به نام خداوند بخشنده مهربان

تحقیق در عملیات پیشرفته

آمادگی آزمون دکتری

مجموعه مدیریت صنعتی

نویسنده:

مسعود معدنچی‌ها

سرشناسه: معدنچی‌ها، مسعود،
و نام پدیدآور: تحقیق در عملیات پیشرفته/ نویسنده: مسعود معدنچی‌ها
مشخصات نشر: تهران: مشاوران صعود ماهان، ۱۴۰۱ عنوان
مشخصات ظاهری: ۳۴۰.: جدول، نمودار.
شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۴۵۸-۹۰۱-۷
وضعیت فهرست‌نویسی: فیپا
فارسی ـ چاپ اول
موضوع: آزمون دوره‌های تحصیلات تکمیلی
موضوع: دانشگاه‌ها و مدارس عالی ـ ایران ـ آزمون‌ها
کتابخانه ملی ایران:
رده‌بندی کنگره:
رده‌بندی دیویی:

موسسه آموزش عالی آزاد
ماهان
www.mahan.ac.ir

ماهان
مشاوران صعود
انتشارات مشاوران صعود ماهان

- **نام کتاب:** تحقیق در عملیات پیشرفته
- **مدیران مسئول:** مجید و هادی ستّاری
- **نویسنده:** مسعود معدنچی‌ها
- **مدیر تولید محتوا:** سمیه بیگی
- **ناشر:** مشاوران صعود ماهان
- **نوبت و تاریخ چاپ:** اول/ ۱۴۰۱
- **تیراژ:** ۱۰۰۰ نسخه
- **قیمت:** ۲/۹۹۰/۰۰۰ ریال
- **شابک:** ۹۷۸-۶۰۰-۴۵۸-۹۰۱-۷

انتشارات مشاوران صعود ماهان: تهران، خیابان ولیعصر، بالاتر از تقاطع ولیعصر- مطهری، پلاک ۲۰۵۰
تلفن: ۸۸۱۰۰۱۱۳ و ۸۸۴۰۱۳۱۳

مقدمه ناشر

به نام خدا

ایمان داریم که هر تغییر و تحول بزرگی در مسیر زندگی بدون تحول معرفت و نگرش میسر نخواهد بود. پس بیایید با اندیشه توکل، تفکر، تلاش و تحمل در توسعه دنیای فکریمان برای نیل به آرامش و آسایش توأمان اولین گام را برداریم. چون همگی یقین داریم دانایی، توانایی می‌آورد.

شاد باشید و دلی را شاد کنید

برادران سیاری

مقدمه مولف

دامنه بحث تحقیق در عملیات آنچنان گسترده شده که هرچه زمان بیشتر پیش می‌رود، نکات و مفاهیم جدیدی بر آن افزوده می‌شود. سری کتاب‌های مرجع آمادگی کنکور دکتری موسسه آموزش عالی آزاد ماهان که در اختیار شما عزیزان قرار می‌گیرد حاصل تلاش گروهی از اساتید برجسته و فارغ‌التحصیلان برتر دانشگاه‌های معتبر کشور می‌باشد که تمامی نکات و مفاهیم را در این کتاب جمع‌آوری کرده‌اند.

درس پژوهش عملیاتی در کنکور دکتری مدیریت به عنوان یکی از دروس استراتژیک و رتبه‌ساز به حساب می‌آید و با توجه به اینکه درصد میانگین کشوری این درس بسیار پایین می‌باشد دانشجویانی که بتوانند روی این درس سرمایه‌گذاری کنند و درصد قابل توجهی از این درس را در کنکور کسب کنند نیمی از راه قبولی در کنکور ارشد را گذرانده‌اند.

درس تحقیق در عملیات با توجه به اینکه حالت مفهومی ـ تحلیلی ـ محاسباتی دارد، باید به صورتی آموزش داده شود که دانشجو به موضوع اصلی درس پی برده و از حالت مبهمی که هنگام مطالعه برایش ایجاد می‌گردد خارج شود. در این کتاب سعی بر آن شده است که تمامی مطالب و نکات اصلی کنکور به صورت خودآموز و نحوه نگارش آن به صورت ساده روان بیان گردد که تمامی دانشجویان (مدیریتی و غیرمدیریتی) هیچ مشکلی در مطالعه نداشته باشند.

در میان تمام فعالیت‌ها **ارائه موثرترین خدمت بی‌ریا همراه با عشق‌ورزی بی‌توقع و پرهیزگاری کامل به نیازمندترین افراد** مهم‌ترین کار است. افتخار چنین خدمتی می‌تواند نصیب هر فردی بشود.

مسعود معدنچی‌ها

فهرست مطالب

فصل اول

برنامه‌ریزی خطی

برنامه‌ریزی خطی[1]

برنامه‌ریزی خطی یک تکنیک ریاضی در جهت بهترین استفاده از منابع محدود سازمان می‌باشد منابع موجود در سازمان مانند مواد اوّلیه، نیروی کار، سرمایه، زمان، ظرفیّت ماشین‌آلات، فضا و غیره محدود می‌باشند توسط تکنیک برنامه‌ریزی خطی می‌توان منابع محدود را طوری به فعالیّت‌های مختلف تخصیص داد که راه حل بهینه مثلاً حداکثر سود یا حداقل هزینه حاصل شود.

هر مدل برنامه‌ریزی خطی دارای یک تابع هدف[2] و تعدادی محدودیّت[3] می‌باشد. شکل کلی یک مدل برنامه‌ریزی خطی به‌صورت زیر است:

$$(\text{Max}\ \text{یا}\ \text{Min})Z = c_1x_1 + c_2x_2 \cdots\cdots + c_nx_n$$

$$\begin{aligned}
\text{Subject to}:\quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n (\le \text{یا} \ge \text{یا} =) b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \cdots\cdots + a_{2n}x_n (\le \text{یا} \ge \text{یا} =) b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \cdots\cdots + a_{mn}x_n (\le \text{یا} \ge \text{یا} =) b_m \\
& x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n \ge 0
\end{aligned}$$

که به اختصار به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(\text{Max}\ \text{یا}\ \text{Min})Z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t}:\quad & \sum a_{ij}x_j (\le \text{یا} \ge \text{یا} =) b_i \qquad i = 1, 2, \cdots, m \\
& x_j \ge 0 \quad j = 1, 2, \cdots, n
\end{aligned}$$

تابع Z را تابع هدف می‌گویند که هدف را نشان می‌دهد و می‌تواند به‌صورت حداکثر کردن و یا حداقل کردن باشد. اگر هدف حداکثر کردن باشد MaxZ و اگر هدف حداقل کردن باشد MinZ نوشته می‌شود.

توابع دیگر محدودیّت‌ها هستند که منابع، امکانات، شرایط و نیازها را نشان می‌دهند. تعداد m محدودیّت اوّل را محدودیّت‌های کارکردی می‌نامند که می‌توانند به‌صورت $(=)$ یا $(\ge)$ و یا $(\le)$ باشند. محدودیّت‌های $x_j \ge 0$ را

---

[1] Linear Programming (LP)
[2] Objective Function
[3] Constraint

محدودیّت‌های منفی می‌گویند. البته در بعضی از مسائل ممکن است متغیّر یا متغیّرهایی بتوانند مقادیر منفی نیز داشته باشند یعنی آزاد در علامت باشند که در این صورت به جای آنها از تفاضل دو متغیّر نامنفی استفاده می‌کنیم.

x_jها را متغیّرهای تصمیم، c_jها، b_iها و a_{ij} را پارامترهای مدل می‌نامند (اندیس i نشان دهنده شماره محدودیّت و اندیس j نشان دهنده شماره متغیّر تصمیم است).

c_jها (اعداد سمت راست محدودیّت‌ها) معمولاً سود یا زیان یک واحد از فعالیّت‌ها را نشان می‌دهند.

b_iها (اعداد سمت راست محدودیّت‌ها) نشان دهنده منابع، امکانات و نیازها هستند مانند میزان مواد اوّلیه، ظرفیّت ماشین‌آلات و غیره.

a_{ij}ها (ضرایب متغیّرها در محدودیّت‌ها) که ضرایب فنی یا تکنولوژی نامیده می‌شوند نشان دهنده مقادیری از منبع i هستند که برای هر واحد از فعالیّت j لازم است.

حل مسائل برنامه‌ریزی خطی

مسایل برنامه‌ریزی خطی را می‌توان با روش ترسیمی[۱] و یا روش سیمپلکس حل نمود. روش ترسیمی فقط در حل مسایل دو متغیّره کاربرد دارد. لذا در حل مسایل واقعی که تعداد متغیّرها بیشتر از ۲ تا هستند از روش سیمپلکس استفاده می‌شود.
باید گفت حل مسایل بزرگ با دست امکان‌پذیر است. نرم‌افزارهای بسیاری برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی وجود دارند که تعدادی از آنها به قرار زیر هستند[۲]:

WinQSB , LINDO , LINGO , GINO , GAMS , TORA , STORM , DS , MS , ABQM , Micro Computer , LINPROG

نحوه استفاده از نرم‌افزارهای WinQSB و LINGO در فصل آخر کتاب شرح داده شده است.

روش سیمپلکس

روش سیمپلکس در سال ۱۹۴۷ توسط جورج دانتزیگ[3] ارائه گردید. به وسیله این روش می‌توان مسایل برنامه‌ریزی خطی با هر تعداد متغیّر را حل نمود.

گام‌های لازم در روش سیمپلکس به قرار زیر هستند:

گام ۱- استاندارد کردن مسأله

گام ۲- تشکیل اوّلین جدول

گام ۳- تکرار جدول تا زمانیکه جدول نهایی حاصل شود.

این گام‌ها در ادامه شرح داده می‌شوند:

گام ۱- استاندارد کردن مسأله

برای استاندارد کردن مسأله چنانچه:

۱- محدودیّت به‌صورت $\le$ باشد به سمت چپ آن یک متغیّر کمی اضافه کنید.

۲- محدودیّت به‌صورت $\ge$ باشد از سمت چپ آن یک متغیّر کمی کم کرده و یک متغیّر مصنوعی اضافه نمایید.

۳- محدودیّت به‌صورت $=$ باشد به سمت چپ آن یک متغیّر مصنوعی اضافه نمایید.

---

۱ برای مطالعه روش ترسیمی می‌توانید به [۸] مراجعه کنید.

۲ برای آشنایی با نرم‌افزارهای LINDO و TORA می‌توانید به [۸] مراجعه کنید.

3 George Dantzig

متغیّر کمکی با S و متغیّر مصنوعی با A نشان داده می‌شود[۱]:

محدودیّت		شکل استاندارد محدودیّت
$۲x_۱ + ۵x_۲ \leq ۶۰$	$\rightarrow$	$۲x_۱ + ۵x_۲ + S_۱ = ۶۰$
$۴x_۱ + x_۲ \geq ۱۰$	$\rightarrow$	$۴x_۱ + x_۲ - S_۲ + A_۲ = ۱۰$
$۳x_۱ + ۲x_۲ = ۳۰$	$\rightarrow$	$۳x_۱ + ۲x_۲ + A_۳ = ۳۰$

موقع استاندارد کردن مسأله در تابع هدف، متغیّرها را به طرف چپ می‌بریم:

تابع محدودیت		شکل استاندارد تابع هدف
$MaxZ = ۶x_۱ + ۵x_۲$	$\rightarrow$	$MaxZ - ۶x_۱ - ۵x_۲ = ۰$

گام ۲- تشکیل اوّلین جدول

اوّلین جدول سیمپلکس یک جواب پایه‌ای موجه[۲] است که نشان دهنده‌ی مبدأ مختصات می‌باشد. برای تشکیل اوّلین جدول سیمپلکس کلیه متغیّرها را در بالای جدول بنویسید. در زیر آنها تابع هدف و سپس محدودیّت‌ها را وارد نمایید. اگر تمام محدودیّت‌ها به‌صورت $\leq$ باشند اوّلین جدول به قرار زیر خواهد بود.

پایه	$x_۱$	$x_۲ \cdots\cdots x_n$	$S_۱$	$S_۲ \cdots\cdots S_m$	RHS*
Z					
$S_۱$			محدودیّت ۱		
$S_۲$			محدودیّت ۲		
$\vdots$					
S_m			محدودیّت m		

متغیّرهایی که در ستون پایه بعد از Z نوشته می‌شوند متغیّرهای پایه یا اساسی نامیده می‌شوند. تعداد متغیّرهای پایه به تعداد محدودیّت‌های مسأله است و مقدار آنها مساوی عدد مقابل خود در سمت راست جدول می‌باشد. باید توجّه شود که در تمام جدول‌های سیمپلکس ستون مربوط به متغیّرهای پایه، بردار یکه باشد یعنی ضریب یک متغیّر پایه در سطر خود مساوی ۱ و در سطرهای دیگر مساوی صفر باشد.

متغیّرهایی که در ستون پایه نوشته نمی‌شوند متغیّرهای غیر پایه نام دارند و مقدار آنها مساوی صفر است.

گام ۳- تکرار جدول

برای تکرار جدول باید متغیّر ورودی و متغیّر خروجی تعیین شده و در جدول بعدی متغیّر ورودی به جای متغیّر خروجی نوشته شود. تکرار جدول در یک مسأله باید به قدری انجام گیرد که جدول بهینه حاصل شود.

شرایط جدول بهینه

جدولی که جواب بهینه را نشان می‌دهد باید دارای دو شرط زیر باشد:

۱- شرط بهینه بودن

۲- شرط موجه بودن

[۱] بعضی از مؤلفین متغیّر مصنوعی را با R نشان داده‌اند.

[۲] منظور از جواب پایه‌ای، جواب گوشه‌از و منظور از جواب پایه‌ای موجه، جواب گوشه‌ای است که در داخل منطقه موجه می‌باشد.

* به جای نوشتن اعداد سمت راست در قسمت بالای سمت راست جدول می‌توان از RHS (Right hand side) استفاده نمود.

شرط بهینه بودن این است که تمام اعداد سطر Z یعنی $(Z_j - C_j)$ها در یک مسأله Max، صفر یا مثبت و در یک مسأله Min صفر یا منفی باشند.

شرط موجه بودن این است که اعداد سمت راست جدول یعنی $B^{-1}b$ صفر یا مثبت باشند:

شرایط جدول بهینه	مسایل Max	مسایل Min
شرط بهینه بودن	$(Z_j - C_j) \geq 0$	$(Z_j - C_j) \leq 0$
شرط موجه بودن	$B^{-1}b \geq 0$	$B^{-1}b \geq 0$

شرایط جدول بهینه در مسایل Max و Min

روش سیمپلکس معمولی (سیمپلکس اوّلیه)، در حل مسائلی به کار می‌رود که دارای شرط موجه بودن باشند. در تمام تکرارهای این روش جدول موجه باقی می‌ماند یعنی اعداد سمت راست آن منفی نمی‌شود. به مثال ۱ توجّه کنید[1]:

مثال ۱:

$$\text{Max}Z = 8x_1 + 5x_2$$
$$\text{s.t}: \quad 2x_1 + x_2 \leq 20$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 40$$
$$x_1 \ , \ x_2 \geq 0$$

چون محدودیّت‌ها به‌صورت $\leq$ هستند با استفاده از متغیّرهای کمی S_1 و S_2، آنها را به‌صورت مساوی می‌نویسیم.

$$\text{Max}Z - 8x_1 - 5x_2 = 0$$
$$\text{s.t}: \quad 2x_1 + x_2 + S_1 = 20$$
$$x_1 + 3x_2 + S_2 = 40$$
$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

اوّلین جدول سیمپلکس به قرار زیر است:

جدول ۱

پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS	نسبت سطرها
Z	-۸	-۵	۰	۰	۰	
S_1	۲	۱	۱	۰	۲۰	$20 \div 2 = 10$
S_2	۱	۳	۰	۱	۴۰	$40 \div 1 = 40$

چون در سطر Z عدد منفی وجود دارد این جدول بهینه نیست و باید تکرار گردد. برای تکرار جدول باید متغیّر ورودی و خروجی تعیین شود.

تعیین متغیّر ورودی

در مسائل Max منفی‌ترین و در مسایل Min مثبت‌ترین عدد سطر Z متغیّر ورودی را نشان می‌دهد. در این مسأله x_1 را به عنوان متغیّر ورودی انتخاب می‌کنیم. ستون x_1 را ستون ورودی و یا ستون لولا می‌نامند.

تعیین متغیّر خروجی

در روش سیمپلکس اوّلیه عدد لولا حتماً باید مثبت باشد. بنابراین اعداد سمت راست جدول را بر اعداد مثبت ستون ورودی تقسیم می‌کنیم و کوچک‌ترین نسبت را برای تعیین متغیّر خروجی انتخاب می‌کنیم[2]. در این مسأله نسبت سطر اوّل ۱۰ و نسبت سطر دوم ۴۰ است بنابراینن سطر اوّل یعنی سطر S_1 را به عنوان سطر خروجی و متغیّر S_1 را به عنوان متغیّر خروجی

[1] این مثال در فصل آخر کتاب، هم با استفاده از نرم‌افزار winQSB (مثال ۱) و هم با استفاده از نرم‌افزار LINGO (مثال ۶) حل شده است.

[2] انتخاب کوچک‌ترین نسبت سطرها در تعیین متغیّر خروجی بهخ این علّت است که در جدول بعدی اعداد سمت راست جدول منفی نشود (جدول موجه باقی بماند).

انتخاب می‌کنیم. سطر خروجی را سطر لولا نیز می‌نامند. عدد ۲ که در تقاطع ستون لولا و سطر لولا است عدد لولا نامیده می‌شود.

انجام تکرار

در جدول بعدی متغیّر رخروجی S_1' را از پایه خارج می‌کنیم و به جای آن متغیّر ورودی x_1 را می‌نویسیم. این جدول باید طوری نوشته شود که ستون متغیّر پایه x_1 به بردار یکه تبدیل شود. یعنی عدد لولا به یک و بقیه اعداد ستون لولا به صفر تبدیل شوند.

در جدول جدید ابتدا سطر لولای جدید را طوری می‌نویسیم که عدد لولا مساوی ۱ شود بنابراین برای نوشتن سطر لولای جدید تمام اعداد سطر لولای قدیم را تقسیم بر عدد لولا می‌کنیم:

$$\text{سطر لولای جدید} = \frac{\text{سطر لولای قدیم}}{\text{عدد لولا}}$$

چون در جدول ۱ عدد لولا ۲ است تمام اعداد سطر لولا را تقسیم بر ۲ می‌کنیم تا سطر لولای جدید به‌دست آید:

$$(\text{سطر } x_1) \text{ سطر لولای جدید} = [1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 10]$$

سطرهای دیگر با استفاده از فرمول زیر نوشته می‌شوند:

سطر قدیم + (سطر لولای جدیید) (قرینه ضریب ستون لولا) = سطر جدید

ضریب ستون لولا در هر سطر به عددی گفته می‌شود که در ستون لولا قرار دارد.

با توجّه به فرمول فوق می‌توانیم برای به‌دست آوردن هر سطر جدید، سطر قدیم آن را در بالا و سطر لولای جدید را در زیر آن بنویسیم سپس قرینه عددی را که در بالای عدد لولا قرار دارد (یعنی قرینه ضریب ستون لولا را) در سطر پایین (سطر لولای جدید) ضرب کنیم و به سطر بالا (سطر قدیم) اضافه نماییم.

سطر Z جدید: برای محاسبه سطر Z جدید، سطر لولای جدید را در ۸ (قرینه عددی که در بالای عدد لولا قرار دارد) ضرب نموده و به سطر Z قدیم اضافه می‌نماییم:

سطر Z قدیم +	-8	-5	0	0	0
سطر لولای جدید × (۸)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	10
سطر Z جدید	0	-1	4	0	80

سطر S_2 جدید: برای محاسبه سطر S_2 جدید، سطر لولای جدید را در (۱-) ضرب و به سطر Z قدیم اضافه می‌نماییم:

سطر S_2 قدیم +	1	3	0	1	40
سطر لولای جدید × (۱-)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	10
سطر S_2 جدید	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{-1}{2}$	1	30

بنابراین جدول ۲ (یا تکرار ۱) به قرار زیر می‌باشد:

جدول ۲

پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS	نسبت سطرها
Z	۰	-۱	۴	۰	۸۰	
x_1	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	۱۰	$۱۰ \div \frac{۱}{۲} = ۲۰$
S_2	۰	$\frac{۵}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۱	۳۰	$۳۰ \div \frac{۵}{۲} = ۱۲$

جدول ۲ بهینه نیست زیرا در سطر Z عدد منفی وجود دارد. بنابراین x_2 را به عنوان متغیّر ورودی و S_2 را به عنـوان متغیّـر خروجی انتخاب می‌کنیم چون عدد لولا $\frac{۵}{۲}$ است تمام اعداد سطر لولا را تقسیم بر $\frac{۵}{۲}$ می‌کنیم تا سطر لولای جدیـد بـه‌دسـت آید:

سطر لولای جدید (سطر x_2) $= [۰ \quad ۱ \quad -\frac{۱}{۵} \quad \frac{۲}{۵} \quad ۱۲]$

سطر Z و x_1 نیز به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

سطر Z قدیم +	۰	-۱	۴	۰	۸۰
سطر لولای جدید × (-۱)	۰	۱	$-\frac{۱}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	۱۲
سطر Z جدید	۰	۰	$\frac{۱۹}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	۹۲

سطر x_1 قدیم +	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	۱۰
سطر لولای جدید × $(-\frac{۱}{۲})$	۰	۱	$-\frac{۱}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	۱۲
سطر x_1 جدید	۱	۰	$\frac{۳}{۵}$	$\frac{-۱}{۵}$	۴

بنابراین جدول ۳ به قرار زیر است:

جدول ۳

پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	۰	۰	$\frac{۱۹}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	۹۲
x_1	۱	۰	$\frac{۳}{۵}$	$\frac{-۱}{۵}$	۴
x_2	۰	۱	$\frac{-۱}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	۱۲

جدول نهایی

جدول ۳ جدول نهایی است زیرا در سطر Z آن عدد منفی وجود ندارد. جواب بهینه مسأله به قرار زیر است:

$$x_{۱}^{*}=۴ \quad , \quad x_{۲}^{*}=۱۲ \quad , \quad S_{۱}^{*}=۰ \quad , \quad S_{۲}^{*}=۰ \quad , \quad Z^{*}=۹۲$$

حل مسائلی که به‌صورت Min (حداقل کردن) هستند

حل مسائل Max و Min در دو مورد زیر با هم متفاوت هستند:

۱- در مسائل Max، زمانی جواب بهینه به‌دست می‌آید که کلیه ضرایب سطر Z صفر یا مثبت باشند ولی در مسائل Min، زمانی جواب بهینه به‌دست می‌آید که کلیه ضرایب سطر Z صفر یا منفی باشند.

۲- در مسائل Max، منفی‌ترین ضریب سطر Z برای انتخاب متغیر ورودی در نظر گرفته می‌شود در صورتیکه در مسائل Min، مثبت‌ترین ضریب سطر Z نشان دهنده متغیّر ورودی است.

تعیین متغیّر خروجی و تکرار جدول در مسائل Max و Min یکسان است.

مثال ۲:

$$\begin{aligned} &\text{Min } Z=۳x_{۱}-۵x_{۲} \\ &\text{s.t}: \quad x_{۱}+x_{۲}\le ۶ \\ &\qquad -x_{۱}+x_{۲}\le ۴ \\ &\qquad ۴x_{۱}-x_{۲}\le ۸ \\ &\qquad x_{۱},x_{۲}\ge ۰ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Min } Z-۳x_{۱}+۵x_{۲}=۰ \\ &\text{s.t}: \quad x_{۱}+x_{۲}+S_{۱}=۶ \\ &\qquad -x_{۱}+x_{۲}+S_{۲}=۴ \\ &\qquad ۴x_{۱}-x_{۲}+S_{۳}=۸ \\ &\qquad x_{۱},x_{۲},S_{۱},S_{۲},S_{۳}\ge ۰ \end{aligned}$$

حل:

	پایه	$x_{۱}$	$x_{۲}$	$S_{۱}$	$S_{۲}$	$S_{۳}$	جواب	نسبت‌ها	
	Z	-۳	۵	۰	۰	۰	۰		
	$S_{۱}$	۱	۱	۱	۰	۰	۶	$۶\div۱=۶$	
تکرار صفر	$S_{۲}$	-۱	۱	۰	۱	۰	۴	$۴\div۱=۴$	سطر خروجی
	$S_{۳}$	۴	-۱	۰	۰	۱	۸	—	
	Z	۲	۰	۰	-۵	۰	-۲۰		
تکرار ۱	$S_{۱}$	۲	۰	۱	-۱	۰	۲	$۲\div۲=۱$	سطر خروجی
	$x_{۲}$	-۱	۱	۰	۱	۰	۴	—	
	$S_{۳}$	۳	۰	۰	۱	۱	۱۲	$۱۲\div۳=۴$	
	Z	۰	۰	-۱	-۴	۰	-۲۲		
	$x_{۱}$	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۰	۱		
تکرار ۲	$x_{۲}$	۰	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	۵	جدول نهایی	
	$S_{۳}$	۰	۰	$-\frac{۳}{۲}$	$\frac{۵}{۲}$	۱	۹		

توجّه: می‌توان در مثال ۲، با ضرب کردن تابع هدف در (-)، تابع هدف Min را به Max تبدیل و حل نمود.

حل مسائلی که دارای محدودیّت‌هایی به‌صورت $\geq$ و یا $=$ هستند

محدودیّت‌های $\geq$ و یا $=$ باعث می‌شوند که مبدأ مختصات خارج از نقطه موجود قرار گیرد و نتوان از آن به عنوان یک جواب پایه‌ای موجه استفاده نمود. در این گونه مسائل برای این که بتوان از مبدأ مختصات به عنوان اوّلین جواب پایه‌ای استفاده گردد از متغیّرهای مصنوعی (ساختگی) به‌صورت زیر استفاده می‌شود:

محدودیّت		شکل استاندارد محدودیّت
$x_1+x_2\geq ۵$	$\rightarrow$	$x_1+x_2-S_1+A_1=۵$
$۲x_1+x_2=۸$	$\rightarrow$	$۲x_1+x_2+A_2=۸$

تا زمانیکه مقدار تمام متغیّرهای مصنوعی صفر نگردند جواب موجه برای مسأله اصلی به‌دست نمی‌آید. لذا به منظور صفر شدن متغیّرهای مصنوعی، در حل این گونه مسائل از روش M بزرگ یا دو مرحله‌ای استفاده می‌شود. در ادامه روش M بزرگ شرح داده می‌شود.

روش M بزرگ[1] یا روش جریمه

روش M بزرگ توسط چارنز و کوپر[2] توسعه یافته است. در این روش برای تضمین صفر شدن متغیْرهای مصنوعی، جریمه بزرگی[3] معادل M به آنها نسبت داده و $-MA$ را در مسائل Max و $+MA$ را در مسائل Min به سمت راست تابع هدف اضافه می‌کنیم. برای بهینه شدن Z، باید عدد بسیار بزرگ MA که در مسائل Max از سمت راست تابع هدف کسر و در مسائل Min به سمت راست تابع هدف اضافه می‌شود صفر گردد. بنابراین چون M، صفر نیست حتماً Aها صفر خواهند شد (البته در صورتیکه مسأله جواب موجه داشته باشد).

اضافه کردن متغیّرهای مصنوعی به محدودیّت‌های $\geq$ و یا $=$ یک حیله ریاضی برای به‌دست آوردن اوّلین جواب پایه‌ای و اضافه کردن $-MA$ در مسائل Max و $+MA$ در مسائل Min به تابع هدف، برای صفر شدن A و به‌دست آوردن جواب بهینه در داخل منطقه موجه است. در روش M بزرگ از محدودیّت‌های $\leq$، متغیّر کمکی و از محدودیّت‌های $\geq$ و $=$، متغیّر مصنوعی را در ستون پایه اوّلین جدول می‌نویسیم. چون در اوّلین جدول ضرایب Aها در سطر Z صفر نیست یعنی جدول یکه نمی‌باشد به منظور اصلاح جدول، سطرهای A را با هم جمع می‌کنیم و بعد از ضرب کردن به $-M$ در مسائل Max (یا $+M$ در مسائل Min)، به سطر Z اضافه می‌نماییم. سپس تا رسیدن به جدول نهایی آن را تکرار می‌کنیم.

مثال ۳:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } Z=۲x_1+۴x_2\\
&\text{s.t}: \quad ۲x_1+x_2\leq ۸\\
&\qquad\quad x_1+x_2\geq ۵\\
&\qquad\quad -۳x_1+x_2=۳\\
&\qquad\quad x_1,x_2\geq ۰
\end{aligned}
$$

حل:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } Z=۲x_1+۴x_2+MA_2+MA_3 \quad\rightarrow\quad \text{Min } Z-۲x_1-۴x_2-MA_2-MA_3=۰\\
&\qquad ۲x_1+x_2+S_1 \quad =۸\\
&\qquad x_1+x-S_2+A_2=۵\\
&\qquad -۳x_1+x_2+A_3=۳\\
&\qquad x_1,x_2+S_1,S_2,A_2,A_3\geq ۰
\end{aligned}
$$

---

[1] Big M Method
[2] Charnes and Cooper
[3] M عدد بسیار بزرگ و مثبت است. M باید آن قدر بزرگ باشد که متغیّر مصنوعی وارد پایه نشود.

از اوّلین محدودیّت $S_۱$ و از محدودیّت‌های دوم و سوم به ترتیب $A_۲$ و $A_۳$ را در ستون پایه اوّلین جدول می‌نویسیم:

پایه	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	$A_۲$	$A_۳$	جواب
Z	-۲	-۴	۰	۰	$-M$	$-M$	۰
$S_۱$	۲	۱	۱	۰	۰	۰	۸
$A_۲$	۱	۱	۰	-۱	۱	۰	۵
$A_۳$	-۳	۱	۰	۰	۰	۱	۳

برای یکه شدن جدول، سطرهای $A_۲$ و $A_۳$ را با هم جمع، در M ضرب و به سطر Z اضافه می‌کنیم. سپس تـا رسـیدن بـه جدول نهایی آن را تکرار می‌نماییم:

	پایه	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	$A_۲$	$A_۳$	جواب
	Z	$-۲M-۲$	$۲M-۴$	۰	$-M$	۰	۰	$۸M$
جدول یکه شده	$S_۱$	۲	۱	۱	۰	۰	۰	۸
تکرار صفر	$A_۲$	۱	۱	۰	-۱	۱	۰	۵
	$A_۳$	-۳	۱	۰	۰	۰	۱	۳
	Z	$۴M-۱۴$	۰	۰	$-M$	۰	$-۲M+۴$	$۲M+۱۲$
	$S_۱$	۵	۰	۱	۰	۰	-۱	۵
تکرار ۱	$A_۲$	۴	۰	۰	-۱	۱	-۱	۲
	$x_۲$	-۳	۱	۰	۰	۰	۱	۳

	پایه	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	$A_۲$	$A_۳$	جواب
	Z	۰	۰	۰	$\frac{-۷}{۲}$	$+M+\frac{۷}{۲}$	$-M+\frac{۱}{۲}$	۱۹
جدول نهایی	$S_۱$	۰	۰	۱	$\frac{۵}{۴}$	$\frac{-۵}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۵}{۲}$
تکرار ۲	$x_۱$	۱	۰	۰	$\frac{-۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{-۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$
	$x_۲$	۰	۱	۰	$\frac{-۳}{۴}$	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۹}{۲}$

به‌طوریکه ملاحظه می‌شود در جدول نهایی متغیّرهای مصنوعی در پایه نیستند یعنی مقـدار آنهـا صـفر اسـت بنـابراین مسـأله دارای جواب بهینه به قرار زیر می‌باشد:

$$x_۱^*=\frac{۱}{۲}\ ,\ x_۲^*=\frac{۹}{۲}\ ,\ S_۱^*=\frac{۵}{۲}\ ,\ S_۲^*=۰\ ,\ \overset{*}{Z}=۱۹$$

روش سیمپلکس ثانویه[1]

این روش که اوّلین بار توسط لیمک[2] معرفی شده است در حل مسائلی به کار می‌رود که شرط بهینه بودن را دارند ولی غیر موجه می‌باشند. در این روش:

۱- کلیه محدودیّت‌ها را به $\le$ تبدیل نمایید[3].

۲- با استفاده از متغیّرهای کمکی به عنوان متغیّرهای پایه، اولین جدول را بنویسید.

۳- متغیّری را که دارای منفی‌ترین مقدار است به عنوان متغیّر خروجی انتخاب نمایید. به عبارت دیگر منفی‌ترین عدد سمت راست جدول را برای تعیین سطر خروجی در نظر بگیرید.

۴- اعداد سطر Z را بر اعداد منفی سطر خروجی تقسیم کنید و کوچک‌ترین قدر مطلق را برای تعیین متغیّر ورودی انتخاب نمایید[4]. در صورتیکه در سطر خرئجی عدد منفی نباشد مسأله بدون جواب موجه است[5].

مانند روش سیمپلکس اوّلیه در روش سیمپلکس ثانویه نیز هرگاه بیش از یک متغیّر ورودی یا متغیّر خروجی موجود باشند یکی از آنها را به دلخواه انتخاب نمایید.

۵- تکرار جدول را که مانند روش سیمپلکس اوّلیه است آن قدر انجام دهید تا جدول موجه شود یعنی در سمت راست جدول عدد منفی موجود نباشد.

مثال ۴:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= ۴x_۱ + ۷x_۲ \\ & x_۱ + x_۲ \ge ۶ \\ & ۲x_۱ + ۳x_۲ \ge ۱۲ \\ & x_۱ , x_۲ \ge ۰ \end{aligned}$$

مسأله شرط بهینه بودن را دارد بنابراین می‌توان آن را با استفاده از روش سیمپلکس ثانویه حل نمود. ابتدا محدودیّت‌ها را به $\le$ تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= ۴x_۱ + ۷x_۲ \\ & -x_۱ - x_۲ \le -۶ \\ & -۲x_۱ - ۳x_۲ \le -۱۲ \\ & x_۱ \ , \ x_۲ \ge ۰ \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \text{Min } Z - ۴x_۱ - ۷x_۲ &= ۰ \\ -x_۱ - x_۲ + S_۱ &= -۶ \\ -۲x_۱ - ۳x_۲ + S_۲ &= -۱۲ \\ x_۱, x_۲, S_۱, S_۲ &\ge ۰ \end{aligned}$$

جدول ۱

پایه	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	RHS	
Z	-۴	-۷	۰	۰	۰	
$s_۱$	-۱	-۱	۱	۰	-۶	
$s_۲$	-۲	-۳	۰	۱	-۱۲	سطر خروجی

[1] Dual simplex Method
[2] Lemke
[3] در این روش محدودیّت‌ها به $\le$ تبدیل می‌شوند تا نیازی به متغیّر مصنوعی نباشد. محدودیّت‌های مساوی را می‌توان با دو نامعادله جایگزین نمود.
[4] به جای کوچک‌ترین قدرمطلق (یا نزدیک‌ترین عدد به صفر)، می‌توان گفت در مسائل Max بزرگ‌ترین و در مسائل Min کوچک‌ترین نسبت را برای تعییر متغیّر ورودی انتخاب نمایید.
[5] عدد لولا در این روش باید منفی باشد.

سطر دوم را به عنوان سطر خروجی در نظر می‌گیریم زیرا دارای منفی‌ترین عدد سمت راست است. برای تعیین متغیّر ورودی نیز اعداد سطر Z را بر اعداد منفی سطر خروجی تقسیم می‌کنیم و از این قدر مطلق جواب‌ها کوچک‌ترین را انتخاب می‌نماییم:

$$x_1 \rightarrow \left|\frac{-4}{-2}\right| = 2 \rightarrow \text{متغیّر ورودی } x_1$$

$$x_2 \rightarrow \left|\frac{-7}{-3}\right| = 2/3$$

جدول بعدی به قرار زیر است:

جدول ۲

پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	۰	-۱	۰	-۲	۲۴
s_1	۰	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{-1}{2}$	۰
x_1	۱	$\frac{3}{2}$	۰	$\frac{-1}{2}$	۶

جدول نهایی

جواب بهینه:

$$x_1^* = 6, x_2^* = 0, s_1^* = 0, s_2^* = 0, Z^* = 24$$

چون در جدول نهایی مقدار متغیّر پایه S_1 مساوی صفر است مسأله دارای حالت بهینه تبهگن یا تبهگن دائم می‌باشد.

تفاوت روش سیمپلکس اوّلیه و ثانویه

۱- در روش سیمپلکس اوّلیه ابتدا متغیّر ورودی و سپس متغیّر خروجی انتخاب می‌شوند در صورتیکه در روش سیمپلکس ثانویه ابتدا متغیّر خروجی و سپس متغیّر ورودی انتخاب می‌گردند.

۲- در روش سیمپلکس اوّلیه عدد لولا حتماً مثبت است در صورتیکه در روش سیمپلکس ثانویه عدد لولا حتماً منفی است.

۳- هر دو روش سیمپلکس اوّلیه و ثانویه از مبدأ مختصات شروع می‌کنند ولی روش سیمپلکس اوّلیه در هر تکرار یکی از گوشه‌های موجه مجاور را بررسی می‌کند تا جواب موجه و بهینه حاصل شود.

۴- در هر تکرار روش سیمپلکس اوّلیه، مقدار Z بهتر می‌شود در صورتیکه در هر تکرار روش سیمپلکس ثانویه، مقدار Z بدتر می‌شود (مگر در حالت خاص تبهگن که ممکن است مقدار Z تغییر نکند).

حل مسائل غیربهینه و غیرموجه

مسائلی را که هم غیر بهینه و هم غیر موجه هستند می‌توان با استفاده از روش‌های کارآی زیر حل نمود:

۱- روش محدودیّت مصنوعی[1]

۲- روش سیمپلکس اوّلیه ـ ثانویه

این روش‌ها نسبت به روش M بزرگ و روش دو مرحله‌ای[2] دارای مزایای زیر هستند:

۱- نیازی به اضافه کردن متغیّر مصنوعی ندارند.

۲- با تعداد تکرارهای کمتری به جواب بهینه می‌رسند.

[1] به روش محدودیّت مصنوعی که بر مبنای روش سیمپلکس ثانویه توسعه یافته است روش سیمپلکس ثانویه توسعه یافته نیز می‌گویند.

[2] برای مطالعه روش دو مرحله‌ای می‌توانید به [۸] مراجعه کنید.

روش محدودیّت مصنوعی[1]

در این روش ابتدا با اضافه کردن یک محدودیّت مصنوعی، مسأله را از حالت غیر بهینگی خارج می‌کنیم و سپس مسأله بهینه و غیر موجه به‌دست آمده را با استفاده از روش سیمپلکس ثانویه حل می‌کنیم:

گام‌های لازم در روش محدودیّت مصنوعی به قرار زیر هستند:

گام ۱– تابع هدف را به Max و محدودیّت‌ها را به $\le$ تبدیل نمایید.

گام ۲– با استفاده از متغیّرهایی که ضریب آنها در تابع هدف مثبت است[2] محدودیّت جدیدی بنویسید. بدین ترتیب که مجموع این متغیّرها را کوچک‌تر مساوی M قرار دهید. این محدودیّت جدید که محدودیّت زائدی است محدودیّت مصنوعی نامیده می‌شود.

گام ۳– به وسیله متغیّرهای کمی محدودیّت‌ها را به‌صورت مساوی بنویسید و اوّلین جدول سیمپلکس را تشکیل دهید. در این جدول متغیّری را که دارای منفی‌ترین ضریب در سطر Z است به عنوان متغیّر ورودی و سطر مربوط به محدودیّت مصنوعی را به عنوان سطر خروجی در نظر بگیرید و جدول را تکرار کنید.

گام ۴– بعد از یک تکرار، جدول بهینه و غیر موجه است. لذا با استفاده از روش سیمپلکس ثانویه تا رسیدن به جدول نهایی آن را تکرار نمایید. اگر مقدار S_M (متغیّر کمکی محدودیّت مصنوعی) در جدول نهایی دارای مقداری مثبت باشد مسأله دارای جواب بهینه محدود است.

مثال ۵:

$$\begin{aligned}
\text{Max } Z &= ۶x_۱ + ۴x_۲ \\
\text{s.t.}\quad & x_۱ + x_۲ \le ۱۰ \\
& ۲x_۱ + x_۲ \ge ۴ \\
& x_۱ , x_۲ \ge ۰
\end{aligned}$$

حل: محدودیّت دوم مسأله را با ضرب کردن در (–) به $\le$ تبدیل می‌کنیم و چون ضریب $x_۱$ و $x_۲$ در تابع هدف مثبت است با مجموع آنها محدودیّت مصنوعی را به‌صورت $x_۱ + x_۲ \le M$ به مسأله اضافه می‌نماییم:

$$\begin{aligned}
\text{Max } Z &= ۶x_۱ + ۴x_۲ \\
\text{s.t}:\quad & x_۱ + x_۲ \le ۱۰ \\
& -۲x_۱ - x_۲ \le -۴ \\
& x_۱ + x_۲ \le M \quad \text{محدودیّت مصنوعی} \\
& x_۱ , x_۲ \ge ۰
\end{aligned}
\quad \rightarrow \quad
\begin{aligned}
\text{Max } Z - ۶x_۱ - ۴x_۲ &= ۰ \\
\text{s.t}:\quad x_۱ + x_۲ + S_۱ &= ۱۰ \\
-۲x_۱ - x_۲ + S_۲ &= -۴ \\
x_۱ + x_۲ + S_M &= M \\
x_۱ , x_۲ , S_۱ , S_۲ , S_M &\ge ۰
\end{aligned}$$

اوّلین جدول سیمپلکس به قرار زیر است:

جدول ۱ (غیربهینه و غیرموجه)

پایه	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	S_M	RHS
Z	-۶	-۴	۰	۰	۰	۰
$S_۱$	۱	۱	۱	۰	۰	۱۰
$S_۲$	-۲	-۱	۰	۱	۰	-۴
S_M	۱	۱	۰	۰	۱	M

$x_۱$ را به عنوان متغیّر ورودی و سطر محدودیّت مصنوعی (سطر S_M) را به عنوان سطر خروجی در نظر می‌گیریم و جدول را تکرار می‌کنیم:

1 Artifical Constraint

۲ این متغیّرها باعث غیر بهینه بودن این جدول هستند.

جدول ۲ — بهینه و غیرموجه

پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	S_M	RHS
Z	۰	۲	۰	۰	۶	۶M
S_1	۰	۰	۱	۰	-۱	-M+۱۰
S_2	۰	۱	۰	۱	۲	۲M-۴
x_1	۱	۱	۰	۰	۱	M

جدول به‌دست آمده بهینه و غیرموجه است لذا با استفاده از روش سیمپلکس ثانویه تـا رسـدین بـه جـدول موجـه آن را تکـرار می‌نماییم:

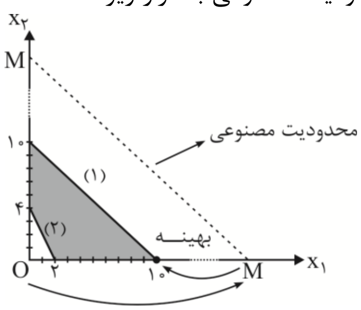
جدول ۳ (جدول نهایی) — بهینه و موجه

پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	S_M	RHS
Z	۰	۲	۶	۰	۰	۶۰
S_M	۰	۰	-۱	۰	۱	M-۱۰
S_2	۰	۱	۲	۱	۰	۱۶
x_1	۱	۱	۱	۰	۰	۱۰

چون در جدول نهایی مقدار S_M مثبت استا مسأله دارای جواب بهینه محدود به قرار زیر است:

جواب بهینه: $x_1^* = ۱۰ \quad , \quad x_2^* = ۰ \quad , \quad Z^* = ۶۰$

حل ترسیمی مثال ۵ بعد از اضافه کردن محدودیّت مصنوعی به قرار زیر است.



شکل ۱. حل ترسیمی مثال ۵

پیکان‌ها جهت حرکت را در روش محدودیّت مصنوعی از اوّلین جدول تا جدول نهایی نشان می‌دهند. جدول ۱ متناظر بـا نقطـه O یعنی یک جواب غیربهینه و غیرموجه است. جدول ۲ متناظر با نقطه M یعنی یک جواب بهینه و غیرموجه (فـوق بهینـه) است. جدول ۳ متناظر با نقطه بهینه است.

وضعیّت S_M در جدول نهایی

S_M یکی از دو وضعیّت را می‌تواند در جدول نهایی داشته باشد:

۱- مقدار S_M در جدول نهایی مثبت است. در این صورت مسأله دارای جواب بهینه محدود است.

۲- مقدار S_M در جدول نهایی مساوی صفر است، در این صورت مسأله دارای جواب بهینه‌ی نامحدود است.

حالت‌های خاص در روش محدودیّت مصنوعی

حالت اوّل: بدون جواب موجه

اگر در سمت راست جدول عدد منفی باشد ولی رد سطر خروجی عدد منفی بـرای تعیـین متغیّـر ورودی نباشـد مسـأله بـدون جواب موجه است.

مثال ۶: مسأله زیر و جدول نهایی آن را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= ۴x_۱ + ۵x_۲ \\ -x_۱ + x_۲ &\geq ۱۱ \\ x_۲ &\leq ۶ \\ x_۱ , x_۲ &\geq ۰ \end{aligned}$$

پایه	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	S_M	RHS
Z	۰	۰	۴	۹	۰	۱۰
S_M	۰	۰	-۱	-۲	۱	$M-۱$
$x_۱$	۱	۰	۱	۱	۰	-۵
$x_۲$	۰	۱	۰	۱	۰	۶

این جدول غیرموجه است ولی تکرار آن ممکن نیست زیرا در سطر خروجی $x_۱$، عدد منفی برای تعیین متغیّر ورودی وجود ندارد. لذا مسأله بدون جواب موجه است.

حالت دوم: جواب بهینه چندگانه

اگر ضریب متغیّر غیر پایه‌ای در سطر Z جدول نهایی صفر باشد مسأله بیش از یک جواب بهینه دارد.

مثال ۷: جدول زیر و مسأله نهایی آن را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= -۱۰x_۱ - ۴x_۲ + ۲x_۳ \\ -\frac{۱}{۲}x_۱ + x_۲ + x_۳ &\leq ۲ \\ ۲x_۱ + ۴x_۲ + ۲x_۳ &\geq ۸ \\ x_۱ , x_۲ , x_۳ &\geq ۰ \end{aligned}$$

پایه	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$S_۲$	S_M	RHS
Z	۰	۰	۰	۸	۳	۰	-۸
S_M	۳	۰	۰	-۲	$-\frac{۱}{۲}$	۱	M
$x_۲$	$\frac{۳}{۲}$	۱	۰	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	۲
$x_۳$	-۲	۰	۱	۲	$\frac{۱}{۲}$	۰	۰

چون ضریب متغیّر غیر پایه $x_۱$ در سطر Z جدول نهایی صفر است مسأله بیش از یک جواب بهینه دارد. این مسأله دارای حالت خاص بهینه‌ی تبهگن نیز است؛ زیرا در جدول نهایی مقدار متغیّر پایه‌ی $x_۳$ مساوی صفر است.

حالت سوم: جواب بهینه‌ی نامحدود

اگر مقدار S_M در جدول نهایی مساوی صفر باشد مسأله دارای جواب بهینه نامحدود است.

مثال ۸: مسأله زیر و جدول نهایی آن را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= ۴x_۱ - ۵x_۲ \\ x_۱ - x_۲ &\geq ۲ \\ ۴x_۱ + x_۲ &\geq ۴۰ \\ x_۱ , x_۲ &\geq ۰ \end{aligned}$$

پایه	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	S_M	RHS
Z	۰	۵	۰	۰	۴	$۴M$
$S_۱$	۰	۱	۱	۰	۱	$M-۲$
$S_۲$	۰	-۱	۰	۱	۴	$۴M-۴۰$
$x_۱$	۱	۰	۰	۰	۱	M

چون در جدول نهایی مقدار S_M مساوی صفر است مسأله دارای جواب بهینه نامحدود است. یعنی داریم:

$$\text{Max } Z = \infty$$

حالت چهارم: حالت تبهگن یا دژنره

اگر مقدار یکی از متغیّرهای پایه صفر باشد مسأله دارای حالت تبهگن است. در صورتیکه این حالت در جدول نهایی باشد مسأله دارای حالت تبهگن دائم یا بهینه تبهگن است. و اگر این حالت در یکی از جدول‌های ماقبل جدول نهایی باشد مسأله دارای حالت تبهگن موقت است. در مثال ۴ مسأله دارای حالت تبهگن دائم است.

روش سیمپلکس اوّلیه ــ ثانویه[1]

این روش که در حل مسائل غیرموجه و غیربهینه به کار می‌رود دارای گام‌های زیر است:

گام ۱- تابع هدف را به Max و محدودیّت‌ها را به $\le$ تبدیل کنید و اوّلین جدول سیمپلکس را بنویسید.

گام ۲- اثر سیمپلکس اوّلیه و ثانویه را با استفاده از فرمول زیر به‌دست آورید. اثر سیمپلکس مقدار تغییر Z را در جدول بعدی نشان می‌دهد.

$$\text{اثر سیمپلکس} = \left|\frac{(Z_j - C_j)(b_i)}{a_{ij}}\right|$$

در این فرمول داریم:

$Z_j - C_j = Z$ ضریب متغیّر ورودی در سطر

$b_i =$ عدد سمت راست سطر خروجی

$a_{ij} =$ عدد لولا

- اثر سیمپلکس اوّلیه زمانی قابل محاسبه است که متغیّری با ضریب منفی در سطر Z وجود داشته و عدد ستون لولا و عدد سمت راست مقابل آن مثبت باشند؛ یعنی داشته باشیم:

$$Z_j - C_j < \circ \ , \ b_i > \circ \ , \ a_{ij} > \circ$$

- اثر سیمپلکس ثانویه زمانی قابل محاسبه است که متغیّری با ضریب مثبت در سطر Z وجود داشته و عدد ستون لولا و عدد سمت راست مقابل آن منفی باشند یعنی داشته باشیم:

$$Z_j - C_j > \circ \ , \ b_i < \circ \ , \ a_{ij} < \circ$$

✓ اگر در این گام با منفی‌ترین عدد سطر Z امکان محاسبه اثر سیمپلکس اوّلیه نباشد از منفی‌ترین عدد دیگر سطر Z استفاده کنید. همین‌طور اگر با منفی‌ترین عدد سمت راست امکان محاسبه‌ی اثر سیمپلکس ثانویه نباشد از منفی‌ترین عدد دیگر سمت راست استفاده نمایید.

✓ **توجّه:** در محاسبه اثر سیمپلکس اوّلیه و یا ثانویه مقدار $(Z_j - C_j)$ و یا b_i می‌توانند صفر نیز باشند ولی عدد لولا هیچ‌گاه نمی‌تواند صفر باشد.

گام ۳- بزرگترین مقدار محاسبه شده را در نظر بگیرید. اگر مربوط به اثر سیمپلکس اوّلیه باشد با استفاده از روش سیمپلکس اوّلیه و در صورتیکه مربوط به اثر سیمپلکس ثانویه باشد با استفاده از روش سیمپلکس ثانویه جدول را تکرار نمایید. در صورت تکرار جدول با استفاده از روش سیمپلکس اوّلیه مقدار Z به اندازه اثر سیمپلکس اوّلیه بیشتر می‌شود و در صورت تکرار جدول با استفاده از روش سیمپلکس ثانویه مقدار Z به اندازه اثر سیمپلکس ثانویه کمتر می‌شود. تکرار جدول را تا رسیدن به جدول نهایی ادامه دهید.

[1] Primal-Dual Method

مثال ۹:

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = ۶x_۱ + ۴x_۲ \\ &\quad x_۱ + x_۲ \le ۱۰ \\ &\quad ۲x_۱ + x_۲ \ge ۴ \\ &\quad x_۱, x_۲ \ge ۰ \end{aligned}$$

حل: محدودیّت دوم را در (-) ضرب می‌کنیم. سپس با استفاده از متغیّرهای کمکی محدودیّت‌های مسأله را به‌صورت مساوی می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z - ۶x_۱ - ۴x_۲ = ۰ \\ &\quad x_۱ + x_۲ + S_۱ = ۱۰ \\ &\quad -۲x_۱ - x_۲ + S_۲ = -۴ \\ &\quad x_۱, x_۲, S_۱, S_۲ \ge ۰ \end{aligned}$$

اوّلین جدول به قرار زیر است:

جدول ۱

	پایه	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	RHS
	Z	-۶	-۴	۰	۰	۰
غیربهینه و	$S_۱$	۱	۱	۱	۰	۱۰
غیرموجه	$S_۲$	-۲	-۱	۰	۱	-۴

اگر بخواهیم با استفاده از روش سیمپلکس اوّلیه مسأله را حل کنیم باید $x_۱$ را که دارای منفی‌ترین ضریب در سطر Z است به عنوان متغیّر ورودی انتخاب نماییم. چون $a_{۱۱}$ و $b_۱$ در سطر $S_۱$ مثبت هستند $S_۱$ را نیز به عنوان متغیّر خروجی انتخاب می‌کنیم. یعنی داریم:

$$\begin{cases} x_۱: & \text{ورودی} \\ S_۱: & \text{خروجی} \end{cases} \text{روش سیمپلکس ثانویه} \quad \rightarrow \text{اثر سیمپلکس اوّلیه} = \left|\frac{(-۶)(۱۰)}{۱}\right| = ۶۰$$

چون اثر سیمپلکس اوّلیه مساوی ۶۰ است در صورتیکه با استفاده از روش سیمپلکس اوّلیه جدول را تکرار نماییم مقدار Z به اندازه ۶۰ واحد بیشتر می‌شود.

چنانچه بخواهیم با استفاده از روش سیمپلکس ثانویه جدول را تکرار نماییم سطر $S_۲$ را که عدد سمت راست آن منفی است به عنوان سطر خروجی انتخاب می‌کنیم. در سطر $S_۲$، $a_{۲۱}$ و $a_{۲۲}$ منفی هستند ولی چون $(Z_۱ - C_۱)$ و $(Z_۲ - C_۲)$ مثبت یا صفر نیستند نمی‌توانیم متغیّر ورودی را تعیین نماییم. یعنی تکرار جدول با استفاده از روش سیمپلکس ثانویه ممکن نیست:

$$\begin{cases} S_۲ & \text{خروجی:} \\ & \text{ورودی: نداریم} \end{cases} \text{روش سیمپلکس ثانویه} \rightarrow \text{انجام روش سیمپلکس ثانویه ممکن نیست}$$

بنابراین با استفاده از روش سیمپلکس اوّلیه جدول ۱ را تکرار می‌کنیم. جدول ۲ حاصل می‌شود که بهینه و موجه است[۱]:

جدول ۲ (جدول نهایی)

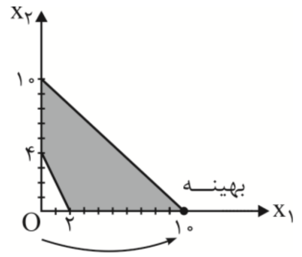
	پایه	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	RHS
	Z	۰	۲	۶	۰	۶۰
بهینه و	$x_۱$	۱	۱	۱	۰	۱۰
موجه	$S_۲$	۰	۱	۲	۱	۱۶

---

[۱] جواب بهینه مسأله با استفاده از روش سیمپلکس اوّلیه ـ ثانویه با ۲ جدول حاصل شده است. در صورتیکه جواب بهینه همین مسأله در مثال ۵ با استفاده از روش محدودیّت مصنوعی با ۳ جدول به‌دست آمده بود.

جواب بهینه: $x_{۱}^{*}=۱۰\ ,\ x_{۲}^{*}=۰\ ,\ Z^{*}=۶۰$

حل ترسیمی مثال ۹ را در نظر بگیرید:



شکل ۳. حل ترسیمی مثال ۹

پیکان، جهت حرکت را از مبدأ مختصات (نقطه O) تا نقطه بهینه در روش سیمپلکی اوّلیه ـ ثانویه نشان می‌دهد. جدول ۱ نشان دهنده نقطه O و جدول ۲ نشان دهنده‌ی نقطه بهینه است.

مثال ۱۰:

$$\begin{aligned}
\text{Max } Z &= ۲x_۱+۳x_۲-۵x_۳\\
x_۱+x_۲+x_۳ &\le ۲۰\\
۲x_۱+۳x_۲+x_۳ &\ge ۲۵\\
۲x_۲+۳x_۳ &\ge ۳۰\\
x_۱\ ,\ x_۲\ ,\ x_۳ &\ge ۰
\end{aligned}$$

حل:

$$\begin{aligned}
\text{Max } Z-۲x_۱-۳x_۲+۵x_۳ &= ۰\\
x_۱+x_۲+۳x_۳ &\le ۲۰\\
-۲x_۱-۳x_۲-x_۳ &\le -۲۵\\
-۲x_۲-۳x_۳ &\le -۳۰\\
x_۱,x_۲,x_۳ &\ge ۰
\end{aligned}
\quad\rightarrow\quad
\begin{aligned}
\text{Max } Z-۲x_۱-۳x_۲+۵x_۳ &= ۰\\
x_۱+x_۲+x_۳+S_۱ &= ۲۰\\
-۲x_۱-۳x_۲-x_۳+S_۲ &= -۲۵\\
-۲x_۲-۳x_۳+S_۳ &= -۳۰\\
x_۱,x_۲,x_۳,S_۱,S_۲,S_۳ &\ge ۰
\end{aligned}$$

	پایه	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	RHS	
	Z	-۲	-۳	۵	۰	۰	۰	۰	
غیربهینه و	$S_۱$	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۲۰	
و غیرموجه	$S_۲$	-۲	-۳	-۱	۰	۱	۰	-۲۵	جدول ۱
	$S_۳$	۰	-۲	-۳	۰	۰	۱	-۳۰	

سیمپلکس اوّلیه $\begin{cases} x_۲: & \text{ورودی}\\ S_۱: & \text{خروجی}\end{cases}$ $\rightarrow$ اثر سیمپلکس اوّلیه $=\left|\dfrac{(-۳)(۲۰)}{۱}\right|=۶۰$

سیمپلکس ثانویه $\begin{cases} S_۳: & \text{خروجی}\\ x_۳: & \text{ورودی}\end{cases}$ $\rightarrow$ اثر سیمپلکس ثانویه $=\left|\dfrac{(۵)(-۳۰)}{-۳}\right|=۵۰$

چون اثر سیمپلکس اوّلیه بیشتر است برای تکرار جدول از روش سیمپلکس اوّلیه استفاده می‌کنیم. یعنی x_2 را به عنوان متغیّر ورودی و S_1 را به عنوان متغیّر خروجی در نظر می‌گیریم و جدول را تکرار می‌کنیم:

	پایه	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	RHS	
	Z	۱	۰	۸	۳	۰	۰	۶۰	
بهینه و	x_2	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۲۰	جدول ۲
موجه	S_2	۱	۰	۲	۳	۱	۰	۳۵	(جدول نهایی)
	S_3	۲	۰	-۱	۲	۰	۱	۱۰	

جواب بهینه: $x_1^* = ۰ \ , \ x_2^* = ۲۰ \ , \ x_3^* = ۰ \ , \ Z^* = ۶۰$

حالت‌های خاص در روش سیمپلکس اوّلیه ــ ثانویه

حالت اوّل: بدون جواب موجه

اگر جدول بهینه و موجه نشده باشد و تکرار آن با یکی از روش‌های سیمپلکس اوّلیه و سیمپلکس ثانویه ممکن نباشد مسأله بدون جواب موجه است.

مثال ۱۱:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= ۴x_1 + ۵x_2 \\ -x_1 + x_2 &\geq ۱۱ \\ x_2 &\leq ۶ \\ x_1, x_2 &\geq ۰ \end{aligned}$$

حل:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z - ۴x_1 - ۵x_2 &= ۰ \\ x_1 - x_2 + S_1 &= -۱۱ \\ x_2 + S_2 &= ۶ \\ x_1, x_2, S_1, S_2 &\geq ۰ \end{aligned}$$

	پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS	
	Z	-۴	-۵	۰	۰	۰	
غیربهینه	S_1	۱	-۱	۱	۰	-۱۱	جدول ۱
و غیرموجه	S_2	۰	۱	۰	۱	۶	

سیمپلکس اوّلیه $\begin{cases} \text{ورودی: } x_2 \\ \text{خروجی: } S_2 \end{cases}$ $\rightarrow$ اثر سیمپلکس اوّلیه $= \left|\dfrac{(-۵)(۶)}{۱}\right| = ۳۰$

سیمپلکس ثانویه $\begin{cases} \text{خروجی: } S_1 \\ \text{ورودی: نداریم} \end{cases}$ $\rightarrow$ حل مسأله با روش سیمپلکس ثانویه ممکن نیست

با استفاده از روش سیمپلکس اوّلیه جدول را تکرار می‌نماییم:

	پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS	
	Z	-۴	۰	۰	۵	۳۰	
غیربهینه	S_1	۱	۰	۱	۱	-۵	جدول ۲
و غیرموجه	x_2	۰	۱	۰	۱	۶	

سیمپلکس اوّلیه $\begin{cases} \text{ورودی: } x_1 \\ \text{خروجی: نداریم} \end{cases}$ → انجام روش سیمپلکس اوّلیه ممکن نیست

سیمپلکس ثانویه $\begin{cases} \text{خروجی: } S_1 \\ \text{ورودی: نداریم} \end{cases}$ → انجام روش سیمپلکس ثانویه ممکن نیست

چون جدول ۲ هنوز بهینه و موجه نشده است و حل آن با روش سیمپلکس اوّلیه یا ثانویه ممکن نیست مسأله بدون جواب موجه است.

حالت دوم: جواب بهینه‌ی چندگانه

اگر ضریب متغیّر غیر پایه‌ای در سطر Z جدول نهایی صفر باشد مسأله بیش از یک جواب بهینه دارد.

مثال ۱۲:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= -10x_1 - 4x_2 + 2x_3 \\ -\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 &\le 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\ge 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

حل:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z + 10x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 + S_1 &= 2 \\ -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + S_2 &= -8 \\ x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

جدول ۱ — غیربهینه و غیرموجه

پایه	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	RHS
Z	10	4	-2	0	0	0
S_1	$-\frac{1}{2}$	1	1	1	0	2
S_2	-2	-4	-2	0	1	-8

سیمپلکس اوّلیه $\begin{cases} \text{ورودی: } x_3 \\ \text{خروجی: } S_1 \end{cases}$ → اثر سیمپلکس اوّلیه $= \left|\frac{(-2)(2)}{1}\right| = 4$

سیمپلکس ثانویه $\begin{cases} \text{خروجی: } S_2 \\ \text{ورودی: } x_2 \end{cases}$ → اثر سیمپلکس ثانویه $= \left|\frac{(4)(-8)}{-4}\right| = 8$

چون اثر سیمپلکس ثانویه بیشتر است با استفاده از روش سیمپلکس ثانویه جدول را تکرار می‌نماییم:

جدول ۲ — غیربهینه و موجه

پایه	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	RHS
Z	8	0	-4	0	1	-8
S_1	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	2

سیمپلکس اوّلیه $\begin{cases} x_3 & \text{ورودی:} \\ S_1 & \text{خروجی:} \end{cases}$ $\rightarrow$ اثر سیمپلکس اوّلیه $= \left| \dfrac{(-4)(0)}{\frac{1}{2}} \right| = 0$

سیمپلکس ثانویه $\begin{cases} S_1 & \text{خروجی:} \\ x_1 & \text{ورودی:} \end{cases}$ $\rightarrow$ اثر سیمپلکس ثانویه $= \left| \dfrac{(8)(0)}{-1} \right| = 0$

با استفاده از سیمپلکس اوّلیه جدول را تکرار می‌کنیم:

	پایه	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	RHS	
	Z	۰	۰	۰	۸	۳	-۸	
بهینه	x_3	-۲	۰	۱	۲	$\frac{1}{2}$	۰	جدول ۳ (جدول نهایی)
و موجه	x_2	$\frac{3}{2}$	۱	۰	-۱	$-\frac{1}{2}$	۲	

جواب بهینه: $x_1^* = 0 \;,\; x_2^* = 2 \;,\; x_3^* = 0 \;,\; Z = -8$

چون ضریب متغیّر پایه‌ی x_1 در سطر Z جدول نهایی صفر است مسأله بیش از یک جواب بهینه دارد. این مسأله دارای حالت خاص بهینه‌ی تبهگن دائم نیز هست؛ زیرا در جدول نهایی مقدار متغیّر پایه‌ی x_3 مساوی صفر است.

حالت سوم: جواب بهینه‌ی نامحدود

اگر تمام اعداد ستون ورودی در روش سیمپلکس اوّلیه صفر یا منفی باشند مسأله دارای جواب بهینه‌ی نامحدود است.

مثال ۱۳:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 24x_1 - 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 5x_1 - x_2 \geq 42 \\ & 4x_1 - x_2 \leq 40 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

حل:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z - 24x_1 + 5x_2 &= 0 \\ \text{s.t.} \quad -5x_1 + x_2 + S_1 &= -42 \\ 4x_1 - x_2 + S_2 &= 40 \\ x_1, x_2, S_1, S_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

	پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS	
	Z	-۲۴	۵	۰	۰	۰	
غیربهینه	S_1	-۵	۱	۱	۰	-۴۲	جدول ۱
و غیرموجه	S_2	۴	-۱	۰	۱	۴۰	

سیمپلکس اوّلیه $\begin{cases} x_1 & \text{ورودی:} \\ S_2 & \text{خروجی:} \end{cases}$ $\rightarrow$ اثر سیمپلکس اوّلیه $= \left| \dfrac{(-24)(40)}{4} \right| = 240$

سیمپلکس ثانویه $\begin{cases} S_1 & \text{خروجی:} \\ \text{نداریم} & \text{ورودی:} \end{cases}$ $\rightarrow$ انجام روش سیمپلکس ثانویه ممکن نیست

با استفاده از سیمپلکس اوّلیه جدول را تکرار می‌کنیم:

جدول ۲

	پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
	Z	۰	۱-	۰	۶	۲۴۰
غیربهینه	S_1	۰	$-\frac{1}{4}$	۱	$\frac{5}{4}$	۸
و موجه	x_1	۱	$-\frac{1}{4}$	۰	$\frac{1}{4}$	۱۰

چون تمام اعداد ستون ورودی (ستون x_2)، در روش سیمپلکس اوّلیه منفی هستند مسأله دارای جواب بهینه نامحدود است.
یعنی داریم: $\text{Max } Z = \infty$

حالت چهارم: حالت تبهگن یا دژنره

اگر مقدار یکی از متغیّرهای پایه صفر باشد مسأله دارای حالت تبهگن است. در مثال ۱۲ مسأله دارای حالت تبهگن دائم و در مثال زیر مسأله دارای حالت تبهگن موقت است.

مثال ۱۴:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 15x_1 + 25x_2 \\ 5x_1 + 8x_2 &\geq 100 \\ x_1 + x_2 &\leq 20 \\ x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

حل:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z - 15x_1 - 25x_2 &= 0 \\ -5x_1 - 8x_2 + S_1 &= -100 \\ x_1 + x_2 + S_2 &= 20 \\ -x_1 + x_2 + S_3 &= 0 \\ x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

جدول ۱

	پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	RHS
	Z	۱۵-	۲۵-	۰	۰	۰	۰
غیربهینه و	S_1	۵-	۸-	۱	۰	۰	۱۰۰-
غیرموجه	S_2	۱	۱	۰	۱	۰	۲۰
	S_3	۱-	۱	۰	۰	۱	۰

سیمپلکس اوّلیه $\begin{cases} x_2 & \text{ورودی:} \\ S_3 & \text{خروجی:} \end{cases}$ $\rightarrow$ اثر سیمپلکس اوّلیه $= \left| \frac{(-25)(0)}{1} \right| = 0$

سیمپلکس ثانویه $\begin{cases} S_1 & \text{خروجی:} \\ \text{ورودی: نداریم} \end{cases}$ $\rightarrow$ انجام روش سیمپلکس ثانویه ممکن نیست

با استفاده از سیمپلکس اوّلیه جدول را تکرار می‌کنیم:

جدول ۲ (غیربهینه و غیرموجه)

پایه	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	RHS
Z	-۴۰	۰	۰	۰	۲۵	۰
$S_۱$	-۱۳	۰	۱	۰	۸	-۱۰۰
$S_۲$	۲	۰	۰	۱	-۱	۲۰
$x_۲$	-۱	۱	۰	۰	۱	۰

سیمپلکس اوّلیه $\begin{cases} x_۱ & \text{ورودی:} \\ S_۲ & \text{خروجی:} \end{cases}$ → اثر سیمپلکس اوّلیه $= \left|\frac{(-۴۰)(۲۰)}{۲}\right| = ۴۰۰$

سیمپلکس ثانویه $\begin{cases} S_۱ & \text{خروجی:} \\ & \text{ورودی: نداریم} \end{cases}$ → انجام روش سیمپلکس ثانویه ممکن نیست

با استفاده از سیمپلکس اوّلیه جدول را تکرار می‌کنیم:

جدول ۳ (جدول نهایی) (بهینه و موجه)

پایه	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	RHS
Z	۰	۰	۰	۲۰	۵	۴۰۰
$S_۱$	۰	۰	۱	$\frac{۱۳}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$	۳۰
$x_۱$	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۱۰
$x_۲$	۰	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۱۰

جواب بهینه: $x_۱^* = ۱۰۰ \ , \ x_۲^* = ۱۰ \ , \ Z^* = ۴۰۰$

این مسأله دارای حالت تبهگن موقت است زیرا در جدول ۲ مقدار متغیّر پایه‌ی $x_۲$ مساوی صفر است.

مسائل حل شده فصل اوّل

۱- مسأله زیر را با استفاده از روش محدودیّت مصنوعی حل کنید.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 15x_1 + 25x_2 \\ 4x_1 + 8x_2 &\geq 100 \\ x_1 + x_2 &\leq 20 \\ x_1 \ , \ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

حل:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z - 15x_1 - 25x_2 &= 0 \\ -4x_1 - 8x_2 + S_1 &= -100 \\ x_1 + x_2 + S_2 &= 20 \\ x_1 + x_2 + S_M &= M \\ x_1, x_2, S_1, S_2, S_M &\geq 0 \end{aligned}$$

	پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	S_M	RHS	
	Z	-۱۵	-۲۵	۰	۰	۰	۰	
غیربهینه و	S_1	-۴	-۸	۱	۰	۰	-۱۰۰	جدول ۱
غیرموجه	S_2	۱	۱	۰	۱	۰	۲۰	
	S_M	۱	۱	۰	۰	۱	M	
	Z	۱۰	۰	۰	۰	۲۵	$25M$	
بهینه و	S_1	۴	۰	۱	۰	۸	$8M-100$	جدول ۲
غیرموجه	S_2	۰	۰	۰	۱	-۱	$-M+20$	
	x_2	۱	۱	۰	۰	۱	M	
	Z	۱۰	۰	۰	۲۵	۰	۵۰۰	
بهینه و	S_1	۴	۰	۱	۸	۰	۶۰	جدول ۳
موجه	S_M	۰	۰	۰	-۱	۱	$M-20$	(جدول نهایی)
	x_2	۱	۱	۰	۱	۰	۲۰	

جواب بهینه مسأله به قرار زیر است:

$$x_1^* = 0 \ , \ x_2^* = 20 \ , \ Z^* = 500$$

۲- مسأله زیر را با استفاده از روش محدودیّت مصنوعی حل کنید.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= x_1 - 3x_2 \\ x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 &\geq 1 \\ 2x_1 - 2x_2 &\geq 3 \\ x_1 \ , \ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

حل:

$$\text{Max } Z - x_۱ + ۳x_۲ = ۰$$
$$x_۱ - x_۲ + S_۱ = ۲$$
$$-x_۱ - x_۲ + S_۲ = -۱$$
$$-۲x_۱ + ۲x_۲ + S_۳ = -۳$$
$$x_۱ + S_M = M$$
$$x_۱, x_۲, S_۱, S_۲, S_۳, S_M \geq ۰$$

	پایه	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	S_M	RHS	
	Z	-۱	۳	۰	۰	۰	۰	۰	
غیربهینه و	$S_۱$	۱	-۱	۱	۰	۰	۰	۲	جدول ۱
غیرموجه	$S_۲$	-۱	-۱	۰	۱	۰	۰	-۱	
	$S_۳$	-۲	۲	۰	۰	۱	۰	-۳	
	S_M	۱	۰	۰	۰	۰	۱	M	
	Z	۰	۳	۰	۰	۰	۱	M	
	$S_۱$	۰	-۱	۱	۰	۰	-۱	$-M+۲$	
بهینه و	$S_۲$	۰	-۱	۰	۱	۰	۱	$M-۱$	جدول ۲
غیرموجه	$S_۳$	۰	۲	۰	۰	۱	۲	$۲M-۳$	
	$x_۱$	۱	۰	۰	۰	۰	۱	M	
	Z	۰	۲	۱	۰	۰	۰	۲	
بهینه و	S_M	۰	۱	-۱	۰	۰	۱	$M-۲$	جدول ۳
موجه	$S_۲$	۰	-۲	۱	۱	۰	۰	۱	(جدول نهایی)
	$S_۳$	۰	۰	۲	۰	۱	۰	۱	
	$x_۱$	۱	-۱	۱	۰	۰	۰	۲	

جواب بهینه مسأله به قرار زیر است:
$$x_۱^* = ۲ \;,\; x_۲^* = ۰ \;,\; Z^* = ۲$$

۳- مسأله زیر را با استفاده از روش سیمپلکی اوّلیه ـ ثانویه حل کنید:

$$\text{Min } Z = ۴x_۱ - ۲x_۲ - ۴x_۳ + ۷x_۴$$
$$۲x_۱ + ۴x_۲ + ۲x_۳ + ۶x_۴ \leq ۳۸$$
$$۲x_۲ - ۴x_۴ \geq ۱۲$$
$$x_۱, x_۲, x_۳, x_۴ \geq ۰$$

حل:

$$\text{Max}(-Z) = -۴x_۱ + ۲x_۲ + ۴x_۳ - ۷x_۴ \quad \rightarrow \quad \text{Max}(-Z) + ۴x_۱ - ۲x_۲ - ۴x_۳ + ۷x_۴ = ۰$$
$$۲x_۱ + ۴x_۲ + ۲x_۳ + ۶x_۴ + S_۱ = ۳۸$$
$$-۲x_۲ + ۴x_۴ + S_۲ = -۱۲$$

تمام متغیّرها ≥ 0

جدول ۱

	پایه	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	RHS
	$-Z$	۴	−۲	−۴	۷	۰	۰	۰
غیربهینه و	S_1	۲	۴	۲	۶	۱	۰	۳۸
غیرموجه	S_2	۰	−۲	۰	۴	۰	۱	−۱۲

سیمپلکس اوّلیه $\begin{cases} x_3 & \text{ورودی:} \\ S_1 & \text{خروجی:} \end{cases}$ $\rightarrow$ اثر سیمپلکس اوّلیه$=\left|\frac{(-4)(38)}{2}\right|=76$

سیمپلکس ثانویه $\begin{cases} S_2 & \text{خروجی:} \\ \text{ورودی: نداریم} \end{cases}$ $\rightarrow$ انجام روش سیمپلکس ثانویه ممکن نیست

با استفاده از سیمپلکس اوّلیه جدول را تکرار می‌کنیم:

جدول ۲

	پایه	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	RHS
	$-Z$	۸	۶	۰	۱۹	۲	۰	۷۶
بهینه و	x_3	۱	۲	۱	۳	$\frac{1}{2}$	۰	۱۹
غیرموجه	S_2	۰	−۲	۰	۴	۰	۱	−۱۲

سیمپلکس اوّلیه $\begin{cases} \text{ورودی: نداریم} \\ - & \text{خروجی:} \end{cases}$ $\rightarrow$ انجام روش سیمپلکس اوّلیه ممکن نیست.

سیمپلکس ثانویه $\begin{cases} S_2 & \text{خروجی:} \\ x_2 & \text{ورودی:} \end{cases}$ $\rightarrow$ اثر سیمپلکس ثانویه$=\left|\frac{(6)(-12)}{-2}\right|=36$

با استفاده از سیمپلکس ثانویه جدول را تکرار می‌کنیم:

جدول ۳ (جدول نهایی)

	پایه	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	RHS
	$-Z$	۸	۰	۰	۳۱	۲	۳	۴۰
بهینه و	x_3	۱	۰	۱	۷	$\frac{1}{2}$	۱	۷
موجه	x_2	۰	۱	۰	−۲	۰	$-\frac{1}{2}$	۶

جواب بهینه: $x_1^*=0 \quad , \quad x_2^*=6 \quad , \quad x_3^*=7 \quad , \quad x_4^*=0 \quad , \quad Z^*=-40$