دینامیک خاک

(مجموعه عمران)

دکتری

مؤلف: علیرضا سلطانی

سلطانی- علیرضا
دینامیک خاک (مجموعه عمران)
مشاوران صعود ماهان: ١٤٠١
٢٠٥ ص: جدول، نمودار (آمادگی آزمون دکتری عمران)
ISBN: 978-600-458-673-3
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
فارسی ـ چاپ اول
دینامیک خاک (مجموعه عمران)
ج ـ عنوان
رده بندی کنگره: ١٣٩١ ٩د ٨١٦٤س / ٢٣٥٣ LB
ردهبندی دیویی ٣٧٨/١٦٦٤
کتابخانه ملی ایران ٢٩٦٩٥٧٥

موسسه آموزش عالی آزاد ماهان
www.mahan.ac.ir

انتشارات مشاوران صعود ماهان

- نام کتاب: دینامیک خاک
- مولف: علیرضا سلطانی
- مدیران مسئول: هادی و مجید ستّاری
- مدیر تولید: سمیه بیگی
- ناشر: مشاوران صعود ماهان
- نوبت و تاریخ چاپ: چاپ اول/١۴٠١
- تیراژ: ١٠٠٠ نسخه
- قیمت: ٢/۴٩٠/٠٠٠ ریال
- شابک: ISBN٩٧٨-۶٠٠-۴۵٨-۶٧٣-٣

انتشارات مشاوران صعود ماهان:تهران ـ خیابان ولیعصر، بالاتر از تقاطع ولیعصر مطهری، پلاک ٢٠۵٠
تلفن: ٨٨١٠٠١١٣ و ٨٨۴٠١٣١٣
۴٩٠

بنام خدا

ایمان دارم که هر تغییر و تحول بزرگی در مسیر زندگی بدون تحول معرفت و نگرش میسر نخواهد بود. پس بیایید با اندیشه توکل، تفکر، تلاش و تحمل در توسعه دنیای فکریمان برای نیل به آرامش و آسایش توأمان اولین گام را برداریم. چون همگی یقین داریم دانایی، توانایی می‌آورد.

شاد باشید و دلی را شاد کنید

برادران سیاری

مقدمه‌ی مولف:

دینامیک خاک یکی از اساسی‌ترین دروس رشته‌ی مهندسی عمران (**گرایش زلزله و مکانیک خاک‌وپی**) می‌باشد که برای آزمون دکتری از آن سوال طرح می‌شود. در کتاب حاضر، هر فصل شامل خلاصه درس، مثال‌ها و سوالات طبقه‌بندی شده می‌باشد. تنظیم مطالب در این کتاب به‌گونه‌ای است که خواننده‌ی آن می‌تواند با مطالعه‌ی متن، اولاً مفاهیم بنیادین را فرا گرفته و با بررسی نکات، مثال‌هایی که در انتهای هر مطلب آورده شده است دانش خود را ژرفای بیش‌تری بخشیده و بر توانایی‌های علمی و عملی خود در این زمینه بیفزاید و ثانیاً خود را به بهترین نحو برای شرکت در آزمون ورودی دکتری آماده سازد. سعی شده است منبعی قابل اطمینان در اختیار دانشجویان عزیز قرار داده شود و طبیعتاً با وجود تمام تلاش‌هایی که برای تدوین و گردآوری این کتاب صورت گرفته، خالی از نقص نخواهد بود. با این‌حال از همه‌ی عزیزان تقاضا داریم خطاهای ما را گوشزد کنند تا در آینده مجموعه‌ی بهتری فراهم گردد.

وظیفه‌ی خود می‌دانم از همه‌ی دست‌اندرکاران تهیه‌ی این کتاب که به‌نحوی در به‌ثمر رسیدن آن نقش موثر داشته‌اند قدردانی نمایم، هم‌چنین از مدیریت محترم موسسه‌ی ماهان، که کار چاپ و نشر آن‌را بر عهده داشتند تشکر فراوان نمایم.

در انتها خداوند بزرگ را شاکرم که توانایی ارائه‌ی این مجموعه را به این بنده‌ی حقیر خود عنایت فرمود و علاوه بر آن صبر و متانت همسرم را در زمان تالیف این کتاب پاس می‌دارم که با سعه‌ی صدر خود، امکان انجام این مهم را میسر نمود و حقیقتاً بدون مساعدت‌های ایشان به سرانجام رساندن این کتاب غیرممکن می‌نمود.

مانا باشید
علیرضا سلطانی
a.soltani@tmu.ac.ir

فهرست مطالب

فصل ۱: کاربرد دینامیک خاک در مسائل مهندسی ۷
۱-۱- دینامیک خاک چیست؟.. ۷
۱-۲- پی ماشین‌آلات... ۸
۱-۲-۱- بارهای وارده از ماشین‌آلات.. ۸
۱-۲-۲- معیار حاکم بر طراحی پی ماشین‌آلات.. ۱۲
۱-۲-۲-۱- تشدید.. ۱۲
۱-۳- مهندسی زلزله... ۱۲
۱-۴- شمع‌کوبی... ۱۳
۱-۵- تراکم دینامیکی و ارتعاشی.. ۱۳

فصل ۲: ارتعاشات سیستم‌های یک درجه آزادای ۱۵
۲-۱- ارتعاشات آزاد ۱۵
۲-۲- بررسی مسأله ارتعاش سیستم نامیرا از دیدگاه انرژی.............................. ۲۰
۲-۳- ارتعاش اجباری... ۲۱
۲-۴- ارتعاش تحت بارهای گذرا.. ۲۹
۲-۵- بار ضربه‌ای با شکل دلخواه (معرفی انتگرال حلقه) ۳۲
۲-۶ ارتعاشات اجباری تحت حرکات تناوبی پی... ۳۵
۲-۷- ارتعاشات در اثر حرکات گذرای پی... ۳۹
۲-۸- میرایی و اتلاف انرژی... ۴۳
۲-۹- نگاهی کوتاه بر پاسخ غیر خطی ۵۱

فصل ۳: سیستمهای چند درجه آزادی.. ۶۲
۳-۱- مقدمه... ۶۲
۳-۲- ارتعاشات آزاد سیستمهای دو درجه آزادی ۶۲
۳-۲-۱- ارتعاشات آزاد غیروابسته سیستم نامیرا با دو جرم.......................... ۶۳
۳-۲-۲- ارتعاشات آزاد وابسته سیستم نامیرا با یک جرم.............................. ۶۷
۳-۳- ارتعاشات وابسته سیستمهای دو درجه آزادی با یک جرم تحت بارهای پریودیک........ ۷۳
۳-۳-۱- ارتعاشات اجباری وابسته سیستم نامیرا.. ۷۳
۳-۴- سیستمهای چند درجه آزادای.. ۸۱

فصل ۴: انتشار امواج یک بعدی ۸۵
۴-۱- معادله موج و سرعت آن... ۸۵
۴-۲- رفتار میله تحت تأثیر نیروی اعمالی پریودیک... ۹۳
۴-۳- ارتعاشات گذرا در میله کشایند (الاستیک) ۱۰۰
۴-۴- میرایی تشعشعی... ۱۰۸

۴-۵- بستر یکنواخت تحت اثر حرکات پایه‌ی تناوبی.. ۱۱۵
۴-۶- پروفیل‌های غیریکنواخت و لایه‌ای.. ۱۲۱
۴-۷- شرایط خاستگاه.. ۱۲۳
۴-۷-۱- تقویت شتاب حداکثر.. ۱۲۳
۴-۷-۲- ارزیابی تقویت با استفاده از یافته‌های تئوری و تجربی.. ۱۲۳
۴-۷-۳- روش ضرایب دوگانه (Two – Foctor) ۱۲۵

فصل ۵: انتشار امواج دو و سه بعدی.. ۱۲۷
۵-۱- امواج کروی... ۱۲۷
۵-۲- امواج رایلی... ۱۳۰
۵-۳- انعکاس و انکسار در مرزها.. ۱۳۳
۵-۴- امواج سطحی در محیط لایه‌ای... ۱۳۸

فصل ۶: سرعت موج و مدول خاک در کرنشهای کوچک.. ۱۴۵
۶-۱- روشهای اندازه‌گیری... ۱۴۵
۶-۲- سرعت امواج در خاکهای دانه‌ای خشک.. ۱۵۲
۶-۳- سرعت موج برشی در خاکهای دانه‌ای مرطوب... ۱۶۰
۶-۴- سرعت موج فشاری عبوری از میان خاکهای دانه‌ای ۱۶۲
۶-۵- سرعت موج برشی درخاکهای چسبنده... ۱۶۷
۶-۶- سرعت موج فشاری در خاکهای چسبنده... ۱۷۰
۶-۷- مدول و سرعت موج در محل ۱۷۲

فصل ۷: طراحی پی ماشین‌آلات.. ۱۷۷
۷-۱- روشهای قدیمی آنالیز.. ۱۷۷
۷-۲- روشهای نوین آنالیز دینامیکی پی ماشین‌آلات... ۱۸۲
۷-۲-۱- روش اجزاء محدود ۱۸۳
۷-۲-۲- روش نیم فضای کشایند (الاستیک).. ۱۸۴
۷-۲-۳- روش ارائه شده توسط دوبریو گزتاس.. ۱۹۱
۷-۲-۳-۱- تعریف پاسخ دینامیکی ۱۹۱
۷-۲-۳-۲- میرائی تشعشعی پی‌های سطحی ۱۹۳

فصل اول

کاربرد دینامیک خاک در مسائل مهندسی

۱-۱- دینامیک خاک چیست؟

عموماً هر مسئله مهندسی ژئوتکنیک که با بارگذاری سریع یا متناوب مرتبط شود به دینامیک خاک مربوط است. برای این‌که طبیعت مسائل دینامیکی بیشتر مشخص شود. رفتار یک سیستم دینامیکی ساده شامل یک جرم که با فنر فشاری نگه داشته شده را در نظر بگیرید. برای بیان رفتار این سیستم بصورت ریاضی موارد زیر باید در نظر گرفته شود.

الف- اینرسی جسم

ب- خصوصیات تنش- کرنش- زمان فنر شامل رفتار جسم طی بارهای تناوبی

برای بار با آهنگ فزاینده، تفاوت فاحشی بین رفتار خاک در حالت استاتیکی و دینامیکی وجود ندارد و رفتار تنش- کرنش- زمان خاک برای بارگذاری کند و تند از لحاظ کمّی متفاوت است لیکن از نظر کیفی مشابه می‌باشد. در بارگذاری و باربرداری مکرر، رفتار خاک کاملاً با رفتار آن در حالت استاتیکی تفاوت دارد و کاربرد مدلهای کاملاً متفاوتی برای رفتار تنش- کرنش- زمان لازم است. به عنوان مثال، بارهای بسیار کوچکتر از مقاومت استاتیکی، چنانچه به دفعات زیاد تکرار شوند، می‌توانند موجب ایجاد تغییر شکلهای غیر منتظره و بسیار بزرگ در خاک شوند؛ همچنان‌که در خاکهای بدون چسبندگی اشباع وقتی روانگرایی رخ می‌دهد تغییر شکل بسیار زیاد ممکن است بوجود آید.

مسائل دینامیک خاک، بدلیل لزوم در نظر گرفتن اینرسی با مسائل استاتیکی خاک متفاوت هستند. در هر موضوعی از دینامیک خاک، مانند انتشار موج و مسئله تشدید بر نقش اینرسی تأکید زیادی می‌شود.

نکته: بر اساس ملاحظات فوق، می‌توان گفت دینامیک خاک شامل مباحث زیر است:

۱- ارزیابی خواص تنش- کرنش خاک تحت اثر بارهای دینامیکی و تکراری

۲- تکنیکهای محاسبه یا تخمین نقش نیروهای اینرسی در بارگذاری دینامیکی

۳- روشها و تجربیاتی که از این علم برای حل مسائل عملی استفاده می‌شود.

۱-۲- پی ماشین‌آلات

در طراحی پی ماشین آلات، مسئله تغییر مکان‌های دینامیکی از اهمیت خاصی برخوردار است.

نکته: چنانچه تغییر مکانهای ایجاد شده در اثر کارکرد ماشین بزرگ باشد، مشکلات زیر بوجود می‌آید:

۱- کارکردن افراد در مجاورت ماشین با اشکال مواجه شده و یا حتی ممکن است غیر ممکن گردد.

۲- دستگاه یا لوله‌های متصل به ماشین آسیب خواهد دید.

۳- در نتیجه تغییر مکان بیش از حد پی، عملکرد صحیح ماشین مختل می‌گردد.

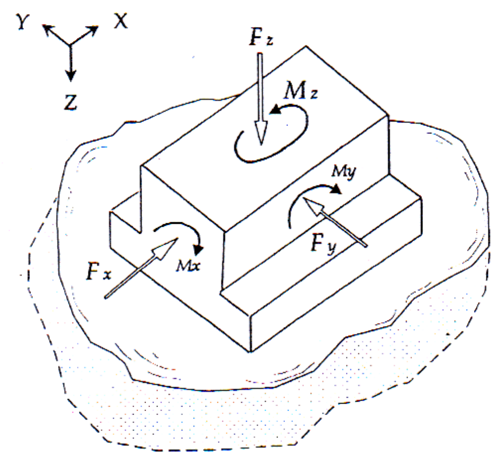
به علاوه ارتعاشات بلوک پی می‌تواند از طریق خاک به ساختمانها و ماشین‌آلات مجاور منتقل شده و در نتیجه ممکن است موجب ایجاد اشکال در عملکرد آن‌ها شود.

نکته: وظیفه مهندس طراح پی، پیشگیری از بروز چنین وضعیتهای نامطلوب می‌باشد. بدین منظور باید اطلاعات زیر تأمین گردد:

الف- نحوه اعمال بارهای دینامیکی ماشین بر پی

ب- روشهای برآورد و تعیین تغییر مکانهای ایجاد شده و نشست نهایی ناشی از بارهای وارده

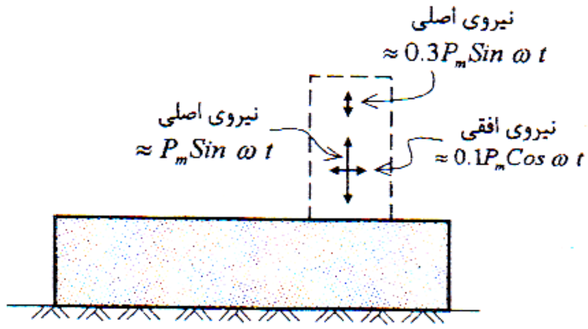
ج- تعیین تغییر مکانها و نشست مجاز



شکل ۱-۱ شمای کلی مسئله‌ی پی ماشین‌آلات

۱-۲-۱- بارهای وارده از ماشین‌آلات

ماشین‌آلات رفت و برگشتی: شمای کلی یک کمپرسور هوای ساده که بوسیله یک موتور الکتریکی کار می‌کند، در شکل ۱-۲ نشان داده شده است.



شکل ۱-۲ شمای کلی ماشین‌آلات رفت و برگشتی و پی آن (مقادیر مربوط به یک کمپرسور خاص بوده به عنوان نمونه ذکر شده‌اند)

در این صورت مقدار نیروی نامتوازن از حاصلضرب جرم پیستون در شتاب آن بدست می‌آید. در صورتیکه فقط عبارت نخست این معادله در نظر گرفته شود. نیروی دینامیکی از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\text{نیرو} = M\ddot{x}_p = -Mr_1\omega^2\cos\omega t \qquad (۱-۱)$$

که در آن M جرم پیستون، r_1 طول میل لنگ و ω سرعت چرش زاویه‌ای شفت می‌باشد.

نکته: معادله فوق، نکات مهم زیر دربارهٔ نیروی دینامیکی حاصل از عملکرد پیستون را آشکار می‌سازد:

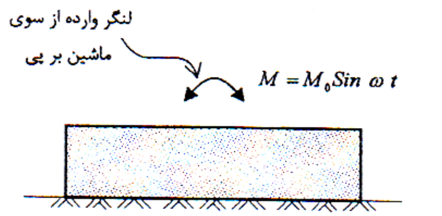
الف- نیروی دینامیکی حاصل از عملکرد ماشین دوره‌ای منظم است (در واقع سینوسی است) و فرکانس (یا پریود) نیرو برابر با فرکانس (یا پریود) چرخش موتور است.

ب- مقدار نیروی دینامیکی متناسب با توان دوم فرکانس کاری ماشین است. بنابراین هر چه ماشین سریعتر کار کند، مقدار نیروی دینامیکی نامتوازن افزایش خواهد یافت.

مثال ۱ نشان می‌دهد که حتی در چنین مسئله ساده‌ای، تاریخچه زمانی نیروی نامتوازن اعمال شده دقیقاً دوره‌ای منظم نمی‌باشد و فرکانس‌های بالاتر که در مقایسه دارای اهمیت کمتری هستند، وجود دارند. در طراحی، معمولاً اولین فرکانس (ω) و دومین فرکانس (2ω)در نظر گرفته می‌شود. معمولاً نسبت r_1 / r_2 حدود ۰/۲۵ تا ۰/۳ است و در نتیجه نیروی ثانویه از نیروی اصلی بسیار کوچکتر می‌باشد. به هر حال چنانچه فرکانس کاری دستگاه نزدیک به نصف فرکانس طبیعی ماشین پی باشد. نیروهای ثانویه در اثر تشدید به میزان قابل ملاحظه افزایش می‌یابد. بنابراین در اغلب مواردئ، بررسی اثر نیروی ثانویه دارای اهمیت است. به علاوه نیروی تناوبی مایل کوچکی به همراه پیچش دینامیکی. در اثر جرم میل لنگ و میله متصل کننده بوجود می‌آید. که این نیوری مایل در پاره‌ای شرایط ممکن است قابل ملاحظه‌ای باشد.

نکته: فرکانس کاری ماشین‌آلات رفت و برگشتی معمولاً بین ۴۵ تا ۵۰ دور بر ثانیه (CPS) می‌باشند.

ماشین‌آلات چرخشی: شمای کلی ماشین‌آلات چرخشی در شکل ۱-۳ نشان داده شده است. در این شکل یک موتور الکتریکی که کمپرسور گاز را به حرکت در می‌آورد. نمایش داده شده است. نوع دیگر از ماشین‌آلات چرخشی، توربیهایی هستند که ژنراتور الکتریکی را به حرکت در می‌آورند.



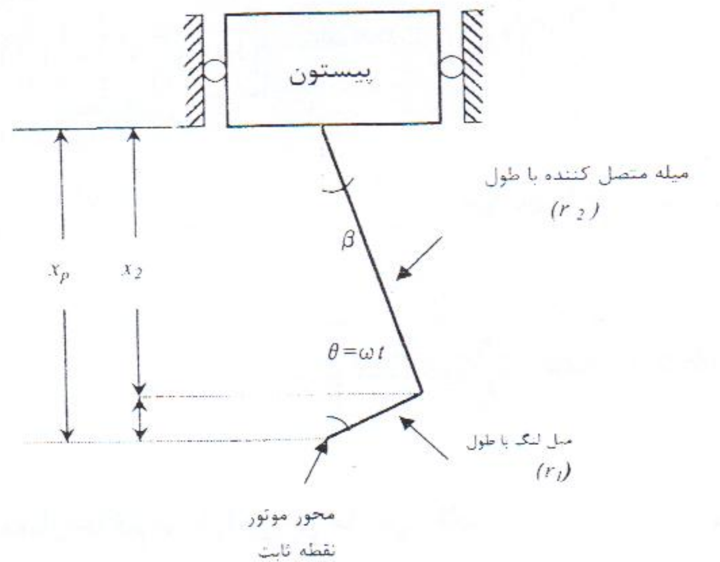
شکل ۱-۳ شمای کلی ماشین‌آلات چرخشی و پی آن

نکته: بدلیل متعادل بودن دستگاه به نظر می‌رسد نیروی دینامیکی نامتوازن بر پی وارد نمی‌شود.
نکته: فرکانس کاری این ماشین‌آلات اغلب بین ۶۰ تا ۲۰۰ دور بر ثانیه (CPS) می‌باشد.

ماشین‌آلات ضربه‌ای: انواع دیگری از ماشین‌آلات مورد استفاده در صنعت، نظیر دستگاه پرس سوراخکاری (پانچ)، بارهای ناگهانی بر پی وارد می‌کنند و می‌توانند موجب بروز مشکلات ارتعاشی در پی شوند. با پیچیده شدن عملکرد ماشین، توصیف نیروهای دینامیکی وارد بر پی دشوارتر شده و دقت براورد مقادیر نیروها کاهش می‌یابد.

ماشین‌آلات دقیق (حساس): یک شاخه خاص از طراحی پی ماشین‌آلات، طرح پی برای ماشین‌آلاتی است که دارای دقت عملکرد زیادی هستند. در طراحی پی این دسته از ماشین‌آلات نظیر دستگاههای اندازه‌گیری یا رادار، تغییر مکانهای ایجاد شده باید بسیار کوچک باشد.

مثال ۱: پیستون، میله متصل کننده، میل لنگ و شفت میل‌لنگ را که در شکل ۱-۴ آمده است. در نظر بگیرید. میل‌لنگ به صورت صلب به شفت میل‌لنگ (محور) متصل شده است. پینهایی در نقاط A و B وجود دارد. نیروی مورد نیاز برای شتاب دادن به پیستون با جرم M را بدست آورید.



شکل ۱-۴

حل: با توجه به قانون نیوتن

$$\text{نیرو}\ F = M\frac{d^2x_p}{dt^2} = M\ddot{x}_p$$

با توجه به شکل:

$$x_p = r_1\cos\omega t + r_2\cos\beta$$

که در آن ω فرکانس چرخش شفت است. زوایای و β با ωt از طریق رابطهٔ زیربه هم مرتبط می‌شوند:

$$r_2\sin\beta = r_1\sin\omega t$$

با استفاده از روابط مثلثاتی، روابط زیر بدست می‌آید:

$$\cos\beta = \sqrt{1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\sin^2\omega t} = \sqrt{\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\cos 2\omega t}$$

$$\frac{d^2\cos\beta}{dt^2} = \frac{-\omega^2\frac{r_1}{r_2}\cos 2\omega t}{\sqrt{\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\cos 2\omega t}} + \frac{\omega^2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^4\sin^2 2\omega t}{\left\{\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\cos 2\omega t\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

اگر $r_1/r_2 < 1$ باشد:

$$\frac{d^2\cos\beta}{dt^2} = -\omega^2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\cos 2\omega t$$

و

$$M\ddot{X}_p = -Mr_1\omega^2\left[\cos\omega t + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)\cos 2\omega t\right]$$

۱-۲-۲- معیار حاکم بر طراحی پی ماشین‌آلات

همانطور که قبلاً بیان شد، معیار اصلی حاکم بر عملکرد مناسب پی ماشین‌آلات دامنه مجاز حرکت است. دامنه مجاز حرکت است. دامنه مجاز حرکت عموماً تابع فرکانس کاری ماشین است. برای محدوده‌ای از فرکانس‌ها، معیار طراحی محدود کردن شتاب است و برای بقیه فرکانسها معیار طراحی محدود کردن سرعت یا تغییر مکان می‌باشد.

در حرکت سینوسی با فرکانس f، رابطه ساده زیر بین حداکثر تغییر مکان، حداکثر سرعت $\dot{x}_0$ و حداکثر شتاب $\ddot{x}_0$ قابل کاربرد است:

$$x_0 = \sin 2\pi ft = \sin\omega t$$

$$\dot{x}_0 = 2\pi f x_0 = \omega x_0 \qquad \text{(الف- ۱-۲)}$$

$$\ddot{x}_0 = 2\pi f\dot{x}_0 = (2\pi f)^2 x_0 = \omega^2 x_0 \qquad \text{(ب-۱-۲)}$$

بنابراین اگر حرکتی با دامنه $0/1cm$ در فرکانس $10Hz$ در نظر گرفته شود، حداکثر شتاب برابر $0/4g$ و حداکثر سرعت برابر $6/28cm/s$ خواهد بود. این مقادیر می‌تواند مستقیماً از روی نمودار مذکور و با استفاده از محورهای موجود بدست می‌آید.

۱-۲-۲-۱- تشدید

برای طراحی پی ماشین‌آلات لازم است هیچکدام از فرکانسهای طبیعی سیستم ماشین- پی- خاک در نزدیکی فرکانس کاری دستگاه قرار نگیرد. معمولاً ضریب اطمینانی حدود ۱/۵ در این رابطه در نظر گرفته می‌شود که می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$f < \frac{2}{3}f_r \ \text{یا}\ f > \frac{3}{2}f_r$$

که در آن f فرکانس کاری ماشین و f_r فرکانس طبیعی سیستم می‌باشد.

نکته: علت لزوم پیشگیری از پدیده تشدید، افزایش تغییر مکان‌های ایجاد شده در حالت تشدید و افزایش آن نسبت به مقادیر مجاز می‌باشد. لازم به ذکر است که در شرایط تشدید، معیار مجاز طراحی تغییر مکان‌های ایجاد شده می‌باشد و چنانچه با استفاده از روشهای دقیق اطمینان حاصل شود که در این حالت همچنان تغییر مکانها کوچک است. نیازی به دوری از تشدید وجود ندارد. به هر حال برآورد دقیق تغییر مکانهای ایجاد شده در حالت تشدید و اطمینان از دقت مقادیر فوق دشوار است و به همین دلیل در طراحی‌ها از وقوع تشدید. مشابه در نظر گرفتن ضریب اطمینان برای ظرفیت باربری استاتیکی می‌باشد و در هر دو مورد دلیل استفاده از ضریب اطمینان، ایجاد اطمینان از صحت عملکرد طرح علیرغم وجود قطعیت‌ها در طراحی می‌باشد.

۱-۳- مهندسی زلزله

امروزه اصلیترین و پر استفاده‌ترین مباحث دینامیک خاک، مباحثی هستند که در ارتباط با مهندسی زلزله مطرح می‌شود. و زلزله در اثر لغزش ناگهانی زمین در طول صفحه گسل رخ می‌دهد که در نتیجه آن انرژی ذخیره شده در گسل به صورت امواج انتشار می‌یابند. حرکات زمین و امواج لرزه‌ای ایجاد شده، باعث خرابی‌های زیادی در ساختمانها، پلها، برجها، کارخانه‌ها، سدها و سایر ساخته‌های دست بشر می‌شوند. به علاوه زلزله موجب لغزش توده‌های خاک و سنگ و همچنین روانگرایی خاکها می‌شود. علم

طراحی ساختمانها و سایر سازه‌ها بطوریکه در مقابل اثرات زلزله به خوبی مقاومت کرده و خرابی قاجعه‌آفرین نداشته باشند. «مهندسی زلزله» خوانده می‌شود. دینامیک خاک، یکی از مباحث اصلی مهندسی زلزله می‌باشد.

نکته: سئوالات مهمی که در رابطه با مهندسی زلزله، طرح شده و پاسخ آن‌ها به دینامیک خاک مربوط می‌شود. عبارتند از:

تأثیر خاک بر امواج لرزه‌ای یا «اثر ساختگاه» بزرگنمایی یا کوچک‌نمایی زلزله در محل مورد نظر، اندر کنش خک- سازه، روانگرایی، لغزش زمین و پایداری سدهای خاکی.

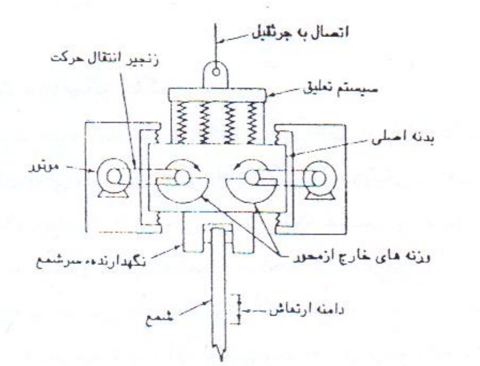
۱-۴- شمع‌کوبی

در شمع‌کوبی بوسیله چکشهای ضربه‌ای، باید به رفتار دینامیک یخاک توجه شود. ضربات شمع‌کوب امواج تنشی در شمع و در نتیجه در خاک اطراف ایجاد می‌کند. نفوذ در هر ضر به سریع می‌باشد و بنابراین مقاومت برشی خاک، مقاومت برشی «دینامیکی» آن می‌باشد. در روشهای اخیر و پیشرفته، توصیف رفتار شمع‌کوب برای بیان تنشی که شمع را به داخل خاک می‌راند و تنشی که از نوک آن منعکس می‌شود از معادلات انتشار امواج استفاده می‌شود. اغلب برای کنترل شمع‌کوبی حین کوبیدن شمع، سرعت و نیروی دینامیکی در نوک شمع اندازه‌گیری می‌شود و از یک تحلیل‌گر موج برای پیش‌بینی ظرفیت شمع استفاده می‌شود.

۱-۵- تراکم دینامیکی و ارتعاشی

نکته: در عملیات تراکم خاک با دستگاه تراکم ارتعاشی- چرخشی، باید به سئوالات زیر پاسخ داده شود:

آیا تراکم نهایی مورد نظر با کاربرد دستگاه تراکم ارتعاشی- چرخشی در سطح خاک قابل حصول است یا این‌که باید خاکبرداری انجام شده و خاک لایه به لایه متراکم شود.



شکل ۱-۵- شمع‌کوب ارتعاشی

در صورتیکه لازم شود خاکبرداری انجام شده و خاک لایه لایه متراکم شود. وزن وزنه و ضخامت هرلایه چقدر باید در نظرگرفته شود و به هر لایه چند ضربه باید کوبیده شود.

فصل دوم

ارتعاشات سیستم‌های یک درجه آزادی

خواص سیستمهای ارتعاشی به صورت خطی و یا غیرخطی در نظر گرفته می‌شود. در سیستمهای خطی اصل بر هم نهی صادق بوده و در بسیاری موارد راه حل‌های ریاضی معادله ارتعاش بدست آمده است. لیکن برخلاف سیستم‌های خطی، پرداختن به سیستم‌های غیرخطی دشوار بوده و اغلب این سیستم‌ها داری راه حل ریاضی نمی‌باشند. معمولاً سیستم‌های دینامیکی با افزایش دامنهٔ نوسان رفتار غیر خطی نشان می‌دهند. مطالعه ارتعاش خطی سیستم‌های مختلف به دو بخش تقسیم می‌شود: ارتعاشات آزاد و ارتعاشات اجباری.

«ارتعاشات آزاد» زمانی اتفاق می‌افتد که سیستم تحت نیروهای ذاتی خودش نوسان می‌کند. ارتعاشات آزاد تحت یک یا چند فرکانس طبیعی سیستم صورت می‌گیرد. فرکانس طبیعی مشخصه اصلی سیستم‌های دینامیکی است که به جرم، سختی و توزیع آن‌ها بستگی دارد.

نکته: چنانچه ارتعاش تحت نیروهای خارجی بوجود آید. «ارتعاش اجباری» خوانده می‌شود. وقتی تحریک نوسانی باشد، سیستم با فرکانس تحریک ارتعاش می‌کند. در صورتی که فرکانس ارتعاش بر یکی از فرکانسهای طبیعی سیستم منطبق شود. «تشدید» اتفاق می‌افتد و در شرایط تشدید، نوسانات بزرگی می‌تواند اتفاق بیافتد.

در سیستم‌های ارتعاشی بخشی از انرژی بوسیله اصطکاک و سایر مقاومتها مبرا می‌شود. در صورت کوچک بودن میرایی، تأثیر آن بر فرکانس‌های طبیعی بسیار اندک خواهد بود. تأثیر مهم میرایی، محدود کردن دامنه نوسان بخصوص در شرایط نزدیک به تشدید می‌باشد.

۲-۱- ارتعاشات آزاد

سیستم یک درجه آزادی شامل جرم، فنر و میراگر که در شکل ۲-۱ نشان داده شده است را در نظر بگیرید. در شرایط استاتیکی، وزنه فنر را فشرده ساخته و باعث بوجود آمدن نیرو در آن می‌شود. در بررسی ارتعاشات سیستم فوق، تغییرات در موقعیت جسم و تغییرات در نیرو مورد نظر است. نیروهای دینامیکی مؤثر بر جرم طی نوسان عبارتند از:

۱- نیروی فنر: حرکت در امتداد X (که در موقعیت استاتیکی اندازه‌گیری می‌شود) در جهت پایین مثت در نظر گرفته می‌شود. نیروی وارده بر جرم به سمت بالا برابر است با:

$$kx$$

۲- نیروی اینرسی: نیروی اینرسی با شتاب مخالفت می‌کند، و جهت آن به سمت بالاست و مقدار آن برابر است با:

$$m\ddot{x}$$

۳- نیروی میرایی: نیروی اعمال شده بوسیله میراگر متناسب با سرعت حرکت بوده و برابر است با:

$$c\dot{x}$$

از تعادل نیروهای کل، معادله ارتعاش سیستم یک درجه آزادی به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+k(t)=0 \qquad (۲-۱)$$

طرف دوم معادله در ارتعاشات آزاد برابر صفر و در ارتعاشات اجباری برابر نیروی اعمال شده می‌باشد. معادله ۲-۱، یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبه ۲ می‌باشد که جواب آن به صورت زیر می‌باشد:

$$x(t)=Ge^{st} \qquad (۲-۲)$$

که مقادیر G و S باید بدست آیند.

با مشتق‌گیری از $x(t)$، $\dot{x}(t)$ و $\ddot{x}(t)$ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{x}(t)=aGe^{st}$$

$$\ddot{x}(t)=s^{2}Ge^{st}$$

با جایگذاری $x(t)$ و مشتقات آن در معادله حرکت (و حذف G) معادله زیر بدست می‌آید:

$$e^{st}\left(ms^{2}+cs+k\right)=0$$

با در نظر گرفتن رابطهٔ زیر:

$$\omega^{2}=\frac{k}{m}$$

معادله فوق به صورت زیر در می‌آید:

$$s^{2}+\frac{c}{m}+\omega^{2}=0 \qquad (۲-۳)$$

همانگونه که ملاحظه می‌شود مقدار S که از معادله درجهٔ دوم فوق بدست می‌آید. به مقدار c و ω بستگی دارد.

یادآوری این نکته ضروری است که جواب (به صورت Ge^{st}) به توجه به رابطه اولر[1] تناوبی می‌باشد.

ارتعاشات آزاد بدون میرایی

در صورتی که میرایی وجود نداشته باشد یعنی اگر $c=0$ باشد، رابطه ۲-۳ به صورت زیر در می‌آید:

$$s^{2}+\omega^{2}=0\rightarrow s\pm i\omega \qquad (۲-۴)$$

بنابراین

$$x(t)=G_{1}ehi\omega t+G_{2}e^{-i\omega t} \qquad (۲-۵)$$

[1] - Euler

و با توجه به رابطه ۲-۴ معادله حرکت به صورت سادهٔ زیر بدست می‌آید:

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \qquad (۲-۶)$$

مقدار A و B در رابطه ۲-۶ از شرایط مرزی (اولیه) بدست می‌آید.

چنانچه تغییر مکان و سرعت در لحظه صفر به صورت $(\circ)$ و $\dot{x}(\circ)$ در نظر گرفته شود و در معادله ۲-۶ قرار داده شود، $x(\circ) = B$ و $\dot{x}(\circ) = A\omega$ به دست می‌آید، لذا می‌توان نوشت:

$$x(t) = \frac{\dot{x}(\circ)}{\omega}\sin\omega t + x(\circ)\cos\omega t \qquad (۲-۷)$$

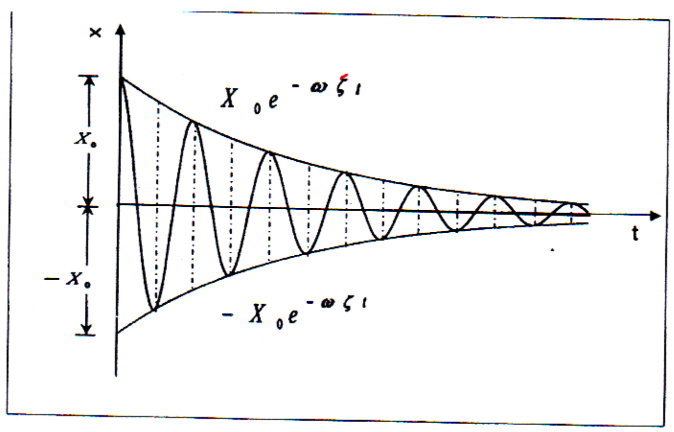
حل فوق بیانگر یک حرکت هارمونیک ساده می‌باشد که در شکل ۲-۱ نشان داده شده است.

در رابطه ۲-۷، ω فرکانس دایره‌ای حرکت است که بر حسب رادیان بر واحد زمان بیان می‌شود و f فرکانس حرکت است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f = \frac{\omega}{۲\pi} \qquad (۲-۸)$$

عکس فرکانس، پریود نامیده می‌شود:

$$T = \frac{۱}{f} = \frac{۲\pi}{\omega} \qquad (۲-۹)$$



شکل ۲-۱ ارتعاشات آزاد میراشونده

ارتعاش آزاد میراشونده

چنانچه میرائی در سیستم در نظر گرفته شود حل معادله ۲-۳ به صورت ز یر می‌باشد:

$$s = \frac{-c}{۲m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{۲m}\right)^{۲} - \omega^{۲}} \qquad (۲-۱۰)$$

تابع این‌که کمیت زیر رادیکال چه عددی را داشته باشد سه نوع مختلف حرکت حاصل می‌شود.

لذا در ادامه به این سه حالت پرداخت می‌شود.

میرایی بحرانی

در صورتیکه مقدار زیر رادیکال در معادله ۲-۱۰ صفر شود، $\omega=\frac{c}{2m}$ بوده و از آنجا مقدار میرایی بحرانی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$c_c=2m\omega \tag{۲-۱۱}$$

در این حالت مقدار s برابر است با:

$$s=-\frac{c}{2m}=-\omega \tag{۲-۱۲}$$

در این صورت، معادله مشخصه دارای ریشه تکرار بوده و جواب به صورت زیر می‌باشد (رجوع شود به کتب معادلات دیفرانسیل):

$$x(t)=G_1e^{-\omega t}+G_2te^{-\omega t}=(G_1+G_2t)e^{-\omega t} \tag{۲-۱۳}$$

با در نظر گرفته شرایط اولیه در معادله ۲-۱۳، پاسخ سیستم به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$x(t)=\left[x(0)(1+\omega t)+\dot{x}(0)t\right]e^{-\omega t} \tag{۲-۱۴}$$

معادله فوق در شکل ۲-۱ نشان داده شده است. از شکل ۲-۱ دیده می‌شود که پاسخ آزاد سیستم با میرائی حول جابجائی صفر، نوسانی نبوده و مقدار آن متناسب با یک جمله نمائی کاهش می‌یابد. در واقع میرائی بحرانی، کمترین مقدار میرائی است که در آن پاسخ ارتعاش آزاد سیستم، نوسانی نمی‌باشد.

ارتعاش آزاد با میرائی کوچکتر از میرائی بحرانی

در صورتی که میرائی سیستم از میرائی بحرانی کمتر باشد، عبارت زیر رادیکال منفی شده و جوابهای معادله ارتعاش بصورت مختلط در می‌آید. برای بررسی ارتعاش در این حالت نسبت میرائی یا ξ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\zeta=\frac{c}{c_s}=\frac{c}{2m\omega} \tag{۲-۱۵}$$

$$s=\zeta\omega\pm\sqrt{(\zeta\omega)^2-\omega^2}$$

ω_D به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega_D=\omega\sqrt{1-\zeta^2} \tag{۲-۱۶}$$

لذا S به صورت زیر بدست می‌آید:

$$s=-\zeta\omega\pm i\omega_D \tag{۲-۱۷}$$

در اغلب سیستم‌های متداول $\zeta<0/2$ می‌باشد، لذا فرکانس ارتعاش با و بدون میرائی تفاوت کمی با هم دارند. جواب معادله ۲-۱ در این دحالت به صورت زیر بدست می‌آید:

$$x(t)=G_1e^{-\zeta\omega t+i\omega_D t}+G_2e^{-c\omega t-i\omega_D t}=e^{-\zeta\omega t}\left(G_1e^{i\omega_D t}+G_2e^{-i\omega_D t}\right) \tag{۲-۱۸}$$

عبارت داخل پرانتز بیانگر حرکت هارمونیک ساده می‌باشد و می‌تواند به صورت زیر نوشته شود.

$$x(t)=e^{-\zeta\omega t}\left(A\sin\omega_D t+B\cos\omega_D t\right) \tag{۲-۱۹}$$

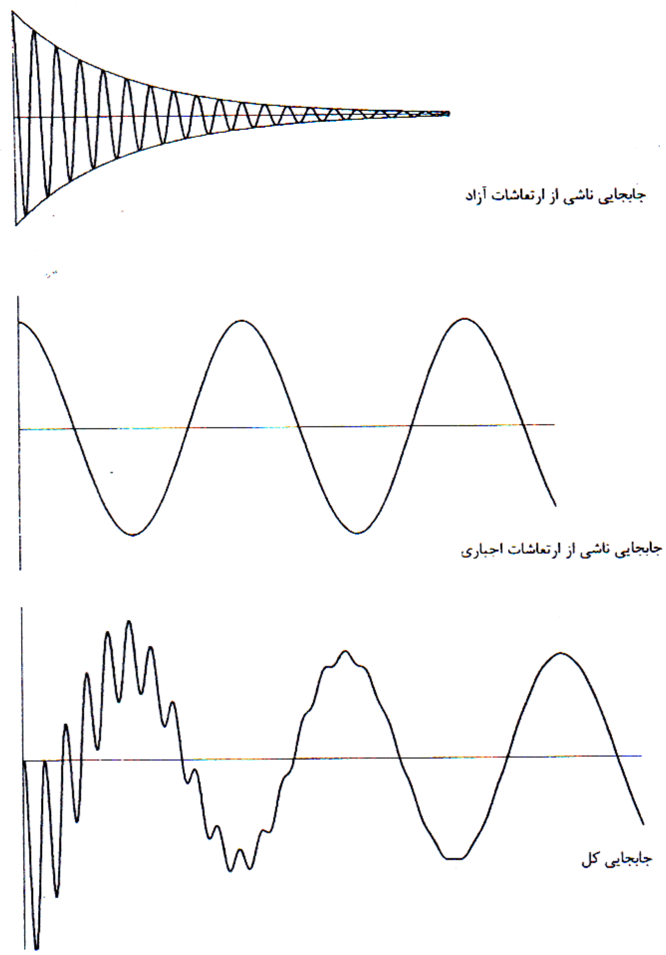
با اعمال شرایط اولیه، معادله فوق به صورت زیر بدست می‌آید:

$$x(t)=e^{-\zeta\omega t}\left[\frac{\dot{x}(\circ)+x(\circ)\zeta\omega}{\omega_D}\sin\omega_D t+x(\circ)\cos\omega_D t\right] \qquad (۲۰-۲)$$

نمودار پاسخ سیستم میرا شونده در شکل ۲-۲ نمایش داده شده است. حرکت حاصل تناوبی با فرکانس ω_D بوده و در آن دامنه نوسان متناسب با جمله $e^{-\zeta\omega t}$ کاهش می‌یابد.

میرائی که به صورت متناسب با سرعت در معادلات فوق در نظر گرفته شده است، «میرائی ویسکوز» نامیده می‌شود. نسبت میرائی ζ، در واقع میزان کاهش دامنه را مشخص می‌کند.

نسبت دوقله متوالی در شکل ۲-۲ یعنی x_n و x_{n+1} به صورت زیر بدست می‌آید:



شکل ۲-۲ ارتعاشات اجباری میراشونده

$$\frac{x_n}{x_{n+1}}=\exp\left(2\pi\zeta\frac{\omega}{\omega_D}\right) \qquad (۲۱-۲)$$

چنانچه از طرفین رابطهٔ فوق لگاریتم طبعی گرفته شود:

$$\delta = Ln\frac{x_n}{x_{n+1}} = 2\pi\zeta\frac{\omega}{\omega_D}$$

برای نسبت‌های میرائی کوچک رابطه تقریبی زیر بدست می‌آید:

$$\delta = 2\pi\zeta \qquad (۲-۲۲)$$

بنابراین:

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \exp(\delta) = e^{2\pi\zeta} = 1 + 2\pi\zeta + \frac{(2\pi\zeta)^2}{2} + \ldots \qquad (۲-۲۳)$$

برای مقادیر کوچک نسبت میرائی با دقت قابل قبولی دو جملهٔ اول سری فوق در نظر گرفته شده است و رابطه زیر برای نسبت میرائی بدست آمده است:

$$\zeta = \frac{x_n - x_{n+1}}{2\pi x_{n+1}} \qquad (۲-۲۴)$$

برای سیستم‌هایی که میرائی کمی دارند و اختلاف بین x_n و x_{n+1} کوچک است، برای دقت بیشتر در تخمین نسبت استهلاک، m سیکل در نظر گرفته می‌شود:

$$Ln\frac{x_n}{x_{n+m}} = 2m\pi\zeta\frac{\omega}{\omega_D} \qquad (۲-۲۵)$$

و از آنجا رابطه تقریبی زیر حاصل می‌شود:

$$\zeta = \frac{x_n - x_{n+m}}{2\pi m x_{n+m}} \qquad (۲-۲۶)$$

ارتعاش آزاد با میرائی بزرگتر از میرائی بحرانی

نسبت میرائی سیستم‌های دینامیکی در شرایط عادی بیش از نسبت بحرانی نمی‌باشد، لیکن برای کامل کردن این بحث در ادامه به حالتیکه $\zeta > 1$ باشد پرداخته می‌شود:

$$s = -\zeta\omega \pm \omega\sqrt{\zeta^2 - 1} = -\zeta\omega \pm \dot{\omega} \qquad (۲-۲۷)$$

که در آن $\dot{\omega} = \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}$ در نظر گرفته شده است. جواب معادله حرکت به صورت زیر بدست می‌آید:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega t}\left(A\sinh\dot{\omega}t + B\cosh\hat{\omega}t\right) \qquad (۲-۲۸)$$

که در آن مشابه حل اتهای پیشین، A و B با اعمال شرایط اولیه بدست می‌آیند.

فرم معادله ۲-۲۸ نشان می‌دهد پاسخ سیستم با میرائی بزرگتر از میرائی بحرانی، نوسانی نمی‌باشد.

۲-۲- بررسی مسأله ارتعاش سیستم نامیرا از دیدگاه انرژی

برای ارزیابی در سیستم جرم- فنر در زمانهای مختلف، ابتدا حرکت را هنگامی که حداکثر جابجائی اتفاق می‌افتد در نظر بگیرید.

$$\left(t = 0 \ , \ T/2 \ , \ T \ , \ 3T/2 \ ,\ldots\ldots, x = \pm x_0\right) \qquad (۲-۲۹)$$

در این زمانها سرعت صفر است و انرژی حرکتی وجود ندارد. بنابراین انرژی در فنر ذخیره می‌شود و مقدار آن برابر است با:

$$E_1 = \frac{1}{2}kx_0^2 \qquad (۲-۳۰)$$

از طرف دیگر در زمانهایی که جابجایی صفر است $\left(t=T/4\ ,\ 3T/4\ ,\ 5T/4,......\ ,\ x=0\right)$، سرعت حداکثر است:

$$\dot{x}_{max}=\omega x_0 \tag{۳۱-۲}$$

در این زمانها انرژی حرکتی برابر است با:

$$E_{22}=1m\omega^2x_0^2 \tag{۳۲-۲}$$

و هیچگونه انرژی در فنر ذخیره نمی‌شود. با توجه به رابطه $\omega=\sqrt{k/m}$ ملاحظه می‌شود که معادلات E_1، E_2 مساوی هستند و انرژی ایجاد شده در اثر اغتشاش اولیه در سیستم ثابت می‌ماند.

شایان توجه است که در تحلیل فوق از دو عبارت انرژی دیگر صرفنظر شده است: تغیرات انری پتانسیل جرم در حال حرکت و کار انجام شده توسط نیروی استاتیکی فنر در طی جابجایی دینامیکی به هر حال دو عبارت فوق نیز در همه زمانها همدیگر را خنثی می‌کنند.

۲-۳- ارتعاش اجباری

در این بخش به بررسی ارتعاشات اجباری سیستم جرم- فنر- میراگر پرداخته می‌شود. بار متناوب (پریودیک) وارده به صورت زیر بیان می‌شود:

$$P=P_0\sin\Omega t=P_m\sin 2\pi ft \tag{۳۳-۲}$$

که در آن:

pm: دامنهٔ بار وارده

Ω: فرکانس زاویه‌ای بار وارده

f: فرکانس بار وارده می‌باشد.

معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت در این حالت به صورت زیر می‌باشد:

$$m\ddot{x}(t)+kx(t)=P_m\sin\Omega t \tag{۳۴-۲}$$

حل عمومی، که همان پاسخ معادله ارتعاش آزاد است بصورت زیر می‌باشد:

$$x_c(t)=A\sin\omega t+B\cos\omega t \tag{۳۵-۲}$$

حل خصوصی، بیانگر رفتار خاص ایجاد شده در اثر بار وارده می‌باشد. (طرف دوم معادله دیفرانسیل) و می‌توان فرض کرد که همانند بار، تناوبی و همفاز با آن می‌باشد لیکن دامنه متفاوت است:

$$x_p(t)=G\sin\Omega t \tag{۳۶-۲}$$

با جایگذاری $x_p(t)$ و مشتقات آن در معادله اصلی، برای دامنه G رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$-\frac{m}{k}G\Omega^2+G=\frac{P_m}{k} \tag{۳۷-۲}$$

با در نظر گرفتن رابطهٔ $\omega_n^2=\dfrac{k}{m}$، رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$G\left[1-\frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right]=\frac{P_m}{k} \tag{۳۸-۲}$$

جواب کلی معادله ۲-۳۸ از مجموع جواب عمومی و خصوصی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$x(t)=A\sin\omega_n t+B\cos\omega_n t+\frac{P_m}{K}\frac{1}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}\sin\Omega t \qquad (۲-۳۹)$$

با اعمال شرایط اولیه بصورت $x(0)=\dot{x}(0)=0$ ثابتهای A و B بصورت زیر حاصل می‌شوند:

$$A=\frac{=P_m\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)}{k}\frac{1}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2} \quad , \quad B=0 \qquad (۲-۴۰)$$

و از آنجا معادله حرکت به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$X(t)=\frac{P_m}{k}\frac{1}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}\left[\sin-\frac{\Omega}{\omega_n}\sin\omega_n t\right] \qquad (۲-۴۱)$$

که در آن: $\Delta_{st}=\frac{P_m}{k}=$ جابجایی استاتیکی ایجاد شده از اعمال بار P_m

$\frac{1}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}=$ ضریب تقویت، بیانگر تشدید دینامیکی ناشی از بار وارده

$\sin\Omega t=$ مؤلفه پاسخ با فرکانس بار اعمالی است که پاسخ حالت پایا خوانده شده و مستقیماً به بار بستگی دارد.

$\frac{\Omega}{\omega}\sin\omega t=$ مؤلفه پاسخ با فرکانس طبیعی ارتعاش است که همان اثر ارتعاش آزاد ایجاد شده توسط شرایط اولیه می‌باشد.

در شرایط واقعی، در اثر وجود میرائی جمله آخر پاسخ میرا می‌شود. لذا به آن«پاسخ گذرا» گفته می‌شود.

نسبت پاسخ

برای مشخص شدن تأثیر دینامیکی بار اعمال شده، نسبت $R(t)$ به صورت نسبت تغییر مکان دینامیکی به تغییر مکان استاتیکی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(t)=\frac{x(t)}{x_{st}}=\frac{1}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}\left(\sin\Omega t-\frac{\Omega}{\omega}\sin\omega t\right) \qquad (۲-۴۲)$$

در شکل ۲-۲ پاسخ در برابر بار هارمونیک با شرایط اولیه سکون نشان داده شده است. پاسخ سیستم مجموع دو پاسخ سینوسی با فرکانس ω و Ω می‌باشد. باتوجه به شکل روشن می‌شود که:

الف) دو مؤلفه تمایل به هم فاز شدن و سپس غیرهمفاز شدن دارند که این پدیده «ضربان» خوانده می‌شود.

ب) شیب منحنی یعنی سرعت در زمان صفر برابر است (شرایط اولیه سکون) که به وسیله پاسخ گذرا تأمین می‌گردد.

سیستم با میرایی

در صورتی که میرایی در سیستم در نظر گرفته شود و با توجه به رابطهٔ $\frac{c}{m}=2\omega\zeta$، معادله حرکت به صورت زیر در می‌آید:

$$\ddot{x}(t)+2\omega\zeta\dot{x}(t)+\omega^2x(t)=\frac{P_m}{m}\sin\Omega t \qquad (۲-۴۳)$$

با توجه به این که در سیستم‌های متداول $\zeta<1$ است و با این فرض حل عمومی معادله فوق، همان پاسخ ارتعاش آزاد سیستم می‌باشد که در معادله ۲-۱۹ بیان گردید:

$$x_c(t)=e^{-\zeta\omega t}\left(A\sin\omega_D t+B\cos\omega_D t\right) \qquad (۲-۴۴)$$

حل خصوصی برای بار هارمونیک به صورت زیر می‌باشد:

$$x_p(t)=G_1\sin\Omega t+G_2\cos\Omega t \qquad (۲-۴۵)$$

از آنجا که در سیستم‌های دارای میرایی پاسخ سیستم ممکن است با بار وارده اختلاف فاز داشته باشد. لذا عبارت کسینوس در نظر گرفته شده است.

با جایگذاری معادله ۲-۴۵ در معادله ۲-۴۳ و جدا کردن ضرائب $\cos\Omega t$ و $\sin\Omega t$ روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{cases}\left[-G_1\Omega^2-G_2\Omega(2\zeta\omega)+G_1\omega^2\right]\sin\Omega t=\frac{P_m}{M}\sin\Omega t\\ \left[-G_2\Omega^2-G_1\Omega(2\zeta\omega)+G_2\omega^2\right]\sin\Omega t=0\end{cases} \qquad (۲-۴۶)$$

با حذف عبارات سینوس و کسینوس از طرفین معادلات فوق و تقسیم آن‌ها بر ω^2 و حل معادلات حاصل ثابتهای G_1 و G_2 صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$G_1=\frac{P_m}{K}\;\frac{1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)^2+\left(2\zeta\frac{\Omega}{\omega}\right)}$$

(۲-۴۷)

$$G_1=\frac{P_m}{K}\;\frac{1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)^2+\left(2\zeta\frac{\Omega}{\omega}\right)}$$

با جایگذاری عبارات فوق در حل خصوصی و با جمع کردن حل خصوصی و عمومی، حل کلی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$x(t)=e^{-\zeta\omega t}\left(A\sin\omega_D t+B\cos\omega_D t\right)+\frac{P_m}{K}\frac{1}{\left(1-\left(\frac{\Omega}{w}\right)^2\right)^2+(2\zeta\beta)^2}\times \qquad (۲-۴۷)$$

$$\left[\left(1-\left(\frac{\Omega}{w}\right)^2\right)\sin\Omega t-2\zeta\frac{\Omega}{\omega}\cos\omega t\right]$$

اولین عبارت نشان دهنده پاسخ گذرا و عبارت دوم پاسخ پایا می‌باشد.

جواب برای شرایط اولیه سکون $\left(x(0)=\dot{x}(0)=0\right)$ بصورت زیر می‌باشد:

$$x(t)=\frac{p_m}{k}\frac{\left[\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)\sin\Omega t-2\zeta\cos\Omega t\right]+e^{-\zeta\omega t}\left[2\zeta\frac{\Omega}{\omega}\cos\omega_d t+\frac{\Omega}{\omega_d}\left(2\zeta^2+\frac{\Omega^2}{\omega^2}-1\right)\right]\sin\omega_d t}{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)^2+4\zeta^2\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \quad (۲-۴۸)$$

معادله فوق قدری پیچیده است لذا بررسی چند حالت خاص مفید خواهد بود.

حالت میرایی کوچک

در صورتی که نسبت میرایی کوچکتر از ۰/۱ باشد $(0/1>\zeta)$، از برخی عبارات در رابطه فوق می‌توان صرفنظر کرد و پاسخ به صورت ساده زیر در می‌آید:

$$x(t)=\frac{P_m}{k}\frac{\sin\Omega t-e^{-\zeta\omega t}\frac{\Omega}{\omega}\sin\omega t}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \quad (۲-۴۸)$$

حرکت فوق شامل یک حرکت پریودیک با فرکانس بار اعمال شده و یک حرکت پریودیک ثانویه‌ای با فرکانس طبیعی سیستم می‌باشد. حرکت با فرکانس طبیعی سیستم (ارتعاش آزاد) در طی زمان میرا شده و تأثیر آن، همانگونه که در شکل ۲-۲ نشان داده شده است. کوئچک است. در سیستمهای سازه‌ای واقعی، بخش ارتعاش آزاد در پاسخ، بندرت بیش از ۲۵ تا ۵۰ سیکل ادامه می‌یابد. در بسیاری مسائل، فقط حرکاتی که در سیکلهای زیاد در پاسخ وجود دارند، مورد نظر هستند. در این صورت ترم دوم در معادله فوق قابل اغماض بوده و می‌توان تنها به ارتعاشات اجباری اکتفا کرد. در نظر گرفتن حرکت ناشی از ارتعاش آزاد می‌تواند موجب شود که حرکت در لحظات اولیه بزرگتر از حرکت در لحظات بعد شود.

ارتعاشات اجباری

چنانچه فقط بخشی از معادله ۲-۴۸ که به ارتعاشات اجباری مربوط است در نظر گرفته شود. معادله حرکت بصورت زیر در می‌آید:

$$x(t)=\frac{P_m}{k}\frac{\left[1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right]\sin\Omega t-2\zeta\frac{\Omega}{\omega}\cos\Omega t}{\left[1-\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)\right]^2+4\zeta^2\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \quad (۲-۴۹)$$

و یا

$$x(t)=\frac{P_m}{k}\frac{\sin(\Omega t-\alpha)}{\left[1-\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)\right]^2+4\zeta^2\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \quad (\text{۲-۵۰-الف})$$

که در آن:

$$\tan\alpha = \frac{۲\zeta\omega\Omega}{\omega^{۲} - \Omega^{۲}} \qquad (۲-۵۰-ب)$$

از معادله ۲-۲-الف نتایج زیر حاصل می‌شود:

الف) حرکت به صورت پریودیک و با فرکانس Ω یعنی فرکانس بار وارده می‌باشد،

ب) حرکت نسبت به بار وارده به اندازه زاویه فاز α تأخیر دارد. این بدان معنی است که حداکثر حرکت پس از زمانی که مقدار نیرو حداکثر است اتفاق می‌افتد.

ج) حداکثر بزرگی حرکت، x_m حاصلضرب خیز، P_m / k در ضریب بار دینامیکی، DLF می‌باشد. مقدار خیز تغییر مکانی است که در صورتیکه بار بصورت استاتیکی اعمال شود، بوجود می‌آید.

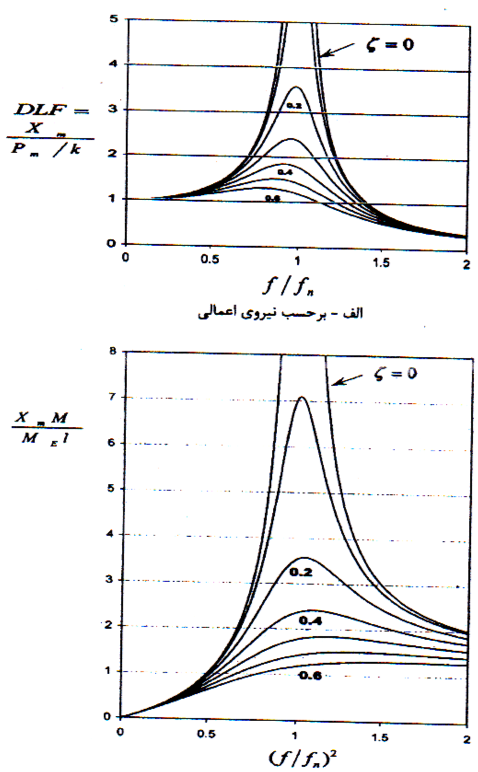
ضریب بار دینامیکی نسبت نیروی دینامیکی در فنر را به نیروی وارده نشان می‌دهد:

$$x_m = \frac{P_m}{k}\mathrm{DLF}$$

$$\mathrm{DLF} = \frac{۱}{\sqrt{\left(۱-\frac{\Omega^{۲}}{\omega^{۲}}\right)^{۲} + ۲\zeta^{۲}\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^{۲}}} \qquad (۲-۵۱)$$

ضریب بار دینامیکی تابعی از $\frac{\Omega}{\omega}$ (بار $\frac{f}{f_n}$) یا فرکانس بار وارده به فرکانس طبیعی سیستم و نسبت میرایی می‌باشد. ضریب بار دینامیکی شد شکل ۲-۳-الف نمایش داده شده است.

با توجه به شکل ۲-۳-ب نتایج زیر حاصل می‌شود:



شکل ۲-۳ دامنه بدون بعد حرکت

نکات مهم:

۱- اگر $\frac{\Omega}{\omega} \to 0$ آنگاه $DLF \to 1$ تغییر فیزیکی آن این است که در صورتی که بار وارده در مقایسه با فرکانس طبیعی سیستم به آهستگی وارد شود. بار وارده به سیستم همانند بار استاتیکی بر آن تأثیر می‌گذارد.

۲- اگر $\frac{\Omega}{\omega} \to \infty$ آنگاه $DLF \to 0$ که تغبیر فیزیکی آن عبارتست از این که اگر بار وارده در مقایسه با سرعتی که سیستم می‌تواند پاسخ دهد،. بسیار سریع باشد (با فرکانس بسیار بالا) جرم مربوطه بی‌حرکت مانده و در مقابل نیروی وارده بدلیل وجود اینرسی مقاومت می‌کند.

۳- با افزایش نسبت $\frac{\Omega}{\omega}$، ضریب بار دینامیکی تا مقدار حداکثر افزایش و سپس کاهش می‌یابد. شرایطی که در آن ضریب بار دینامیکی حداکثر است. شرایط «تشدید» خوانده می‌شود و فرکانس مربوط (Ω_r یا f_r) فرکانس تشدید نامیده می‌شود.

۴- مقدار DLF در شرایط تشدید تابع نسبت میرایی است:

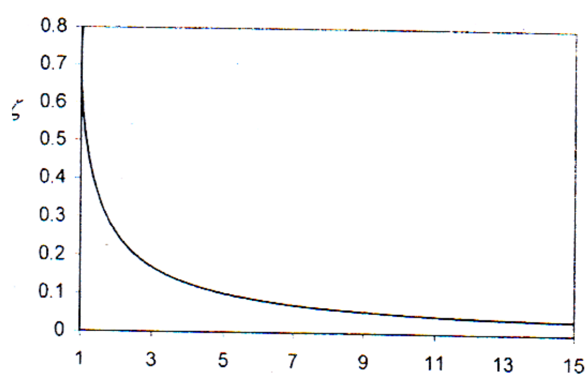
$$DLF_{max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{۵۲-۲}$$

رابطهٔ فوق در شکل ۲-۴ نشان داده شده است. در صورتیکه میرایی کوچک باشد. $DLF \cong \frac{1}{2\zeta}$.

۵- فرکانس تشدید قدری کوچکتر از فرکانس طبیعی است و با رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\Omega_r}{\omega} = \frac{f_r}{f_n} = \sqrt{1-2\zeta^2} \tag{۵۳-۲}$$

۶- در صورتی که $\zeta > \sqrt{\frac{1}{2}} \cong 0/7$ باشد، ضریب دینامیکی، DLF برابر با عدد یک (حالت استاتیکی) خواهد بود. لذا در این شرایط تشدید رخ نخواهد داد. شایان ذکر است که نسبت میرایی بیش از ۰/۷ بسیار بزرگ می‌باشد.



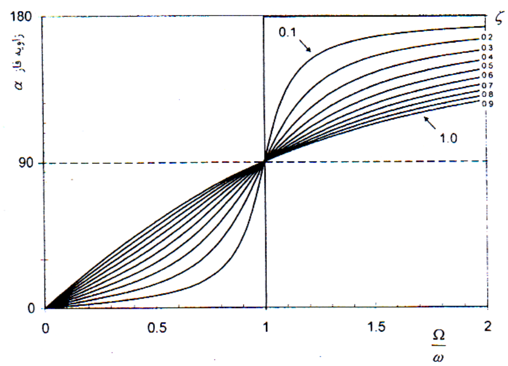
$\frac{X_m k}{P_m}$ یا $\frac{X_m M}{M_e l}$ **در حالت رزونانس – (تشدید)**

شکل ۲-۴ دامنه بدون بعد حرکت در حالت تشدید تغییرات (DLF) برحسب ζ، کسر مرایی بحرانی)

۷- در فرکانسهایی که بقدر کافی از فرکانس تشدید دور بوده و در صورتی که میرایی نسبتاً کوچک باشد، مقدار ضریب بار دینامیکی نسبت به میرایی حساس نمی‌باشد. لذا اگر $\frac{f}{f_n}<\frac{2}{3}$ و یا $\frac{f}{f_n}>\frac{3}{2}$ بوده و $\zeta<0/2$ باشد، رابطه زیر برای حالت بدون میرایی با خطایی حدود ۱۰٪ قابل استفاده است:

$$DLF=\frac{1}{\left[1-\left(\frac{f}{f_n}\right)^2\right]} \qquad (۲- ۵۴)$$

در شکل ۲-۵ راویه فاز α بر حسب فرکانس و میرایی نشان داده شده است. در فرکانسهای کاری کوچک، حرکت نسبت به نیروی اعمالی تأخیر اندکی دارد. وقتی $\frac{f}{f_n}$ خیلی بزرگ باشد، نیرو و حرکت تمایل دارند در فاز مخالف باشند یعنی زمانی که نیرو افزایش می‌یابد حرکت کاهش می‌یابد و بالعکس.



شکل ۲-۵ زاویه فاز α بر حسب نسبت فرکانس $\frac{\Omega}{\omega}$ برای مقادیر مختلف در میرایی

ارتعاشات تحت نیروی ناشی از دوران جرم خارج از مرکز

در قسمتهای قبلی به پاسخ دینامیکی سیستم یک درجه آزادی، صرفنظر از این که p_m مستقل از فرکانس است یا به آن بستگی دارد، پرداخته شد. در نوع متداولی از بارگذاری، دامنهٔ بار تابع فرکانس بارگذاری می‌باشد که در این قسمت بدان پرداخته شده است. مثالی از این نوع بار دینامیکی، بار اعمال شده توسط ماشین‌آلات چرخشی که جرم در آن‌ها متوزان نیست، می‌باشد:

$$P=M_eL\Omega^2\sin\Omega t \qquad (۵۵-۲)$$

که در آن،

M_e = جرم خارج از مرکز می‌باشد.

کمیت $M_eL\Omega^2$ دارای واحد (و بعد) نیرو است که با P_m مطابقت دارد.

حل معادله حرکت در این حالت با جایگذاری $M_eL\Omega^2$ بجای P_m بدست می‌آید و جواب به صورت زیر می‌باشد:

$$x_m=\frac{M_eL\Omega^2}{k}DLF=\frac{M_eL}{m}\left[\frac{f}{f_n}\right]DLF \qquad (۵۶-۲)$$

کمیت $\left(\frac{f}{f_n}\right)^{۲}$ در شکل ۲-۳-ب نشان داده شده است. خصوصیات اصلی که از رابطه فوق و شکل ۲-۳-ب بدست می‌آیند عبارتند از:

۱- وقتی $\frac{f}{f_n}\rightarrow ۰$، پاسخ هم به سمت صفر میل می‌کند. این مطلب بدان علت است که وقتی نیروی دینامیکی صفر است جرم خارج از مرکز ساکن است.

۲- وقتی $\frac{f}{f_n}\rightarrow \infty$، پاسخ به سمت یک میل می‌کند. نیروی دینامیکی p_m با افزایش فرکانس بسیار بزرگ می‌شود و سیستم را وادار به پاسخ دادن مطابق نیروی اعمال شده می‌کند.

۳- پاسخ بدون بعد در شرایط تشدید دقیقاً همانند شرایطی است که p_m ثابت است.

۴- فرکانس تشدید قدری از فرکانس طبیعی بزرگتر است:

$$x_m=\frac{M_eL\Omega^{۲}}{k}DLF=\frac{M_eL}{m}\left[\frac{f}{f_n}\right]DLF \tag{۵۷-۲}$$

کمیت $DLF \left(\frac{f}{f_n}\right)^{۲}$ در شکل ۲-۳-ب نشان داده شده است. خصوصیات اصلی که از رابطه فوق و شکل ۲-۳-ب بدست می‌آیند عبارتند از:

۱- وقتی $\frac{f}{f_n}\leftarrow ۰$، پاسخ هم به سمت صفر میل می‌کند. این مطلب بدان علت است که وقتی نیروی دینامیکی صفر است جرم خارج از مرکز ساکن است.

۲- وقتی $\frac{f}{f_n}\leftarrow \infty$، پاسخ به سمت یک میل می‌کند. نیروی دینامیکی P_m با افزایش فرکانس بسیار بزرگ می‌شود و سیستم را وادار به پاسخ دادن مطابق نیروی اعمال شده می‌کند.

۳- پاسخ بدون بعد در شرایط تشدید دقیقاً همانند شرایطی است که P_m ثابت است.

۴- فرکانس تشدید قدری از فرکانس طبیعی بزرگتر است.

$$\frac{f_r}{f_n}=\frac{۱}{\sqrt{۱-۲\zeta^{۲}}} \tag{۵۸-۲}$$

۵- پاسخ بدون میرایی که برآورد خوبی از پاسخ سیستم با میرایی‌های کوچک در فرکانسهایی کاملاً دور از فرکانس تشدید می‌باشد بصورت زیر است:

$$\frac{\left(\frac{f}{f_n}\right)^{۲}}{\left|۱-\left(\frac{f}{f_n}\right)^{۲}\right|} \tag{۵۹-۲}$$

برای مقادیر مشخص M_e، L و m، دامنه حرکت در حالت تشدید مستقل از k می‌باشد. چنانچه فنرهای موجود ضعیف (نرم) باشند، فرکانس تشدید کوچک خواند بود و نیروی اعمالی در این فرکانس کوچک می‌باشد. با افزایش می‌یابد.

۲-۴- ارتعاش تحت بارهای گذرا

در این بخش به رفتار سیستم‌های یک درجه آزادی که تحت بارهای «گذرا» قرار دارند، پرداخته می‌شود.
بارهای گذرا به بارهایی گفته می‌شود که یا پریودیک نیستند و یا پریودیک هستند ولی مدت زمان اعمال آن‌ها محدود است. در ادامه برای روشن شدن وجوه اصلی مسئله، چند نوع اصلی از بارهای گذرا مرود بحث قرار گرفته است.

الف- بار پله‌ای

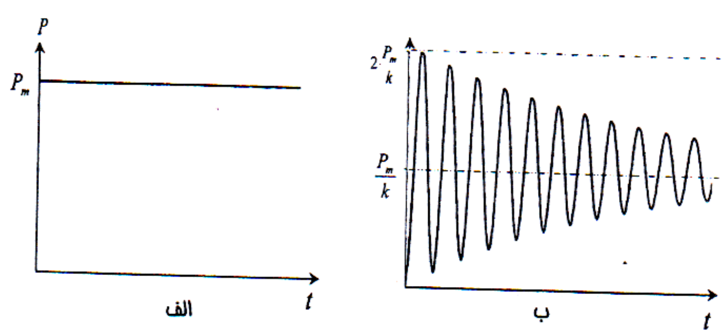
مطابق شکل ۲-۶-الف بصورت آنی وارد شده و سپس ثابت می‌مانند. پاسخ از بر هم نهی حل استاتیک $\frac{P_m}{k}$ و ارتعاش آزاد میرا شده بدست می‌آید. در صورت کوچک بودن میرایی پاسخ از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$x(t)=\frac{P_m}{k}\left[1-e^{-\zeta\omega t}\cos\omega t\right] \qquad (۲-۶۰)$$

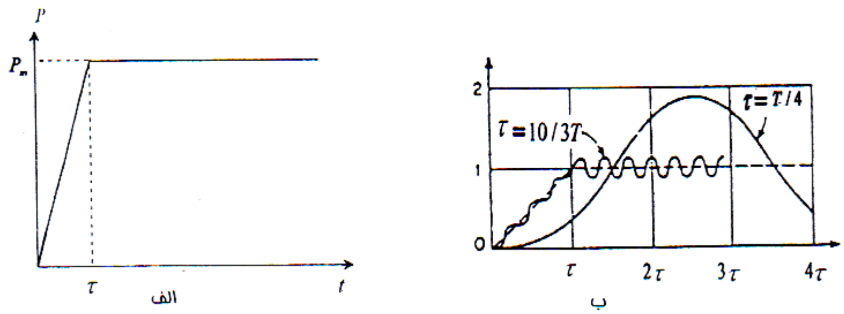
پاسخ فوق در شکل ۲-۶-ب نمایش داده شده است. جابجائی در اولین قله تقریباً $\frac{2P_m}{k}$ می‌باشد و در صورتی که میرایی صفر باشد، پاسخ تقریباً برابر مقدار مذکور خواهد بود. بنابراین گفته می‌شود که جابجایی و نیروی ایجاد شده در فنر در اثر بار پله‌ای دو برابر جابجایی و نیروی فنر در حالت استاتیک می‌باشد.

ب- بار شیب‌دار

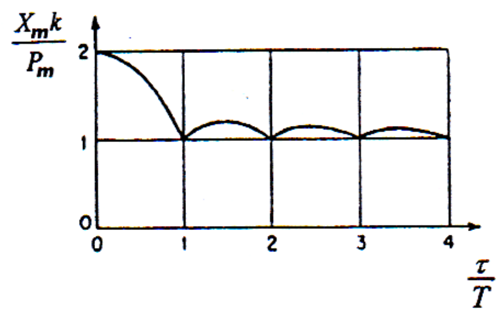
همانطو رکه در شکل ۲-۷-الف نشان داده شدهاست، بار شیب‌دار باری است که ابتدا بصورت خطی افزایش یافتهو سپس مقدارش ثابت می‌شود. پاسخ سیستم به این نوع بارگذاری در دو مرحله بدست می‌آید. ابتدا حل برای زمان بین ۰ و $(0\le t\le\tau)$ با شرایط اولیه سکون $(x(0)=\dot{x}(0)=0)$ بدست می‌آید. حرکت محاسبه شده در زمان $t=\tau$ شرایط اولیه برای ارتعاش را فراهم می‌سازد.
پاسخهای نمونه در شکل ۲-۷-ب نشان داده شده‌اند. حداکثر دامنه حرکت تابع t/τ مطابق شکل ۲-۸ می‌باشد. وقتی فرکانس طبیعی سیستم (در مقایسه با زمان τ کوچک باشد) حداکثر پاسخ قدری با پاسخ در حالت استاتیکی تفاوت می‌کند. وجود میرایی در سیستم باعث کاهش اهمیت ارتعاش آزاد می‌شود.
نکته شایات توجه آن است که پاسخ به بار دینامیکی حداکثر دو برابر جابجایی ایجاد شده از همان بار در حالت استاتیکی می‌باشد.



شکل ۲-۶ پاسخ به بار پله‌ای



شکل ۲-۷ حداکثر پاسخ به بار رمپ



شکل ۲-۸ حداکثر پاسخ به بار رمپ

ج- بار مربعی

بار ضربه‌ای مربعی که در شکل ۲-۹-الف نشان داده شده است در مدت زمان محدودی اعمال می‌شود. مشابه بار شیب‌دارف پاسخ باید در دو مرحله بدست آید. پاسخ در زمان $0 \le t \le \tau$ مشابه پاسخ برای بار شیب‌دار با میرایی صفر است. برای $t \ge \tau$ ارتعاشات آزاد وجود دارد که اغلب ارتعاش پسماند نامیده می‌شود. در شکل ۲-۱۰ پاسخ برای نسبتهای مختلف t / τ نمایش داده شده است. حداکثر پاسخ و بزرگی ارتعاشات پسماند تابعی از t / τ می‌باشد،

مطابق شکل ۲-۱۰. برای مقادیر بزرگ t / τ، حداکثر پاسخ طی ارتعاش اجباری اتفاق می‌افتد. برای $t / \tau > 0/5$ حداکثر پاسخ $\frac{2P_m}{k}$ همیشه طی بازه‌ای که در آن نیرو اعمال می‌شود، اتفاق می‌افتد. برای مقادیر کوچک t / τ حداکثر پاسخ طی ارتعاشات پسماند اتفاق می‌افتد.