موسسه آموزش عالی آزاد ماهان
www.mahan.ac.ir

دینامیک سازه

مجموعه

عمران

دکتری

مؤلفان: دکتر مهدی یزدانی

(عضو هیئت علمی دانشگاه اراک)

امین غضنفری تهران

یزدانی، مهدی
دینامیک سازه (مجموعه عمران)
مشاوران صعود ماهان: ۱۴۰۱
176ص: جدول، نمودار (آمادگی آزمون دکتری عمران)
ISBN: 978-600-389-350-4
فهرست‌نویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
فارسی ـ چاپ اول
دینامیک سازه (مجموعه عمران)
مهدی یزدانی، امین غضنفری تهران
ج ـ عنوان

رده بندی کنگره	TA٦٥٤ /د٤ی ۱۳۹۷۹
رده بندی دیویی	٦٢٤/١٧٢٠٧٦
شماره کتابشناسی ملی	٥٤٤٥٤٧٢

انتشارات مشاوران صعود ماهان

موسسه آموزش عالی آزاد ماهان
www.mahan.ac.ir

- **نام کتاب:** .... دینامیک سازه
- **مولف:** .... دکترمهدی یزدانی، امین غضنفری تهران
- **مدیران مسئول:** .... هادی و مجید ستّاری
- **مسئول تولید:** .... سمیه بیگی
- **ناشر:** .... مشاوران صعود ماهان
- **نوبت و تاریخ چاپ:** اول/۱۴۰۱
- **تیراژ:** .... ۱۰۰۰ نسخه
- **قیمت:** ۲/۳۹۰/۰۰۰ریال
- **شابک:** ISBN۹۷۸-۶۰۰-۳۸۹-۳۵۰-۴

انتشارات مشاوران صعود ماهان:تهران ـ خیابان ولیعصر، بالاتر از تقاطع ولیعصر مطهری، پلاک ۲۰۵۰
تلفن: ۸۸۱۰۰۱۱۳ و ۸۸۴۰۱۳۱۳

مقدمه ناشر

بنام خدا

ایمان دارم که هر تغییر و تحول بزرگی در مسیر زندگی بدون تحول معرفت و نگرش میسر نخواهد بود. پس بیایید با اندیشه توکل، تفکر، تلاش و تحمل در توسعه دنیای فکریمان برای نیل به آرامش و آسایش توأمان اولین گام را برداریم. چون همگی یقین داریم دانایی، توانایی می‌آورد.

شاد باشید و دلی را شاد کنید

برادران سیاری

مقدمه مولف

دینامیک سازه‌ها به‌عنوان یکی از مهمترین دروس مهندسی عمران شناخته می‌شود و از جنبه‌های مختلفی در مهندسی عمران کاربرد دارد. با توجه به اهمیت درس حاضر، اخیر همواره جزء منابع کنکور دکتری در سال‌های بوده است. از طرفی به علت پیچیدگی‌های موجود در درس دینامیک سازه‌ها، استفاده متقاضیان کنکور دکتری از کتاب‌های مرجع با مشکلات زیادی مواجه شده است. برای این منظور، هدف از کتاب حاضر ارائه خلاصه‌ای از مطالب اهم درس دینامیک سازه‌ها با حذف اثبات‌ها و روابط پیچیده است. بنابراین، کتاب حاضر جهت متقاضیان کنکور دکتری تهیه شده است.

کتاب حاضر حاصل چندین سال تجربه اینجانبان در تدریس دینامیک سازه‌ها در کنکور دکتری است. بنابراین، مطالب گردآوری شده کاملاً مطابق با سرفصل‌های کنکور دکتری در سال‌های گذشته است. در کتاب حاضر سعی شده از ارائه اثبات‌های بی‌شمار موجود در کتاب‌های مرجع خودداری شود و مطالب مورد نیاز به صورت مفهومی و با ارائه نکات تستی ارائه شود. برای این منظور، در فصل اول کتاب حاضر مبانی دینامیک سازه‌ها و تعیین معادلات تعادل دینامیکی ارائه شده است. در فصل دوم، تحلیل ارتعاشات سیستم‌های یک درجه آزادی به صورت کاملاً کنکوری و مفهومی ارائه شده است. فصول سوم و چهارم مربوط به تحلیل سیستم‌های یک درجه آزادی تحت اثر بارهای هارمونیک و غیرهارمونیک هستند. در فصل پنجم، تحلیل سیستم‌های غیرخطی و مبانی روش‌های عددی ارائه شده است. نهایتاً در فصل ششم، تحلیل سیستم‌ها در دستگاه مختصات کلی مورد بررسی قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که سرفصل‌های تهیه شده براساس سوالات کنکورهای سال‌های گذشته تهیه شده است. برای این منظور سه فصل اول از اهمیت به‌سزایی برخوردار هستند.

از خوانندگان محترم نیز تقاضا می‌شود پیشنهادهای خود را جهت کاهش کاستی‌ها و بهبود کتاب حاضر، از طریق ایمیل m-yazdani@araku.ac.ir با مولفین در میان بگذارند.

مهدی یزدانی
امین غضنفری تهران

فهرست مطالب

فصل اول: مبانی دینامیک سازه‌ها و تعیین معادلات حرکت........ ۷
سوالات تستی........ ۲۱
پاسخنامه سوالات تستی........ ۲۵
فصل دوم: تحلیل ارتعاش آزاد سیستم‌های یک درجه آزادی........ ۲۹
سوالات تستی........ ۳۸
پاسخنامه سوالات تستی........ ۴۲
فصل سوم: تحلیل سیستم‌های یک درجه آزادی تحت اثر بارگذاری هارمونیک........ ۴۶
سوالات تستی........ ۵۸
پاسخنامه سوالات تستی........ ۶۲
فصل چهارم: تحلیل دینامیکی سیستم‌های یک درجه آزادی تحت اثر بارهای غیرهارمونیکی........ ۶۶
سوالات تستی........ ۸۰
پاسخنامه سوالات تستی........ ۸۲
فصل پنجم: تحلیل سیستم‌های غیرخطی و روش‌های عددی........ ۸۴
سوالات تستی........ ۹۲
پاسخنامه سوالات تستی........ ۹۴
فصل ششم: معادله حرکت سیستم‌ها در مختصات کلی........ ۹۵
سوالات تستی........ ۱۰۲
پاسخنامه سوالات تستی........ ۱۰۶
فصل هفتم: تحلیل سیستم‌های چند درجه آزادی........ ۱۰۹
سوالات تستی........ ۱۲۱
پاسخنامه سوالات تستی........ ۱۲۴
آزمون‌های خودسنجی ماهان........ ۱۲۶
منابع........ ۱۷۶

فصل اول

مبانی دینامیک سازه‌ها و تعیین معادلات حرکت

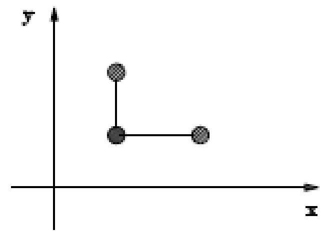
۱-۱-مقدمه

از گذشته تا به امروز هدف مهندسان بررسی رفتار اجسام (سازه‌ها) تحت اثر تحریک‌های خارجی بوده است تا بدین ترتیب قادر به بررسی عملکرد سازه‌های موردنظر باشند. به‌طورکلی، در مبانی علم مکانیک این تحرکات خارجی می‌توانند به دو دسته نیروهای استاتیکی و دینامیکی تقسیم شوند و رفتار اجسام در برابر نیروهای استاتیکی و دینامیکی متفاوت بوده و بنابراین لازم است که به صورت مجزا مورد بررسی قرار گیرند. چنانچه نیروی اعمالی مستقل از زمان باشد به آن‌ها نیروی استاتیکی گفته می‌شود و چنانچه این نیروها وابسته به زمان باشند یا به‌عبارت‌دیگر در هرلحظه مقدار آن‌ها تغییر نماید، به آن‌ها نیروهای دینامیکی گفته می‌شود. پیش‌تر در دروس استاتیک، مقاومت مصالح و تحلیل سازه‌ها با رفتار اجسام در برابر نیروهای استاتیکی آشنا شده‌اید. بنابراین هدف از دینامیک سازه، بررسی رفتار اجسام تحت اثر نیروهای دینامیکی است.

۱-۲-درجه آزادی

همان‌طور که گفته شد، برای بررسی رفتار اجسام تحت اثر نیروهای دینامیکی، بایستی نوع سیستم (جسم) مشخص باشد. در حالت کلی به منظور تحلیل اجسام در سیستم‌های پیچیده، بررسی آن‌ها از لحاظ فرمول‌بندی بسیار مشکل و در برخی از موارد غیرممکن است. برای این منظور در بررسی دینامیک سازه‌ها در علوم مهندسی، نیاز به ساده‌سازی هندسه این اجسام و سیستم‌ها است. برای سادگی در بررسی رفتار اجسام، در گام نخست برای آن‌ها درجه آزادی تعریف می‌شود و در ادامه برای هریک از این درجات آزادی معادله حرکت سیستمی استخراج می‌شود. در تعاریف مهندسی به‌طورکلی اجسام به دو دسته سیستم‌های پیوسته و سیستم‌های گسسته تقسیم می‌شوند.

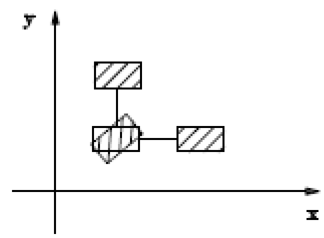
برای تعریف درجه آزادی به‌طورکلی اجسام گسسته به دو دسته ذره یا جسم صلب تقسیم می‌شود. همان‌طور که در شکل (۱-۱) نشان داده شده است، به حرکات مستقل از هم در دستگاه مختصات موردنظر، درجه آزادی گفته می‌شود. مثلاً، در دستگاه مختصات دکارتی در حالت دوبعدی، یک‌ذره می‌تواند در راستای x و y به‌طور مستقل حرکت نماید. بنابراین، ذره در دستگاه مختصات دکارتی دوبعدی، دو درجه آزادی و در دستگاه مختصات دکارتی سه‌بعدی دارای سه درجه آزادی است.



شکل (۱-۱): درجات آزادی ذره در دستگاه مختصات دکارتی

نکته ۱-۱: از آنجایی‌که مکان هندسی ذره زمانی که حول خود می‌چرخد تغییر نمی‌کند، بنابراین ذره دارای درجه آزادی دورانی نیست و درجات آزادی آن به درجات آزادی انتقالی محدود می‌شود.

دسته دیگر اجسام مربوط به جسم صلب هستند. همان‌طور که در شکل (۱-۲) مشاهده می‌شود، در دستگاه مختصات دوبعدی، جسم صلب دارای سه درجه آزادی است. نکته حائز اهمیت در مورد اجسام صلب به درجه آزادی دورانی آن‌ها مربوط می‌شود. از آنجایی‌که مکان هندسی جسم صلب زمانی که حول خود می‌چرخد، تغییر می‌کند، بنابراین جسم صلب علاوه بر درجات آزادی انتقالی (مانند ذره)، دارای درجات آزادی دورانی نیز است.



شکل (۱-۲): درجات آزادی جسم صلب در دستگاه مختصات دکارتی

نکته ۱-۲: جسم صلب در دستگاه مختصات دکارتی در حالت سه‌بعدی، دارای ۶ درجه آزادی است. سه درجه آزادی انتقالی (انتقال در جهت x، y و z) و سه درجه آزادی دورانی (دوران حول محور x، y و z).

نکته ۱-۳: از آنجایی‌که در بررسی رفتار سیستم‌های پیوسته تحت بارهای دینامیکی خارج از سرفصل‌های آزمون دکتری است، از ارائه آن‌ها در این کتاب خودداری می‌شود.

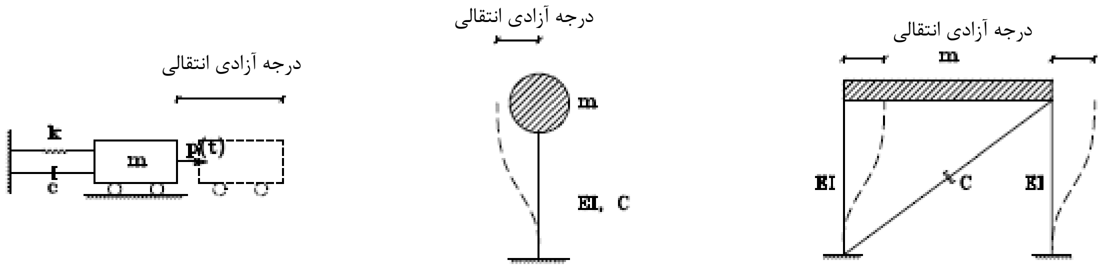
۱-۳ معادله حرکت یک سیستم یک درجه آزادی

در این قسمت، معادله حرکت سیستم‌های دارای رفتار گسسته و یک درجه آزادی به دست خواهد آمد. در مبانی دینامیک سازه‌ها با توجه به کاربرد آن در مهندسی عمران، شکل (۱-۳) به‌عنوان سیستم یک درجه آزادی در نظر گرفته می‌شود که عبارتند از:

الف) سیستم یک درجه آزادی ایده آل؛

ب) منبع آب مشابه سیستم یک درجه آزادی؛

ج) قاب برشی یک طبقه مشابه سیستم یک درجه آزادی.



شکل (۱-۳): سیستم‌های یک درجه آزادی: الف) سیستم یک درجه آزادی ایده‌آل؛ ب) مبنع آب مشابه سیستم یک درجه آزادی؛ ج) قاب برشی یک طبقه مشابه سیستم یک درجه آزادی.

نکته ۱-۴: از آنجایی‌که در قاب برشی سقف صلب است، بنابراین جابه‌جایی جانبی دو ستون قاب برابر بوده و این سیستم به صورت یک درجه آزادی در نظر گرفته می‌شود. به عبارت دیگر در هر سه سیستم ذکر شده، کل سیستم دارای یک حرکت مستقل است.

همان‌طور که مشخص است، در علم مکانیک، سازه‌ها و اجسام از قانون نیوتن پیروی می‌کنند. بنابراین برای هر درجه آزادی تعریف‌شده در سیستم بایستی مطابق زیر تعادل برقرار باشد:

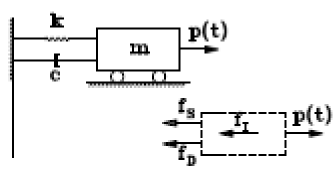
$$\sum F = m\ddot{u} \tag{۱-۱}$$

$$\sum M = I_o\ddot{\theta} \tag{۱-۲}$$

در رابطه (۱-۱) تعادل از نوع انتقالی است که بایستی در هر سه جهت x، y و z در حالت کلی برقرار باشد. همچنین، در رابطه (۱-۲) تعادل از نوع دورانی است که بایستی حول محورهای x، y و z در حالت کلی ارضا گردد (I_o لختی دورانی سیستم است).

بنابراین، یک جسم صلب در حالت کلی دارای ۶ معادله تعادل است. برای به دست آوردن معادله حرکت یک سیستم یک درجه آزادی مطابق زیر عمل می‌شود:

۱- در سیستم یک درجه آزادی نشان داده شده در شکل (۱-۴)، با توجه به جهت نیروی اعمال‌شده بایستی جابه‌جایی مجازی را برای جسم تصور نمود.



شکل (۱-۴): تعادل در سیستم یک درجه آزادی

۲- با توجه به این جابه‌جایی مجازی، دیاگرام جسم آزاد سیستم یک درجه آزادی ترسیم می‌شود.

۳- یک جسم زمانی در حال تعادل است که مجموع تمام نیروها در همه راستاها برابر صفر باشند. بنابراین، ازآنجایی‌که سیستم فقط در راستای x دارای یک درجه آزادی است، معادله تعادل در این راستا نوشته می‌شود. در نتیجه:

$$f_S + f_D + f_I = P(t) \tag{۱-۳}$$

در رابطه فوق:

f_S نیروی ناشی از کشیدن فنر است که تلاش می‌کند جسم را به حالت اولیه خود برگرداند.

f_D نیروی ناشی از میرایی جسم است که تلاش می‌کند حرکت جسم را متوقف نماید.

f_I نیروی ناشی از اینرسی جسم است که همواره در خلاف جهت حرکت به جسم وارد می‌شود.

$P(t)$ نیروی خارجی وارد به جسم جهت بر هم زدن تعادل جسم است.

با توجه به موارد فوق، در صورتی‌که میزان جابه‌جایی سیستم تحت اثر بار خارجی $P(t)$ برابر $u(t)$ باشد، آنگاه:

$$f_S = ku(t) \tag{۱-۴}$$

$$f_D = c\dot{u}(t) \tag{۱-۵}$$

$$f_I = m\ddot{u}(t) \tag{۱-۶}$$

که در رابطه‌های فوق، k سختی فنر، c میرایی و m جرم جسم است. همچنین، $\dot{u}(t)$ سرعت و $\ddot{u}(t)$ شتاب جسم در هر لحظه است. بنابراین، معادله حرکت یک جسم یک درجه آزادی مطابق زیر به دست می‌آید:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P(t) \tag{۱-۷}$$

در رابطه (۱-۷) نیروی فنر با توجه به در نظر گرفتن رفتار خطی برای فنر به‌دست‌آمده است. همچنین، نیروی اینرسی با توجه به قانون دوم نیوتن قابل‌بیان است.

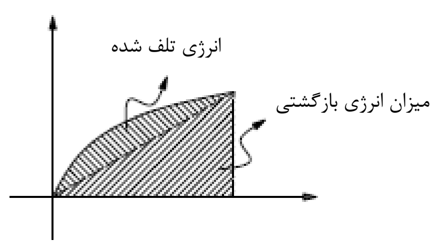
برخلاف نیروی فنر و نیروی اینرسی، برای تعیین نیروی میرایی، رفتار مشخصی وجود ندارد، اما مطالعات و تحقیقات آزمایشگاهی و تحلیلی نشان داده است که در صورتی‌که رفتار نیروی میرایی را به صورت ویسکوز در نظر گرفت، فرم معادلات به شیوه مناسبی تبدیل می‌شود. از این‌رو نیروی میرایی را برابر حاصل‌ضرب ضریب میرایی در سرعت جسم در هر لحظه در نظر می‌گیرند. اگر میرایی وجود نداشته باشد، سیستم برای همیشه در حال حرکت (ارتعاش) خواهد بود (مطابق قانون اول نیوتن). اما در عمل اصطکاک با هوا، اصطکاک بین ذرات سیستم یا اصطکاک بین اتصالات اجزا در سیستم، تسلیم شدن مصالح و به وجود آمدن ترک در سیستم باعث ایجاد اتلاف انرژی می‌شود. به‌عبارت‌دیگر، به این نیروی مستهلک‌کننده نیروی میرایی گفته می‌شود.

نکته ۱-۵: اگر میرایی متناسب با سرعت حرکت جسم باشد به آن میرایی لزجی گفته می‌شود و در عمل به‌طور خاص این‌گونه نیست اما به دلیل سهولت در حل معادلات، این‌گونه فرض می‌شود.

نکته ۱-۶: میرایی به هندسه و ابعاد سازه بستگی ندارد ولی به نوع مصالح و نوع اتصالات در سازه بستگی دارد.

نکته ۱-۷: میرایی ناشی از مکانیزم‌های اتلاف انرژی در حالت حرکت، مانند اصطکاک در اتصالات، ترک‌ها، مصالح و غیره است.

نکته ۱-۸: انرژی تلف‌شده در رفتار غیرخطی مصالح طبق شکل (۱-۵) سبب اتلاف انرژی می‌شود.



شکل (۱-۵): انرژی تلف‌شده در رفتار غیرخطی مصالح و اثر آن بر میرایی

نکته ۱-۹: ضریب میرایی به صورت کاملاً تجربی و آزمایشگاهی برای هر ماده و یا سیستمی به دست می‌آید.

نکته ۱-۱۰: در تحلیل دینامیکی سازه‌ها، میرایی به صورت درصد میرایی به‌کار برده می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} \tag{۱-۸}$$

در رابطه فوق، ξ درصد میرایی، c ضریب میرایی و c_{cr} میزان میرایی بحرانی است.

به‌طورکلی، درصد میرایی برای فولاد در حدود ۳ درصد، بتن حدود ۵ تا ۱۰ درصد (بسته به کیفیت آن)، چوب حدود ۱۵ تا ۲۰ درصد (بسته به جنس چوب) و خاک در حدود ۲۰ درصد است.

به منظور تعیین مشخصات ذاتی یک سیستم دینامیکی، در ابتدا باید معادله حرکت را بدون در نظر گرفتن نیروهای خارجی بازنویسی نمود (زیرا مشخصات ذاتی سیستم مستقل از نیروی خارجی است)، بنابراین:

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=0 \quad (۱-۹)$$

درصد میرایی ξ و میرایی بحرانی c_{cr} به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\xi=\frac{c}{c_{cr}}\ ,\ c_{cr}=2m\omega=2\sqrt{km} \quad (۱-۱۰)$$

که در رابطه‌ی فوق، ω فرکانس سیستم بوده و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (۱-۱۱)$$

بنابراین:

$$c=2m\omega\xi \quad (۱-۱۲)$$

با جایگذاری رابطه (۱-۱۲) در رابطه (۱-۹) خواهیم داشت:

$$m\ddot{u}+2m\omega\xi\dot{u}+ku=0 \quad (۱-۱۳)$$

با ضرب کردن طرفین رابطه (۱-۱۳) در $\frac{1}{m}$ داریم:

$$\ddot{u}+2\omega\xi\dot{u}+\omega^2u=0 \quad (۱-۱۴)$$

همان‌طور که از رابطه (۱-۱۴) مشخص است، معادله حرکت یک سیستم یک درجه آزادی فقط به فرکانس و میرایی بستگی دارد. بنابراین، این دو مقدار مشخصات ذاتی دینامیکی یک جسم هستند.

نکته ۱-۱۱: مشخصات ذاتی یک جسم در حالت استاتیکی، سختی آن سیستم است که شامل ضریب پواسون و مدول ارتجاعی آن سیستم می‌شود.

نکته ۱-۱۲: معادله حرکت یک سیستم یک درجه آزادی (رابطه (۱-۷)) به صورت مستقیم، با استفاده از شکل (۱-۴) و قانون دوم نیوتن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sum F=m\ddot{u} \quad (۱-۱۵)$$

$$P(t)-f_s-f_D=m\ddot{u} \quad (۱-۱۶)$$

$$m\ddot{u}+f_D+f_s=P(t) \quad (۱-۱۷)$$

بنابراین داریم:

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=P(t) \quad (۱-۱۸)$$

نکته ۱-۱۳: اثر وزن بر معادله حرکت: با توجه به اینکه وزن یک جسم منجر به جابه‌جایی استاتیکی می‌شود، بنابراین در معادله حرکت اثری ندارد. به‌عنوان مثال، تیری را مطابق شکل (۱-۶) در نظر بگیرید. معادله حرکت تیر با توجه به دیاگرام جسم آزاد آن برابر است با:

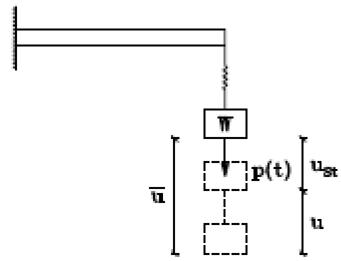
$$m\ddot{\bar{u}}+k\bar{u}=P(t)+W \quad (۱-۱۹)$$

$$m(\ddot{u}+\ddot{u}_{st})+k(u+u_{st})=P(t)+W \quad (۱-۲۰)$$

$$m\ddot{u}+ku=P(t)+W-ku_{st} \quad (۱-۲۱)$$

از آنجایی‌که $W=ku_{st}$ است، بنابراین:

$$m\ddot{u}+ku=P(t) \quad (۱-۲۲)$$



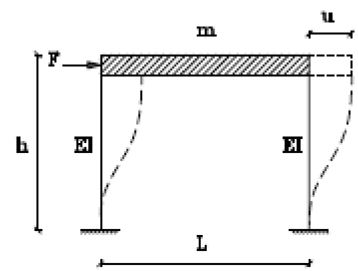
شکل (۱-۶): اثر وزن بر معادله حرکت

۱-۴- محاسبه سختی

در این بخش، به ارائه نحوه محاسبه سختی در سیستم‌هایی پرداخته خواهد شد که ممکن است در سؤالات کنکور سؤال طرح شود.

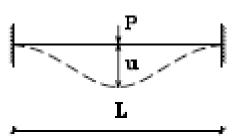
۱-۴-۱ محاسبه سختی جانبی قاب برشی

برای محاسبه سختی هر یک از ستون‌ها در شکل (۱-۷) از تحلیل سازه‌ها استفاده می‌شود.



شکل (۱-۷): قاب برشی با پای گیردار

مطابق شکل (۱-۸)، تغییرشکل ستون یا تیر دوسر گیردار تحت بار متمرکز میانی برابر است با:



شکل (۱-۸): بررسی تیر دوسر گیردار

$$u = \frac{PL^{۳}}{۱۹۲EI} \tag{۲۳-۱}$$

$$k = \frac{P}{u} = \frac{۱۹۲EI}{L^{۳}} \tag{۲۴-۱}$$

با استفاده از خاصیت تقارن، جابه‌جایی هر یک از ستون‌های قاب برشی با اعمال تغییرات زیر، برابر است با:

$$u = \frac{(۲F)(۲h)^{۳}}{۱۹۲EI} \tag{۲۵-۱}$$

بنابراین سختی هر ستون برابر است با:

$$k_c = \frac{۱۲EI}{h^{۳}} \tag{۲۶-۱}$$

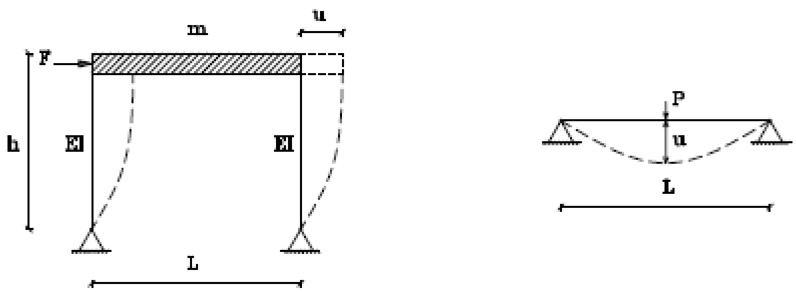
با توجه به برابر بودن جابه‌جایی ستون‌ها در سیستم قاب برشی، با استفاده از قوانین سختی سیستم‌های موازی، سختی کل قاب برابر مجموع سختی ستون‌ها خواهد بود. یعنی:

$$k=\sum_{i=1}^{n}\frac{12EI}{h^3} \qquad (۱-۲۷)$$

که در این رابطه n تعداد ستون‌هاست. در قاب حاضر n برابر ۲ است. پس سختی قاب از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$k=\frac{24EI}{h^3} \qquad (۱-۲۸)$$

در صورت مفصلی بودن تکیه‌گاه قاب برشی نشان داده شده در شکل (۱-۷)، تغییرشکل قاب، مطابق شکل (۱-۹) خواهد بود.



شکل (۱-۹): سختی قاب برشی با پای مفصلی

مطابق شکل (۱-۹)، تغییرشکل ستون یا تیر دوسر مفصل تحت بار متمرکز میانی برابر است با:

$$u=\frac{Pl^3}{48EI} \qquad (۱-۲۹)$$

$$k=\frac{P}{u}=\frac{48EI}{L^3} \qquad (۱-۳۰)$$

با استفاده از خاصیت تقارن، جابه‌جایی هر یک از ستون‌های قاب برشی با اعمال تغییرات زیر، برابر است با:

$$u=\frac{(2F)(2h)^3}{48EI} \qquad (۱-۳۱)$$

بنابراین سختی هر ستون برابر است با:

$$k_c=\frac{3EI}{h^3} \qquad (۱-۳۲)$$

با توجه به اینکه سیستم قاب برشی به صورت موازی است، پس سختی قاب از رابطه زیر تعیین می‌گردد:

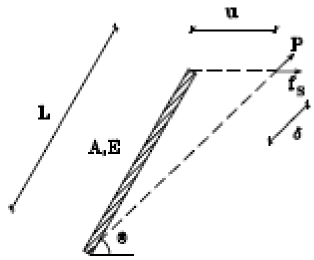
$$k=\sum_{i=1}^{n}\frac{3EI}{h^3} \qquad (۱-۳۳)$$

برای قاب حاضر داریم:

$$k=\frac{6EI}{h^3} \qquad (۱-۳۴)$$

۱-۴-۲- محاسبه سختی جانبی اعضای محوری

مطابق شکل (۱-۱۰) برای محاسبه سختی جانبی میله باید رابطه بین δ و u و همچنین P و f_s تعیین شود. با استفاده از مفاهیم درس مقاومت مصالح به یاد داریم:



شکل (۱-۱۰): سختی محوری و جانبی اعضای محوری

$$\delta = \frac{PL}{EA} \quad (۱-۳۵)$$

$$\frac{P}{\delta} = \frac{EA}{L} \quad (۱-۳۶)$$

پس سختی محوری میله برابر است با:

$$K_a = \frac{EA}{L} \quad (۱-۳۷)$$

طبق رابطه فوق، سختی جانبی نیز برابر $\frac{f_s}{u}$ خواهد بود، بنابراین:

$$f_s = P\cos\theta \rightarrow P = \frac{f_s}{\cos\theta} \quad (۱-۳۸)$$

$$\delta = u\cos\theta \quad (۱-۳۹)$$

با تقسیم رابطه (۱-۳۸) و (۱-۳۹) نسبت به هم ($\frac{P}{\delta}$):

$$\frac{P}{\delta} = \frac{f_s/\cos\theta}{u\cos\theta} = \frac{f_s}{u\cos^2\theta} \quad (۱-۴۰)$$

از طرفی $\frac{P}{\delta} = \frac{EA}{L}$، در نتیجه:

$$\frac{f_s}{u\cos^2\theta} = \frac{EA}{L} \quad (۱-۴۱)$$

بنابراین داریم:

$$\frac{f_s}{u} = \frac{EA}{L}\cos^2\theta \quad (۱-۴۲)$$

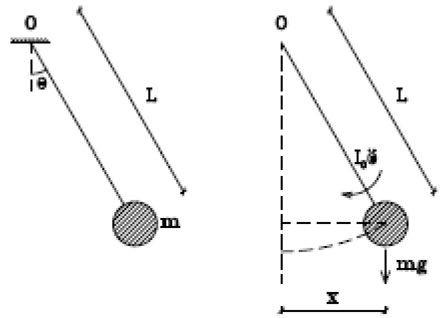
نکته ۱-۱۴: در یک قاب برشی که دارای یک مهاربند قطری است، سختی جانبی مهاربند مطابق رابطه (۱-۴۲) محاسبه می‌شود.

۱-۵- معادله حرکت سیستم پاندول

در بخش ۱-۳، معادله حرکت یک سیستم یک درجه آزادی با درجه آزادی انتقالی، محاسبه شد. در این بخش به نحوه محاسبه معادله حرکت سیستم پاندول که دارای یک درجه آزادی دورانی است، پرداخته خواهد شد.

۱-۵-۱- جرم متمرکز متصل به یک نخ بدون جرم

برای تعیین معادله حرکت یک جرم متمرکز متصل به نخ بدون جرم، با استفاده از شکل (۱-۱۱) و کمک‌گیری از معادله تعادل داریم:



شکل (۱-۱۱) معادله حرکت پاندولی

$$\sum M_o = 0 \tag{۱-۴۳}$$

$$I_o\ddot{\theta} + mgx = 0 \tag{۱-۴۴}$$

$$x = L\sin\theta \tag{۱-۴۵}$$

با توجه به فرض جابه‌جایی‌های کوچک داریم:

$$\sin\theta \approx \theta \tag{۱-۴۶}$$

بنابراین، معادله حرکت یک جرم متمرکز متصل به نخ بدون جرم به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$I_o\ddot{\theta} + mgL\theta = 0 \tag{۱-۴۷}$$

مطابق با قانون دوم نیوتن، لختی دورانی عامل مقاومت در برابر حرکت دورانی است، دقیقاً همانند جرم که عامل مقاومت در برابر حرکت انتقالی است. لختی دورانی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$I_o = \int r^2 dm \tag{۱-۴۸}$$

که در آن dm یک جزء بسیار کوچک از ماده در فاصله r از محور دوران است. مطابق رابطه بالا لختی دورانی یک جسم متمرکز برابر است با:

$$I_o = mL^2 \tag{۱-۴۹}$$

با جاگذاری رابطه (۱-۴۹) در رابطه (۱-۴۷)، معادله حرکت به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$mL^2\ddot{\theta} + mgL\theta = 0 \tag{۱-۵۰}$$

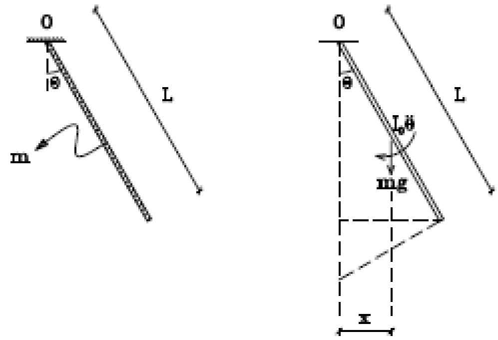
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0 \tag{۱-۵۱}$$

بنابراین، می‌توان گفت فرکانس سیستم پاندول برابر است با:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{۱-۵۲}$$

۱-۵-۲- میله با جرم گسترده

برای تعیین معادله حرکت یک میله با جرم گسترده، باید معادله تعادل با استفاده از شکل (۱-۱۲) و در نظر گرفتن نیروی وزن و سختی دورانی در مرکز ثقل میله، به صورت زیر نوشته شود:



شکل (۱-۱۲): پاندول با جرم گسترده میله

$$\sum M_o = 0 \tag{۱-۵۳}$$

$$I_o\ddot{\theta} + mgx = 0 \tag{۱-۵۴}$$

$$x = \frac{L}{2}\sin\theta \tag{۱-۵۵}$$

با توجه به رابطه (۱-۴۶)، معادله حرکت میله با جرم گسترده به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$I_o\ddot{\theta} + \frac{mgL}{2}\theta = 0 \tag{۱-۵۶}$$

از طرفی، لختی دورانی یک میله حول انتهای میله برابر است با:

$$I_o = \frac{1}{3}mL^2 \tag{۱-۵۷}$$

با جاگذاری رابطه (۱-۵۷) در رابطه (۱-۵۶)، معادله حرکت به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta} + \frac{mgL}{2}\theta = 0 \tag{۱-۵۸}$$

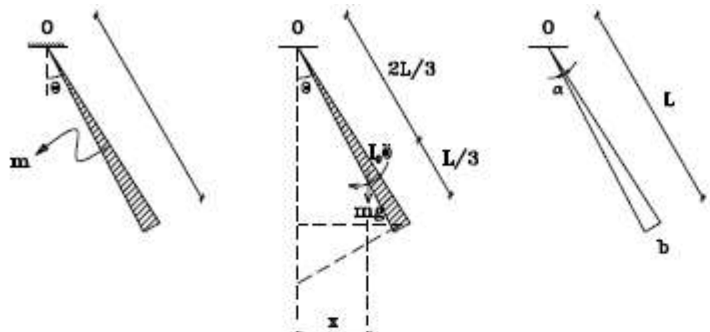
$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L}\theta = 0 \tag{۱-۵۹}$$

بنابراین فرکانس این سیستم برابر است با:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}} \tag{۱-۶۰}$$

۱-۵-۳- میله با جرم گسترده و مقطع متغیر

برای تعیین معادله حرکت میله با جرم گسترده و مقطع متغیر از شکل (۱-۱۳) استفاده می‌شود.



شکل (۱-۱۳): نمودار جسم آزاد حرکت میله با هندسه متغیر

معادله حرکت این سیستم با استفاده از تعادل و در نظر گرفتن وزن میله در مرکز جرم آن، به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\sum M_o = ۰ \quad (۶۱-۱)$$

$$I_o\ddot{\theta} + mgx = ۰ \quad (۶۲-۱)$$

$$x = \frac{۲}{۳}L\sin\theta \quad (۶۳-۱)$$

با استفاده از رابطه‌های (۱-۴۶) و (۱-۶۳) داریم:

$$I_o\ddot{\theta} + \frac{۲}{۳}Lmg\theta = ۰ \quad (۶۴-۱)$$

از طرفی لختی دورانی میله حاضر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$I_o = \int_۰^L r^۲ dm \quad (۶۵-۱)$$

که برای میله با سطح مقطع متغیر داریم:

$$I_o = \int_۰^L \rho r^۲ dA = \int_۰^L \rho r^۲ (r\alpha dr)dr = \frac{\alpha\rho L^۴}{۴} \quad (۶۶-۱)$$

از طرفی $b = \alpha L$ است. در نتیجه:

$$\frac{\alpha\rho L^۴}{۴} = \frac{\rho bL}{۲} \times \frac{L^۲}{۲} = \frac{mL^۲}{۲} \quad (۶۷-۱)$$

بنابراین:

$$I_o = \frac{mL^۲}{۲} \quad (۶۸۶۷-۱)$$

با جاگذاری رابطه (۱-۶۸) در رابطه (۱-۶۴)، معادله حرکت به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{mL^۲}{۲}\ddot{\theta} + \frac{۲}{۳}Lmg\theta = ۰ \quad (۶۹-۱)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{۴g}{۳L}\theta = ۰ \quad (۷۰-۱)$$

بنابراین، فرکانس سیستم حاضر برابر است با:

$$\omega = \sqrt{\frac{۴g}{۳L}} \quad (۷۱-۱)$$

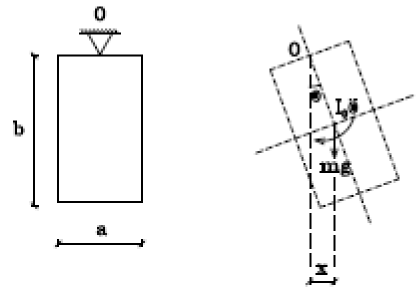
نکته ۱-۱۵: در مختصات قطبی مساحت و جزء مساحت برابر است با:

$$A = \frac{۱}{۲}\int_۰^\alpha r^۲ d\theta = \frac{۱}{۲}\alpha r^۲ \quad (۷۲-۱)$$

$$dA = \int_۰^\alpha \int_۰^L r dr d\theta = \int_۰^L \alpha r dr \quad (۷۳-۱)$$

۱-۵-۴- معادله حرکت ورق صلب

برای تعیین معادله حرکت ورق صلب از شکل (۱-۱۴) استفاده می‌شود.



شکل (۱-۱۴): نمودار جسم آزاد حرکت ورق

معادله حرکت این سیستم با استفاده از تعادل و در نظر گرفتن وزن میله در مرکز جرم آن، به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\sum M_o = 0 \tag{۷۴-۱}$$

$$I_o\ddot{\theta} + mgx = 0 \tag{۷۵-۱}$$

$$x = \frac{b}{2}\sin\theta \tag{۷۶-۱}$$

با استفاده از رابطه‌های (۱-۴۶) و (۱-۷۶) داریم:

$$I_o\ddot{\theta} + \frac{b}{2}mg\theta = 0 \tag{۷۷-۱}$$

از طرفی لختی دورانی ورق حول مرکز ضلع بالایی آن، برابر است با:

$$I_o = \frac{m}{12}(a^2 + 4b^2) \tag{۷۸-۱}$$

با جاگذاری رابطه (۱-۷۸) در رابطه (۱-۷۵)، معادله حرکت به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{1}{12}m(a^2 + 4b^2)\ddot{\theta} + \frac{b}{2}mg\theta = 0 \tag{۷۹-۱}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{6bg}{(a^2 + 4b^2)}\theta = 0 \tag{۸۰-۱}$$

بنابراین فرکانس سیستم برابر است با:

$$\omega = \sqrt{\frac{6bg}{a^2 + 4b^2}} \tag{۸۱-۱}$$

نکته ۱-۱۶: چنانچه در رابطه (۱-۸۱)، a به سمت صفر میل کند، به همان نتیجه مربوط به فرکانس میله در رابطه (۱-۶۰) خواهیم رسید.

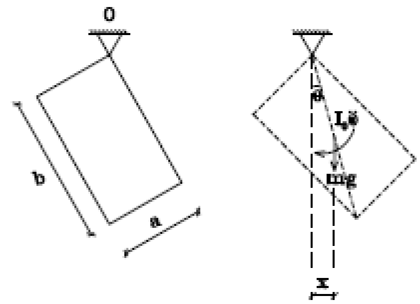
۱-۵-۵- معادله حرکت ورق کج

برای تعیین معادله حرکت ورق کج از شکل (۱-۱۵) استفاده می‌شود. معادله حرکت این سیستم با استفاده از تعادل و در نظر گرفتن وزن میله در مرکز جرم آن، به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\sum M_o = 0 \tag{۸۲-۱}$$

$$I_o\ddot{\theta} + mgx = 0 \tag{۸۳-۱}$$

$$x = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}\sin\theta \tag{۸۴-۱}$$

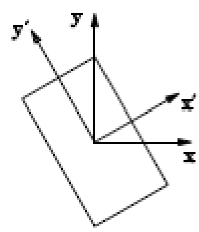


شکل (۱-۱۵): نمودار جسم آزاد حرکت ورق کج

با استفاده از رابطه‌های (۱-۴۶) و (۱-۸۴) داریم:

$$I_o\ddot{\theta}+\frac{mg}{2}\sqrt{a^2+b^2}\,\theta=0 \qquad (۱-۸۵)$$

مطابق شکل (۱-۱۶) لختی دورانی برابر است با:



شکل (۱-۱۶): محاسبه لختی دورانی

$$I_o=I_x+I_y=I_{x'}+I_{y'} \qquad (۱-۸۶)$$

بنابراین:

$$I_o=\frac{m(a^2+b^2)}{12}+m\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2 \qquad (۱-۸۷)$$

در نتیجه:

$$I_o=\frac{1}{3}m(a^2+b^2) \qquad (۱-۸۸)$$

با جاگذاری رابطه (۱-۸۸) در رابطه (۱-۸۵)، معادله حرکت به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{m}{3}(a^2+b^2)\ddot{\theta}+\frac{mg}{2}\sqrt{a^2+b^2}\,\theta=0 \qquad (۱-۸۹)$$

$$\ddot{\theta}+\frac{3g}{2\sqrt{a^2+b^2}}\theta=0 \qquad (۱-۹۰)$$

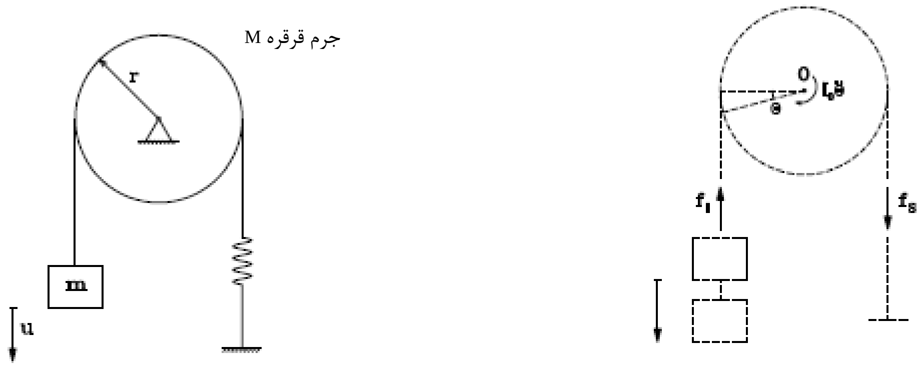
پس فرکانس سیستم برابر است با:

$$\omega=\sqrt{\frac{3g}{2\sqrt{a^2+b^2}}}=\frac{\sqrt{\frac{3}{2}g}}{\sqrt[4]{a^2+b^2}} \qquad (۱-۹۱)$$

نکته ۱-۱۷: در رابطه (۱-۹۱) چنانچه a به سمت صفر میل کند، به همان نتیجه مربوط به فرکانس میله در رابطه (۱-۶۰) خواهیم رسید.

۱-۶- معادله حرکت قرقره

برای تعیین معادله حرکت قرقره، باید مشابه حالت‌های قبل دیاگرام جسم آزاد سیستم را رسم نمود و با برقراری تعادل، معادله حرکت را محاسبه کرد. در این قسمت، معادله حرکت سیستم با استفاده از شکل (۱-۱۷)، به دست می‌آید. جرم قرقره برابر M است.



شکل (۱-۱۷): معادله حرکت قرقره

نیروی فنریت (f_s) و نیروی اینرسی ناشی از وزن وزنه به جرم m (f_I) به ترتیب از رابطه‌های (۱-۹۳) و (۱-۹۴) تعیین می‌شوند:

$$u = r\theta \, , \, \ddot{u} = r\ddot{\theta} \tag{۱-۹۲}$$

$$f_s = ku = kr\theta \tag{۱-۹۳}$$

$$f_I = m\ddot{u} = mr\ddot{\theta} \tag{۱-۹۴}$$

معادله حرکت این سیستم با استفاده از تعادل و در نظر گرفتن وزن میله در مرکز جرم آن، به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\sum M_o = 0 \tag{۱-۹۵}$$

$$I_o\ddot{\theta} + f_I xr + f_s xr = 0 \tag{۱-۹۶}$$

با جاگذاری رابطه‌های (۱-۹۳) و (۱-۹۴) در رابطه (۱-۹۶) داریم:

$$I_o\ddot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} + kr^2\theta = 0 \tag{۱-۹۷}$$

لختی دورانی قرقره نیز برابر است با:

$$I_o = \frac{1}{2}Mr^2 \tag{۱-۹۸}$$

در نتیجه، با جاگذاری رابطه (۱-۹۸) در رابطه (۱-۹۷)، معادله حرکت به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} + kr^2\theta = 0 \tag{۱-۹۹}$$

$$(\frac{1}{2}M + m)\ddot{\theta} + k\,\theta = 0 \tag{۱-۱۰۰۰}$$

بنابراین، فرکانس سیستم برابر است با:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{(\frac{1}{2}M + m)}} \tag{۱-۱۰۱}$$

سوالات تستی

۱- اگر یک سیستم سازه‌ای تحت اثر بار دینامیکی قرار گرفته باشد، پاسخ سیستم به کدام یک از عوامل به صورت مستقیم بستگی دارد؟

۱) سختی و میرایی ۲) جرم و سختی ۳) فرکانس و درصد میرایی ۴) جرم و میرایی

۲- در یک سیستم سازه‌ای میرایی سازه به کدام یک از عوامل زیر بستگی دارد؟

۱) کیفیت ساخت سازه و ایجاد ترک در سازه ۲) فرکانس ارتعاش و سرعت سازه

۳) منحنی تنش - کرنش مصالح در حالت غیرخطی ۴) همه موارد

۳- برای تحلیل یک سیستم سازه‌ای به صورت گسسته تحت اثر بارهای دینامیکی در گام نخست باید درجات آزادی آن تعیین شود. در عمل، درجات آزادی یک سیستم سازه‌ای چگونه تعریف می‌گردد؟

۱) تعداد درجات آزادی برابر تعداد جرم‌های متمرکز سیستم گسسته است

۲) تعداد درجات آزادی برابر تعداد میراگرهای سیستم گسسته است

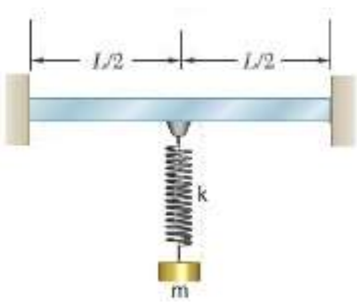
۳) تعداد درجات آزادی برابر تعداد حرکات مستقل از هم در سیستم گسسته است

۴) همه عوامل تعیین کننده هستند

۴- یک سیستم یک درجه آزادی دارای دوره تناوبی $T = ۱s$ است. چند درصد از جرم اولیه این سیستم بایستی کم یا زیاد شود تا دوره تناوبی آن دو برابر گردد (فرض کنید $\pi^{۲} = ۱۰$).

۱) $\frac{۱}{۳}$ برابر جرم اولیه-کم ۲) ۲ برابر جرم اولیه-اضافه ۳) سه برابر جرم اولیه-اضافه ۴) نصف جرم اولیه-کم

۵- یک تیر دوسر گیردار با وزن ناچیز با استفاده از یک فنر به سختی $k = \frac{۴۸EI}{l^{۳}}$ وزنه‌ای به جرم m را تحمل می‌کند. در صورتی‌که $\lambda^{۳} = \frac{EI}{l^{۳}}$ و صلبیت تیر برابر EI باشد، مطلوبست معادله حرکت سیستم.



۱) $m\ddot{u} + ۱۹.۲\lambda^{۳}u = ۰$

۲) $m\ddot{u} + ۳۸.۴\lambda^{۳}u = ۰$

۳) $m\ddot{u} + ۴۸\lambda^{۳}u = ۰$

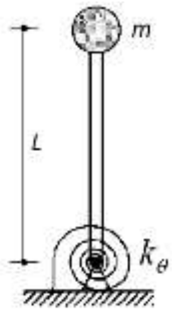
۴) $m\ddot{u} + ۹۶\lambda^{۳}u = ۰$

۶- یک سیستم یک درجه آزادی دارای دوره تناوبی $T = ۱s$ است. اگر وزنه‌ای به جرم $m' = ۱۰kg$ را به جرم اولیه این سیستم وصل نماییم دوره تناوبی آن برابر $T = ۲s$ می‌شود. مطلوبست محاسبه سختی ثانویه (N/m) و جرم اولیه (kg) سیستم یک درجه آزادی (فرض کنید $\pi^{۲} = ۱۰$).

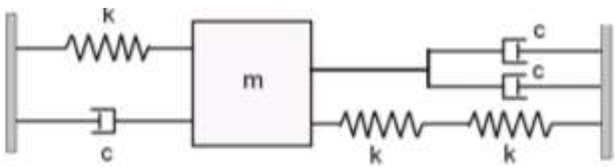
۱) ۳.۳۳,۱۳۳.۳ ۲) ۳.۳۳,۱۳.۳۳ ۳) ۳۳.۳۳,۱۳.۳ ۴) ۳۳.۳۳,۱۳۳.۳

۷- با در نظر گرفتن اثر گرانش، مطلوبست محاسبه فرکانس سازه داده شده (وزن میله ناچیز است).

۱) $\sqrt{\frac{k_\theta - mgl}{ml^۲}}$ ۲) $\sqrt{\frac{۲k_\theta - mgl}{۲ml^۲}}$ ۳) $\sqrt{\frac{k_\theta l - mgl}{ml}}$ ۴) $\sqrt{\frac{۲k_\theta l - mgl}{۲ml}}$



۸- معادله حرکت سیستم زیر را بدست آورید.



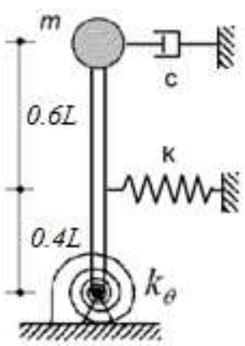
۱) $۲m\ddot{u} + ۶c\dot{u} + ۳ku = ۰$

۲) $۲m\ddot{u} + ۴c\dot{u} + ۳ku = ۰$

۳) $m\ddot{u} + ۳c\dot{u} + ۲ku = ۰$

۴) $m\ddot{u} + ۲c\dot{u} + ۲ku = ۰$

۹- با در نظر گرفتن اثر گرانش، مطلوبست محاسبه سختی معادل سازه داده شده (وزن میله ناچیز است).



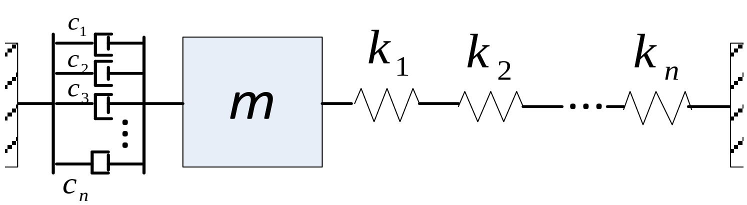
۱) $k_\theta + ۰.۱۶kl^۲ + mgl$

۲) $k_\theta + ۰.۴kl^۲ + mgl$

۳) $k_\theta + ۰.۱۶kl^۲ - mgl$

۴) $k_\theta l + ۰.۴kl^۲ - mg$

۱۰- معادله حرکت سیستم زیر را که از n فنر سری و n میراگر موازی تشکلیل شده است و مقادیر همه آنها با یکدیگر یکسان است را بدست آورید.



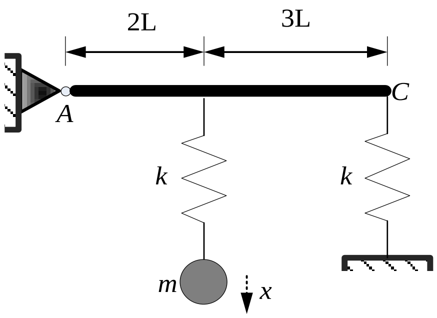
۱) $nm\ddot{u} + n^۲c\dot{u} + ku = ۰$

۲) $m\ddot{u} + nc\dot{u} + nku = ۰$

۳) $nm\ddot{u} + c\dot{u} + n^۲ku = ۰$

۴) $nm\ddot{u} + nc\dot{u} + \frac{k}{n}u = ۰$

۱۱- معادله ارتعاش قائم سیستم سازه‌ای مقابل، با فرض صلب بودن میله AC برابر کدام گزینه است؟ (از در نظر گرفتن اثر وزن صرف نظر کنید)



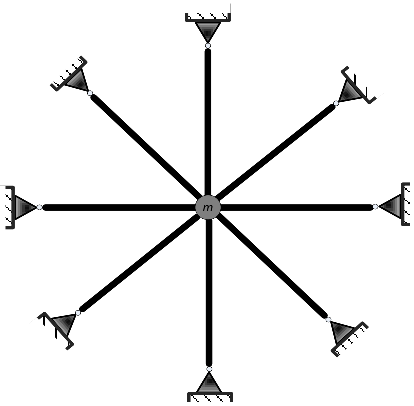
۱) $۲۹m\ddot{x}+۵۰kx=۰$

۲) $۵۸m\ddot{x}+۷۲۵kx=۰$

۳) $۵۸m\ddot{x}+۵۰kx=۰$

۴) $۲۹m\ddot{x}+۷۲۵kx=۰$

۱۲- هشت میله کاملاً مشابه به طول L مطابق شکل داده شده به صورت متقارن به جرم m متصل شده‌اند، اگر سیستم فقط در جهت افقی توانایی حرکت داشته باشد، فرکانس سیستم برابر است با؟ سختی میله‌ها برابر EA است.



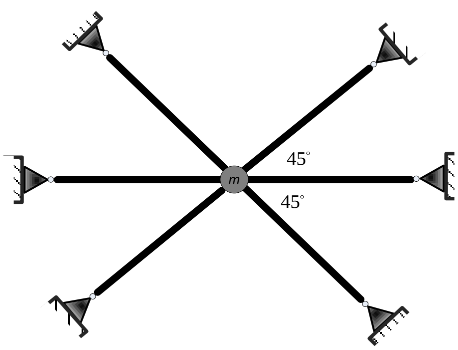
۱) $\sqrt{EA/۲Lm}$

۲) $\sqrt{EA/۴Lm}$

۳) $\sqrt{۲EA/Lm}$

۴) $\sqrt{۴EA/Lm}$

۱۳- شش میله کاملاً مشابه به طول L مطابق شکل داده شده به صورت متقارن به جرم m متصل شده‌اند، در حالت اول سیستم فقط در جهت قائم توانایی حرکت دارد و در حالت دوم سیستم فقط در جهت افقی توانایی حرکت دارد. مطلوبست محاسبه نسبت فرکانس سیستم حالت اول به حالت دوم؟ سختی میله‌ها برابر EA است.



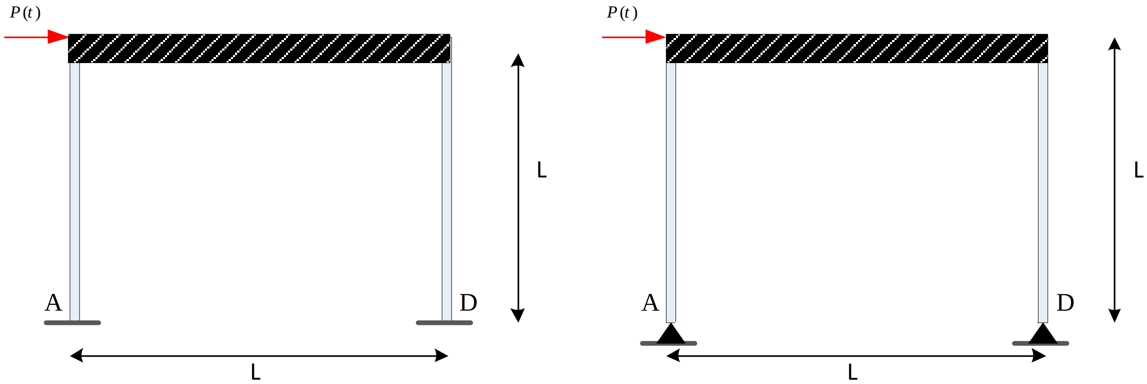
۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۶}$

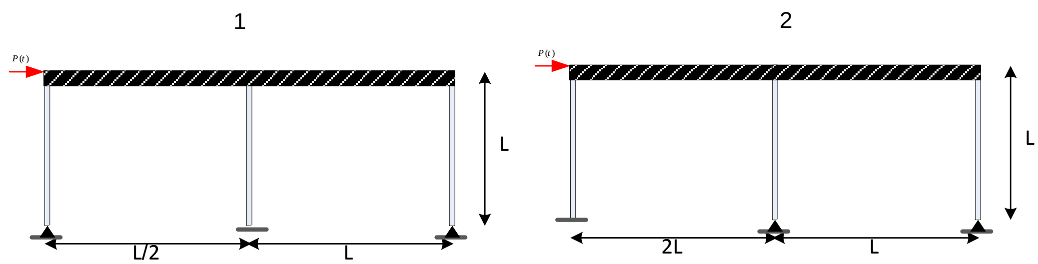
۱۴- در یک قاب برشی معادل یک درجه آزادی چنانچه تکیه‌گاه گیردار قاب به تکیه‌گاه مفصلی تبدیل شود، فرکانس قاب چند برابر می‌شود؟



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۵- در قاب برشی داده شده در شکل، نسبت فرکانس سیستم (۱) به (۲) چند است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳



پاسخ‌نامه سوالات تستی

۱-گزینه (۳)

معادله حرکت سیستم یک درجه آزادی مطابق رابطه زیر است. همانطور که مشخص است پاسخ برحسب درصد میرایی و فرکانس است. به‌عبارت دیگر، درصد میرایی و فرکانس دو مشخصه دینامیکی هر سیستمی هستند.

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=0 \rightarrow \ddot{u}+2\xi\omega\dot{u}+\omega^2u=0$$

۲-گزینه (۴)

میرایی یک خصوصیت ذاتی در مصالح است. بنابراین، به کیفیت ساخت و همچنین پدید آمدن ترک در سازه بستگی دارد. همچنین، برای در نظر گرفتن اثر میرایی در سازه، میرایی به صورت ویسکوز درنظر گرفته می‌شود. در نتیجه، وابسته به سرعت و فرکانس ارتعاش خواهد بود. از طرف دیگر، از آنجایی که میرایی سیستم به رفتار غیرخطی مصالح به‌علت تسلیم شدن وابسته است، پس، همه گزینه‌ها صحیح است.

۳-گزینه (۳)

برای تعیین درجات آزادی هر سیستم سازه‌ای باید تعداد حرکات مستقل از هم را به‌عنوان درجه آزادی محسوب کرد.

۴-گزینه (۳)

نکته: چون دوره تناوبی بیشتر می‌شود پس سازه بایستی سنگین‌تر شود.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\rightarrow\begin{cases}\omega=2\pi \rightarrow \omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}} \rightarrow 4\pi^2=\dfrac{k}{m}\\ \omega'=\pi \rightarrow \omega'=\sqrt{\dfrac{k}{m\pm\alpha m}} \rightarrow \pi^2=\dfrac{k}{m\pm\alpha m}\end{cases} \rightarrow 4\pi^2m=\pi^2(m\pm\alpha m)$$

$$\rightarrow 4=(1\pm\alpha)\rightarrow \alpha=3 \rightarrow m'=4m$$

به طور کلی، در صورتی‌که دوره تناوب سازه n برابر شود، در مورد اضافه جرم سازه (α) خواهیم داشت:

$$n^2=(1\pm\alpha)$$

۵-گزینه (۲)

اتصال تیر و فنر مشابه دو فنر سری است. بنابراین، سختی معادل سیستم برابر است با:

$$k_b=\frac{192EI}{l^3}\ ,\ k=\frac{48EI}{l^3} \rightarrow \frac{1}{k_{eq}}=\frac{1}{k_b}+\frac{1}{k}\rightarrow k_{eq}=\frac{38.4EI}{l^3}\rightarrow m\ddot{u}+\frac{38.4EI}{l^3}u=0$$

۶-گزینه (۱)

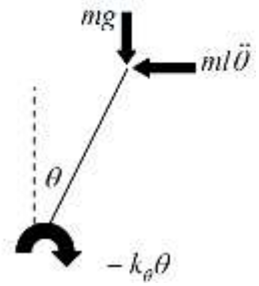
$$\omega=\frac{2\pi}{T}\rightarrow\begin{cases}\omega=2\pi \rightarrow \omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}} \rightarrow 4\pi^2=\dfrac{k}{m}\\ \omega'=\pi \rightarrow \omega'=\sqrt{\dfrac{k}{m+10}} \rightarrow \pi^2=\dfrac{k}{m+10}\end{cases} \rightarrow 4\pi^2m=\pi^2(m+10) \rightarrow m=3.33$$

$$k=\omega^2m=4\pi^2m=133.3$$

البته مطابق نکته بیان شده در سوال ۴ مشخص است که $m=\frac{10}{3}$.

۷-گزینه (۱)

$$\sum M = 0 \rightarrow k_\theta \theta + ml^2 \ddot{\theta} = mgl\theta \rightarrow m\ddot{\theta} + \frac{k_\theta - mgl}{l^2}\theta = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k_\theta - mgl}{ml^2}}$$



۸-گزینه (۱)

میراگرهای نشان داده شده در سمت راست جرم به صورت موازی عمل می‌نمایند و نتیجه‌ی آنها با میراگر سمت راست جرم نیز به صورت موازی عمل می‌نماید. از طرفی فنرهای نشان داده شده در سمت راست جرم به صورت سری بسته شده‌اند و نتیجه‌ی آن با فنر سمت چپ جرم به صورت موازی عمل می‌نماید. بنابراین خواهیم داشت:

$$c_{eq} = 3c$$

$$k_{eq} = k + \frac{k \times k}{k + k} = 1.5k$$

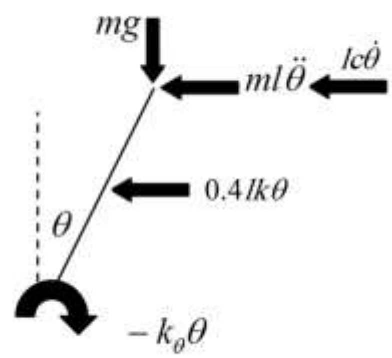
$$m\ddot{u} + 3c\dot{u} + 1.5ku = 0$$

$$2m\ddot{u} + 6c\dot{u} + 3ku = 0$$

۹-گزینه (۳)

$$\sum M = 0 \rightarrow k_\theta \theta + 0.4l \times 0.4lk\theta + l \times cl\dot{\theta} + ml^2\ddot{\theta} = mgl\theta \rightarrow$$

$$ml^2\ddot{\theta} + cl^2\dot{\theta} + \left(k_\theta + 0.16kl^2 - mgl\right)\theta = 0 \rightarrow k_{eq} = k_\theta + 0.16kl^2 - mgl$$



۱۰-گزینه (۱)

$$c_{eq} = c_1 + c_2 + \ldots + c_n = nc$$

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_3} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \ldots + \frac{1}{k} = \frac{n}{k}$$

$$m\ddot{u} + nc\dot{u} + \frac{k}{n}u = 0$$

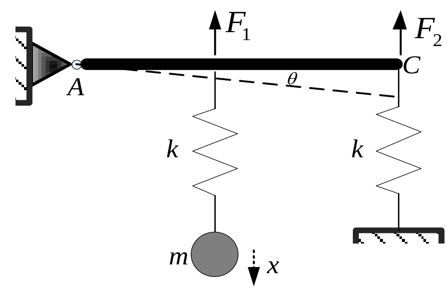
$$nm\ddot{u} + n^2c\dot{u} + ku = 0$$

۱۱-گزینه (۳)

معادله ارتعاش برابر است با:

$$m\ddot{x}+F_۱=۰$$

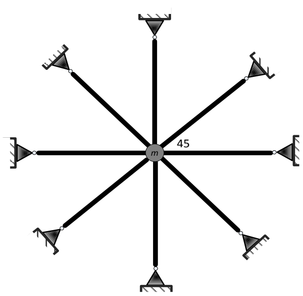
بنابراین باید نیروی $F_۱$ برحسب x محاسبه شود.



$$F_۱=k(x-۲l\theta)$$
$$F_۲=۵kl\theta$$
$$\sum M_A=۰ \rightarrow ۲lF_۱=۵lF_۲ \rightarrow \frac{F_۱}{F_۲}=۲.۵$$
$$۲.۵=\frac{k(x-۲l\theta)}{۵kl\theta} \rightarrow ۱۲.۵l\theta=(x-۲l\theta)$$
$$۱۴.۵l\theta=x \rightarrow \theta=\frac{x}{۱۴.۵l}$$
$$m\ddot{x}+F_۱=۰ \rightarrow m\ddot{x}+k(x-۲l\theta)=m\ddot{x}+k(x-\frac{۲lx}{۱۴.۵l})=۰$$
$$m\ddot{x}+k(\frac{۱۲.۵}{۱۴.۵})x=۰ \rightarrow ۵۸m\ddot{x}+۵۰kx=۰$$

۱۲-گزینه (۴)

سختی کل سیتم برابر است با



$$۴\times\left(\frac{EA}{L}\cos^۲ ۴۵\right)+۲\times\left(\frac{EA}{L}\cos^۲ ۰\right)+۲\times\left(\frac{EA}{L}\cos^۲ ۹۰\right)=\frac{۴EA}{L}$$
$$m\ddot{x}+\frac{۴EA}{L}x=۰ \rightarrow \omega=\sqrt{k/m}=\sqrt{۴EA/Lm}$$

۱۳-گزینه (۱)

سختی کل سیستم در حالت اول برابر است با

$$K_{eq۱}=۴\times\left(\frac{EA}{L}\cos^۲ ۴۵\right)+۲\times\left(\frac{EA}{L}\cos^۲ ۹۰\right)=\frac{۲EA}{L}$$
$$m\ddot{x}+\frac{۲EA}{L}x=۰ \rightarrow \omega=\sqrt{k/m}=\sqrt{۲EA/Lm}$$

سختی کل سیستم در حالت دوم برابر است با

$$K_{eq۲}=۴\times\left(\frac{EA}{L}\cos^۲ ۴۵\right)+۲\times\left(\frac{EA}{L}\cos^۲ ۰\right)=\frac{۴EA}{L}$$
$$m\ddot{x}+\frac{۴EA}{L}x=۰ \rightarrow \omega=\sqrt{k/m}=\sqrt{۴EA/Lm}$$

نسبت حالت اول به حالت دوم برابر است با

$$\frac{\sqrt{۲EA/Lm}}{\sqrt{۴EA/Lm}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۴-گزینه (۴)

سختی قاب گیردار چهار برابر قاب مفصلی است، بنابراین فرکانس آن نیز دو برابر حالت مفصلی است.

۱۵-گزینه (۲)

با توجه به اینکه هر دو سیستم به صورت موازی عمل می‌نمایند، بنابراین سختی کل سیستم برابر با مجموع سختی هر یک از ستون‌ها است. در هر کدام از حالت‌ها دو ستون با تکیه‌گاه مفصلی و یک ستون با تکیه‌گاه گیردار موجود است. بنابراین مجموع سختی تمامی ستون‌ها (سختی معادل) در هر کدام از سیستم‌ها برابر بوده و با توجه به برابری جرم سیستم (۱) و (۲)، فرکانس هر دو سیستم نیز یکسان است.

فصل دوم

تحلیل ارتعاش آزاد سیستم‌های یک درجه آزادی

۲-۱- مقدمه

همان‌گونه که اشاره شد در فصل اول به ارائه مقدمه‌ای بر دینامیک سازه و همچنین، به دست آوردن معادله حاکم بر رفتار یک سیستم یک درجه آزادی پرداخته شد. با توجه به این موضوع، هدف از این فصل حل معادله دیفرانسیل حاکم و به دست آوردن پاسخ (جابه‌جایی، سرعت و شتاب) سیستم یک درجه آزادی است.

منظور از ارتعاش آزاد یک سیستم، بررسی ارتعاش یک جسم بدون اعمال بار خارجی است. معادله‌ی حرکت در حالت کلی به صورت رابطه (۲-۱) خواهد بود:

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=p(t) \tag{۲-۱}$$

که منظور از ارتعاش آزاد در رابطه (۲-۱)، عدم اعمال هر گونه بار خارجی به سیستم است ($p(t)=\cdot$). بنابراین، معادله حرکت به صورت رابطه (۲-۲) بازنویسی می‌شود:

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=\cdot \tag{۲-۲}$$

سوال مطرح شده در این زمینه، در مورد چگونگی ارتعاش یک سیستم، بدون اعمال بارگذاری است. به وضوح مشخص است که چنین سیستمی ارتعاش نمی‌کند. اما به منظور بررسی پدیده ارتعاش آزاد، کافی است یک تحریک اولیه شامل جابه‌جایی در لحظه صفر (جابه‌جایی اولیه) و یا سرعت در لحظه صفر (سرعت اولیه) به سیستم اعمال شود و در ادامه، می‌توان پاسخ ارتعاش آزاد را بررسی نمود. به عبارت دیگر:

$$u(\cdot)=u_{\cdot} \tag{۲-۳}$$

$$\dot{u}(\cdot)=\dot{u}_{\cdot} \tag{۲-۴}$$

بنابراین، مفهوم ارتعاش آزاد از لحاظ فیزیکی، اعمال شرایط اولیه (جابه‌جایی و سرعت اولیه) به سیستم است. در صورت بررسی مفهوم ارتعاش آزاد از دیدگاه ریاضی، متوجه خواهیم شد که معادله (۲-۲) یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است. بنابراین، برای حل یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم، نیاز به دو شرط اولیه است که شرایط اولیه معادله دیفرانسیل، همان جابه‌جایی و سرعت اولیه (رابطه‌های (۲-۳) و (۲-۴)) است.

نکته ۲-۱: هدف از ارتعاش آزاد چیست؟ هدف از ارتعاش آزاد به دست آوردن مشخصات ذاتی دینامیکی هر جسم و سیستمی است. همان‌طور که از رابطه (۱-۱۴) در فصل اول مشخص شد، مشخصات ذاتی هر جسم در حالت دینامیکی، میرایی و فرکانس آن سیستم است. بنابراین، برای تعیین آن‌ها، باید رفتار سیستم را بدون اعمال بار خارجی (ارتعاش آزاد) بررسی نمود.

۲-۲- ارتعاش آزاد بدون میرایی

برای بررسی ارتعاش آزاد در حالت اول از وجود میرایی صرف‌نظر نموده و به همین دلیل، معادله (۲-۲) به صورت زیر بازنویسی خواهد شد:

$$m\ddot{u}+ku=0 \qquad (۲-۵)$$

همان‌طور که اشاره شد، برای حل این معادله دیفرانسیل مرتبه دوم، نیاز به دو شرایط اولیه است که عبارتند از جابه‌جایی و سرعت در لحظه صفر (رابطه‌های (۲-۳) و (۲-۴)). برای حل این معادله دیفرانسیل نیاز به داشتن دانش مقدماتی از معادلات دیفرانسیل است. بدین منظور باید تابعی را حدس زد که در رابطه (۲-۵) صدق نموده و مجموع این تابع ($u(t)$) و مشتق دوم آن ($\ddot{u}(t)$)، قادر به صفر کردن رابطه (۲-۵) باشد. تابع نمایی ($u(t)=Ae^{Bt}$) دارای چنین خصوصیتی است. زیرا مشتقات چنین تابعی از جنس خود تابع بوده و در نتیجه، معادله (۲-۵) می‌تواند صفر شود.

$$m\ddot{u}+ku=0 \rightarrow mAB^2e^{Bt}+kAe^{Bt}=0 \qquad (۲-۶)$$

$$Ae^{Bt}(mB^2+k)=0 \qquad (۲-۷)$$

$$B^2=-\frac{k}{m} \qquad (۲-۸)$$

با جاگذاری $i^2=-1$ و $\omega^2=\frac{k}{m}$ در رابطه (۲-۸)، داریم:

$$B=\pm\omega i \qquad (۲-۹)$$

بنابراین، پاسخ جابه‌جایی برابر خواهد شد با:

$$u(t)=A_1e^{\omega i}+B_2e^{-\omega i} \qquad (۲-۱۰)$$

با استفاده از رابطه زیر، می‌توان معادله (۲-۱۰) را به صورت هارمونیکی نوشت:

$$e^{\pm i\theta}=\cos\theta\pm i\sin\theta \qquad (۲-۱۱)$$

بنابراین:

$$u(t)=B_1\cos\omega t+B_2\sin\omega t \qquad (۲-۱۲)$$

با استفاده از دو شرط اولیه $u(0)$ و $\dot{u}(0)$، ضرایب B_1 و B_2 به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$u(0)=u_0 \rightarrow B_1=u_0 \qquad (۲-۱۳)$$

$$\dot{u}(0)=\dot{u}_0 \rightarrow B_2=\frac{\dot{u}_0}{\omega} \qquad (۲-۱۴)$$

بنابراین، پاسخ ارتعاش آزاد سیستم در حالت بدون میرایی برابر است با:

$$u(t)=u_0\cos\omega t+\frac{\dot{u}_0}{\omega}\sin\omega t \qquad (۲-۱۵)$$

در صورت رسم رابطه (۲-۱۵)، جابه‌جایی سیستم یک درجه آزادی در حالت بدون میرایی، مطابق شکل (۲-۱) می‌شود.