σ' نشان دهیم و نیز اگر کوسینوس های هادی را در یک آرایه به نام ماتریس دوران گرد آوریم، در این صورت خواهیم داشت:

$$R = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad \sigma' = R \cdot \sigma \cdot R^T$$

به صورت نماد تانسوری نیز می توان نوشت:

$$\sigma'_{km} = \sigma_{ij} n_{jk} n_{im}, \quad i=1,2,3, \quad j=1,2,3$$

$$R^T = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{bmatrix}$$

۱-۲-۶ تنش های برشی ماکزیمم

فرض کنید که محورهای مختصات مورد نظر خود را همان محورهای اصلی اختیار کرده ایم. در این صورت تنش های برشی مربوط به این محورهای مختصات صفر می باشند. تنش های نرمال و برشی در صفحه ای مایل با کوسینوس های هادی نسبت به این محورها (l و m و n) عبارتند از:

$$S_n = l^2 \sigma_{xx} + m^2 \sigma_{yy} + n^2 \sigma_{zz} + 2(lm \sigma_{xy} + mn \sigma_{yz} + nl \sigma_{zx})$$

$$S_n = l^2 \sigma_1 + m^2 \sigma_2 + n^2 \sigma_3$$

$$S_x = l \sigma_{xx} + m \sigma_{yx} + n \sigma_{zx}$$

$$S_y = l \sigma_{xy} + m \sigma_{yy} + n \sigma_{zy}$$

$$S_z = l \sigma_{xz} + m \sigma_{yz} + n \sigma_{zz}$$

$$\begin{cases} S_s^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - S_n^2 \\ S_1^2 = l^2 \sigma_1^2 & S_2^2 = m^2 \sigma_2^2 & S_3^2 = n^2 \sigma_3^2 \\ S_s^2 = l^2 \sigma_1^2 + m^2 \sigma_2^2 + n^2 \sigma_3^2 - (l^2 \sigma_1 + m^2 \sigma_2 + n^2 \sigma_3)^2 \end{cases}$$

از قبل می دانیم که در صفحات اصلی، تنش برشی مینیمم (یعنی صفر) است. اینک می خواهیم صفحاتی را پیدا کنیم که در آن تنش برشی ماکزیمم است. به عبارت دیگر به دنبال l و m و n هستیم به گونه ای که S_s در معادله ذکر شده یک ماکزیمم باشد. علاوه بر معادله مذکور، محدودیتی در کوسینوس های هادی وجود دارد، به عبارت دیگر:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

یعنی تنها دو تا از سه کوسینوس های هادی مذکور می توانند مستقل باشند. از جایگذاری

$$n^2 = 1 - m^2 - l^2$$

در معادله مربوط به S_s و مشتق گیری از معادله حاصل نسبت به l و m و مساوی صفر قرار دادن این مشتقات، معادلات زیر به ازای l و m بدست می آیند:

$$l \left[(\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2 - \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \right] = 0$$

$$m \left[(\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2 - \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) \right] = 0$$



روشن است که یک جواب عبارت است از: $m=0$ و $l=0$ و $n=\pm 1$. جواب دیگر از طریق مساوی صفر قرار دادن l ، به صورت

$$m = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{زیر به دست می‌آید:}$$

همچنین با $m=0$ جواب زیر به دست می‌آید:

$$l = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

با حل معادلات فوق می‌توان جدول زیر را بدست آورد:

l	۰	۰	± 1	۰	$\pm \sqrt{1/2}$	$\pm \sqrt{1/2}$
m	۰	± 1	۰	$\pm \sqrt{1/2}$	۰	$\pm \sqrt{1/2}$
n	± 1	۰	۰	$\pm \sqrt{1/2}$	$\pm \sqrt{1/2}$	۰

سه ستون اول این جدول، کوسینوس های هادی صفحات مختصات که همان صفحات اصلی هستند و بنابراین تنش های برشی در این صفحات صفر می‌باشند، به عبارت دیگر آنها مینیمم می‌باشند. سه ستون آخر در واقع کوسینوس های هادی زوایای ۴۵ درجه هستند. بنابراین، این صفحات زوایای بین محورهای مختصات را نصف می‌نمایند. در این صفحات تنشهای برشی ماکزیمم می‌باشند. با نشان دادن این تنشها با τ_i و جایگذاری کوسینوس های هادی مذکور در معادله مربوط به S_s مقادیر تنش های برشی به صورت زیر بدست می‌آیند:

l	۰	۰	± 1	۰	$\pm \sqrt{1/2}$	$\pm \sqrt{1/2}$
m	۰	± 1	۰	$\pm \sqrt{1/2}$	۰	$\pm \sqrt{1/2}$
n	± 1	۰	۰	$\pm \sqrt{1/2}$	$\pm \sqrt{1/2}$	۰

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1 = \pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) \\ \tau_2 = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \\ \tau_3 = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \end{array} \right.$$

$$\{S_s^2 = l^2 \sigma_1^2 + m^2 \sigma_2^2 + n^2 \sigma_3^2 - (l^2 \sigma_1 + m^2 \sigma_2 + n^2 \sigma_3)^2\}$$

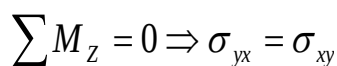
اگر تنش های نرمال در این صفحات را محاسبه نماییم و آنها را با N_i نشان دهیم، در این صورت از معادله مربوط به S_n خواهیم داشت:

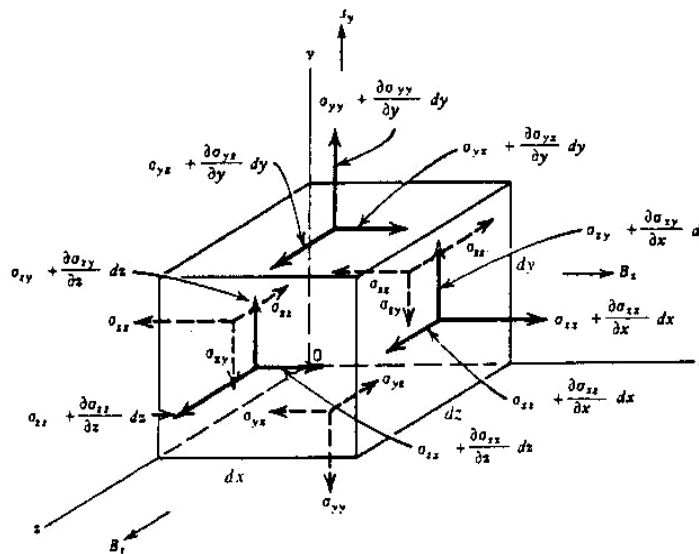
$$S_n = l^2 \sigma_1 + m^2 \sigma_2 + n^2 \sigma_3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \\ N_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \\ N_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \end{array} \right.$$

۷-۲-۱ معادلات دیفرانسیل تعادل

در این بحث، معادلات دیفرانسیل تعادل را در یک جسم تغییر شکل پذیر (Deformable body) استخراج می‌کنیم. این معادلات در هنگام کاربرد تئوری الاستیسیته در استخراج روابط بار-تنش و بار-خیز ضروری می‌باشند. بدین منظور، یک جسم عمومی تغییر شکل پذیر را در نظر می‌گیریم و یک عنصر حجمی دیفرانسیلی (Differential volume element) در نقطه O در جسم را به صورتی که در زیر نشان داده شده است، انتخاب می‌کنیم:





از رابطه زیر:

$$\sum F_x = 0$$

معادله دیفرانسیل تعادل در راستای X به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx(dy.dz) + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy(dx.dz) + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz(dx.dy) \\ & + B_x(dx.dy.dz) = 0 \\ \Rightarrow & \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + B_x = 0 \end{aligned}$$

از رابطه: $\sum F_y = 0$

معادله دیفرانسیل تعادل در راستای Y به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + B_y = 0$$

از رابطه: $\sum F_z = 0$

معادله دیفرانسیل تعادل در راستای Z به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + B_z = 0$$

و به طور کلی به صورت نمایش تانسوری داریم:

$$\sigma_{ij,j} + B_i = 0$$

معادلات تعادل در دستگاه مختصات استوانه ای:

در دستگاه مختصات استوانه ای محورهای Ox و Oy و Oz تبدیل به محورهای Or و θ و Oz می‌شوند.

تانسور تنش در این دستگاه مختصات عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

که در آن ، $\sigma_{\theta\theta}$: تنش حلقوی - محیطی

σ_{rr} : تنش شعاعی

σ_{zz} : تنش عمودی - محوری

معادلات دیفرانسیل تعادل در دستگاه مختصات استوانه ای از معادلات تعادل زیر بدست می آیند:

$$\sum F_r = 0$$

$$\sum F_\theta = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

به عنوان مثال داریم:

$$\begin{aligned} \sum F_r = 0 \Rightarrow & -\sigma_{rr}.r.d\theta.dz + (\sigma_{rr} + \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}dr)(r+dr)d\theta.dz - \\ & \sigma_{\theta r}.dr.dz + (\sigma_{\theta r} + \frac{\partial\sigma_{\theta r}}{\partial\theta}d\theta)dr.dz - \sigma_{zr}.r.d\theta.dr + (\sigma_{zr} + \frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial z}dz)r.dr.d\theta - \\ & (\sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}d\theta)dr.dz + B_r.r.dr.d\theta.dz = 0 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta r}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + B_r = 0$$

و به طور مشابه اگر معادلات تعادل زیر را تشکیل دهیم:

$$\begin{cases} \sum F_\theta = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

در این صورت در نهایت معادلات دیفرانسیل تعادل عنصر حجمی بی نهایت کوچک به صورت زیر خواهد بود :

$$\begin{cases} \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta r}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + B_r = 0 \\ \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + B_\theta = 0 \\ \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + B_z = 0 \end{cases}$$

معادلات تعادل در دستگاه مختصات کروی :

در دستگاه مختصات کروی محورهای Ox و Oy و Oz تبدیل به محورهای Or و θ و Φ می شوند .

تانسور تنش در دستگاه مختصات کروی :

$$\text{تانسور} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{r\phi} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta\phi} \\ \sigma_{\phi r} & \sigma_{\phi\theta} & \sigma_{\phi\phi} \end{bmatrix}$$



که در آن ، $\sigma_{\theta\theta}$:تنش حلقوی- محیطی

σ_{rr} : تنش شعاعی

$\sigma_{\phi\phi}$: تنش حلقوی- محیطی می باشند .

معادلات دیفرانسیل تعادل در دستگاه کروی از سه معادله تعادل زیر به دست می آیند:

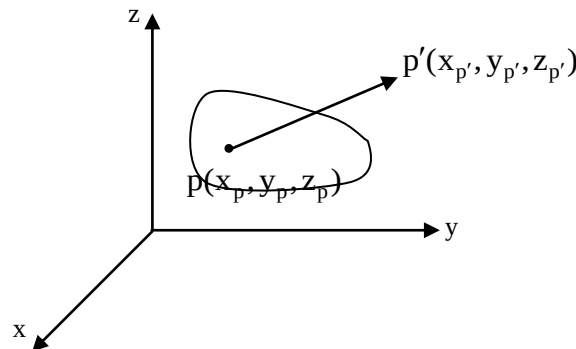
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_r = 0 \\ \sum F_\theta = 0 \\ \sum F_\phi = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\phi r}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi} + \sigma_{\theta r} \cot \theta) + B_r = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\phi\theta}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} [(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi}) \cot \theta + 3\sigma_{r\theta}] + B_\theta = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\phi} + 2\sigma_{\theta\phi} \cot \theta) + B_\phi = 0 \end{array} \right.$$

۳-۱ تحلیل کرنش (Strain Analysis)

۱-۳-۱ مقدمه

تمامی اجسام شکل پذیر تحت بارهای مختلف، تغییر مکان (Displacement) و تغییر شکل (Deformation) می دهند. بدین معنی که هر نقطه ی P از جسم از موقعیت ابتدایی خود که به وسیله مختصات x_p, y_p, z_p در فضا مشخص می شود، به موقعیت جدید خود که به وسیله مختصات x'_p, y'_p, z'_p مشخص می شود، انتقال می یابد.



بردار PP' را بردار تغییر مکان نقطه ی P از جسم می نامند. واضح است که اگر جسم مورد نظر شکل پذیر باشد، در این صورت تغییر مکان نقاط مختلف آن باهم مساوی نیستند. عدم تساوی تغییر مکان های نقاط یک جسم، باعث تغییر شکل (Deformation) آن می شود.

تغییر شکل یک جسم، توسط کمیت مؤلفه های مختلف کرنش در هر نقطه از جسم بیان می گردد.

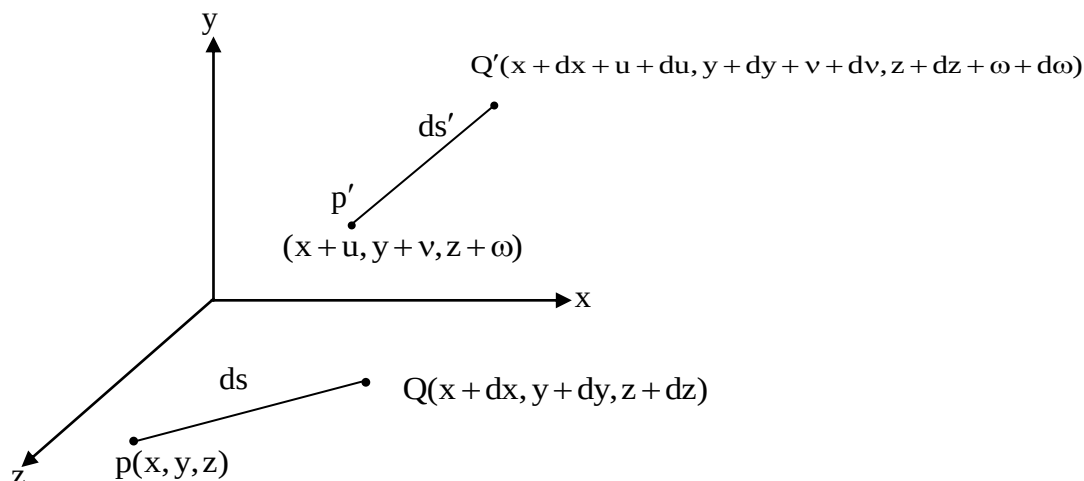
مؤلفه های کرنش مانند مؤلفه های تنش عبارتند از :

- کرنش محوری (Axial Strain)

• کرنش برشی (Shear Strain)

۱-۳-۲ کرنش محوری (Axial Strain)

- هنگامی که یک جسم تغییر شکل می‌یابد، یک ذره در نقطه P به مختصات (x, y, z) به نقطه P' به مختصات $(x+u, y+v, z+w)$ انتقال می‌یابد. همچنین ذره ای در نقطه Q به مختصات $(x+dx, y+dy, z+dz)$ به نقطه Q' به مختصات $(x+dx+u+du, y+dy+v+dv, z+dz+w+dw)$ انتقال می‌یابد و عنصر خطی بینهایت کوچک $PQ=ds$ به صورت عنصر خطی $P'Q'$ به طول ds' در می‌آید.



- کرنش محوری مهندسی (Engineering strain) در نقطه P به صورت زیر تعریف می‌شود:

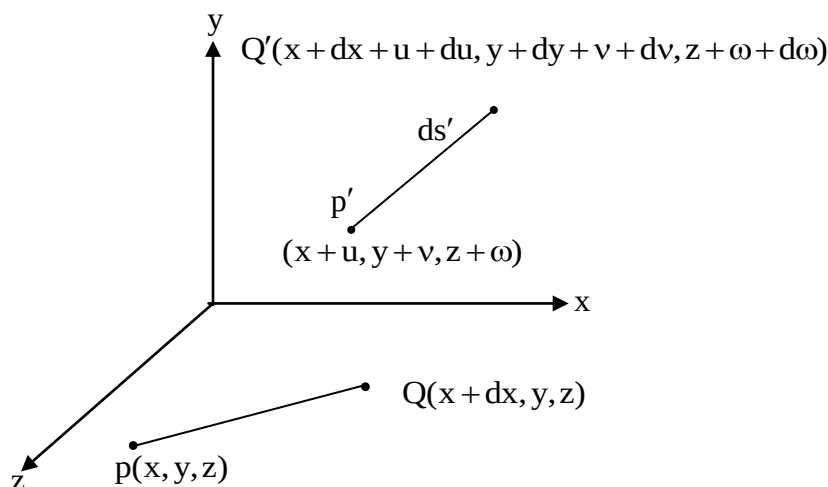
$$e_{\varepsilon} = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{ds' - ds}{ds}$$

این کرنش در مقاومت مصالح و تئوری های ابتدایی و تئوری های تغییر شکل کوچک کاربرد دارد.

- کرنش محوری لاگرانژی (Lagrangian strain) به صورت زیر تعریف می‌شود که در تغییر شکل های بزرگ کاربرد دارد:

$$\varepsilon = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{ds'^2 - ds^2}{2ds^2}$$

کرنش محوری را می‌توان به وسیله تغییرات تغییر مکان نقطه P بیان نمود. فرض می‌کنیم که کرنش لاگرانژی محوری نقطه P در امتداد محور x ها مورد توجه باشد، در این صورت به موازات محور Ox بردار PQ را در نظر می‌گیریم.



طول PQ و P'Q' به صورت زیر محاسبه می شود :

$$|PQ| = dx$$

$$|P'Q'| = [(dx + du)^2 + dv^2 + dw^2]^{1/2}$$

در این صورت کرنش محوری لاگرانژی در نقطه ی P در جهت محور Ox عبارت است از:

$$\varepsilon = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{ds'^2 - ds^2}{2ds^2} \quad \varepsilon_{xx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{(dx + du)^2 + dv^2 + dw^2 - dx^2}{2(dx)^2}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]$$

به همین ترتیب کرنش محوری لاگرانژی در نقطه P در جهت محورهای Oy و Oz عبارتند از:

$$\begin{cases} \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \end{cases}$$

کرنش محوری مهندسی در نقطه ی P در جهت محورهای Ox , Oy , Oz عبارت است از:

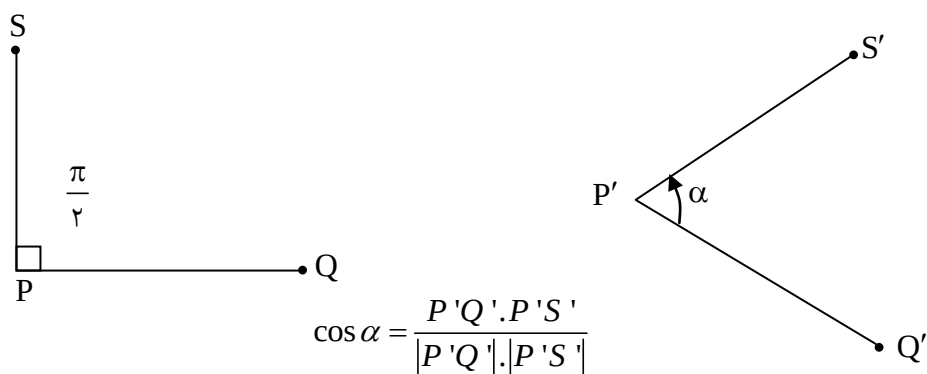
$$\begin{cases} e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

در واقع اگر از جملات درجه دومی موجود در کرنش محوری لاگرانژی صرف نظر کنیم، به کرنش محوری مهندسی می‌رسیم و این امر در واقع در تغییر شکل های بسیار کوچک امکان پذیر است و اساسا کرنش های محوری مهندسی و لاگرانژی هنگامی مساوی فرض می‌شوند که تغییر شکل ها و یا کمیت کرنش ها کوچک باشند.

۳-۳-۱ کرنش زاویه ای یا برشی

کرنش برشی در واقع تغییر شکل زاویه ای جسم را نشان می‌دهد.

در نقطه ی P یک زاویه ی قائم در نظر می‌گیریم. پس از تغییر شکل جسم، زاویه ی قائم تغییر خواهد کرد. مقدار زاویه ی جدید توسط کوسینوس آن مشخص می‌گردد.



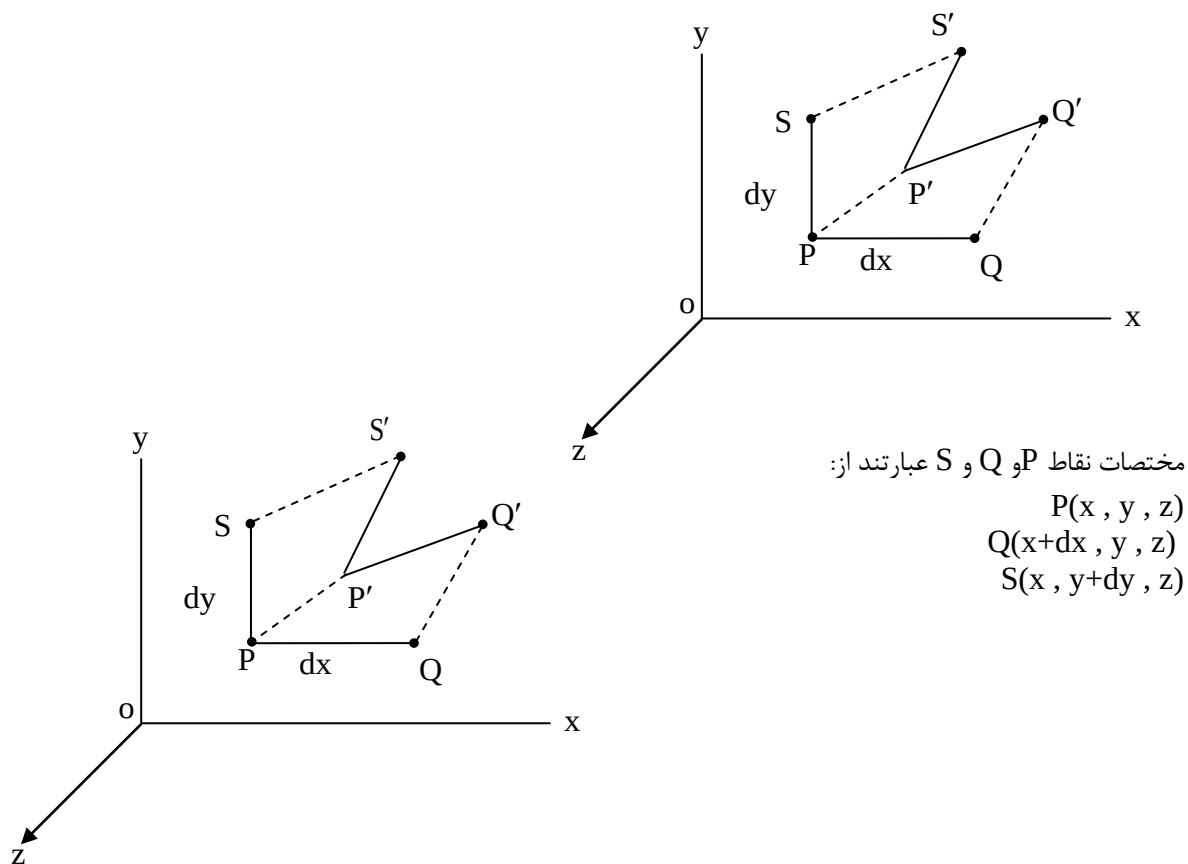
همانند کرنش محوری، دو تعریف برای کرنش برشی وجود دارد:
کرنش برشی مهندسی:

$$e = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

کرنش برشی لاگرانژی:

$$\varepsilon = \lim \frac{P'Q' \cdot P'S'}{2|PQ| \cdot |PS|}$$

کرنش برشی را می‌توان در صفحات مختلف معین نمود. به عنوان مثال، کرنش برشی لاگرانژی نقطه P در صفحه ای به موازی صفحه Oxy تابعی است از تغییر مکان های مختلف نسبت به متغیرهای X و Y. برای این کار زاویه ی قائمه ی QPS را موازی صفحه Oxy در نظر می‌گیریم، به گونه ای که اضلاع آن نیز موازی محورهای مختصات باشند.



مختصات نقاط P' و Q' عبارت اند از:

$$P'(x+u, y+v, z+w)$$

$$Q'(x+dx+u+\frac{\partial u}{\partial x}dx, y+v+\frac{\partial v}{\partial x}dx, z+w+\frac{\partial w}{\partial x}dx)$$

$$S'(x+u+\frac{\partial u}{\partial y}dy, y+v+dy+\frac{\partial v}{\partial y}dy, z+w+\frac{\partial w}{\partial y}dy)$$

در این صورت مؤلفه های $P'Q'$ و PQ عبارتند از :

$$P'Q': \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} dx + dx \\ \frac{\partial v}{\partial x} dx \\ \frac{\partial w}{\partial x} dx \end{array} \right\}$$

$$P'S': \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ \frac{\partial v}{\partial y} dy + dy \\ \frac{\partial w}{\partial y} dy \end{array} \right\}$$

ضرب داخلی این دو بردار عبارتند از :

$$\varepsilon = \lim \frac{P'Q' \cdot P'S'}{2|PQ| \cdot |PS|}$$

$$\overline{P'S'} \cdot \overline{P'Q'} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx \cdot dy$$

در نتیجه مقدار کرنش برشی لاگرانژی در نقطه ی P موازی محور Oxy به صورت زیر در می آید:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

نکته جالب این است که اگر اندیس های x و y جابجا شوند، در مقدار کرنش برشی لاگرانژی تغییری حاصل نمی گردد، به عبارت دیگر داریم:

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$$

به همین ترتیب می توان کرنش برشی لاگرانژی نقطه ی P را در صفحه ای به موازی Oxz و Oyz نیز به دست می آورد:

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \right.$$

کرنش برشی مهندسی در نقطه ی P در صفحات Oxy , Oxz , Oyz عبارت اند از :

$$\left\{ \begin{aligned} e_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ e_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ e_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned} \right.$$

در واقع اگر از جملات درجه دومی موجود در کرنش برشی لاگرانژی صرف نظر نماییم، به کرنش برشی مهندسی می‌رسیم و این در تغییرشکل های کوچک امکان پذیر است. اساسا کرنش های برشی مهندسی و لاگرانژی هنگامی مساوی فرض می‌شوند که تغییر شکل ها و یا کمیت کرنش ها کوچک باشند .
رابطه ی اندیسی کرنش های محوری و برشی مهندسی :

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

رابطه ی اندیسی کرنش های محوری و برشی لاگرانژی :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j})$$

$$i, j, k = 1, 2, 3$$

۱-۳-۴ تانسور کرنش و خواص آن:

تغییرشکل در نقطه ی P را می‌توان از طریق مؤلفه های کرنش در آن نقطه در یک تانسور به نمایش گذاشت.
تانسور کرنش لاگرانژی عبارت است از:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

تانسور کرنش مهندسی عبارت‌اند از:

$$e = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{bmatrix}$$

طبیعی است که تانسور تنش و تانسور کرنش شباهت هایی داشته باشند.