تحقیق در عملیات

۱ و ۲

مجموعه مهندسی صنایع

مؤلف: نگار گلچین خیابانی آذر

سری کتاب‌های کمک آموزشی کارشناسی ارشد

گلچین خیابانی آذر/نگار

تحقیق در عملیات ۱ و ۲ رشته مهندسی صنایع/ نگار گلچین خیابانی آذر

مشاوران صعود ماهان، ۱۴۰۱

۳۵۵ ص: جدول، نمودار (آمادگی آزمون کارشناسی ارشد مهندسی صنایع)

ISBN: 978-600-458-843-0

فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.

فارسی ـ چاپ اول.

۱- تحقیق در عملیات ۱ و ۲   ۲- آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی)

۳- آزمون دوره‌های تحصیلات تکمیلی،   ٤- دانشگاه‌ها و مدارس عالی – ایران – آزمون‌ها

٤ط۷۲ش/LB۲۳۵۳

رده‌بندی دیویی: ۳۷۸/۱٦٦٤

شماره کتابشناسی ملی: ۸۵/٤۱۰۷۲ م

نام کتاب: تحقیق در عملیات ۱ و ۲

مولف: نگار گلچین خیابانی آذر

ناشر: مشاوران صعود ماهان

نوبت و تاریخ چاپ: اول / ۱۴۰۱

تیراژ: ۱۰۰۰ نسخه

قیمت: ۲/۶۹۰/۰۰۰ ریال

شابک: ISBN ۹۷۸-۶۰۰-۴۵۸-۸۴۳-۰

انتشـــارات مشاوران صعود ماهان، سهروردی شمالی،میرزازینالی شرقی – پلاک ۵۱

تلفن: ۸۸٤۰٤۰۱۳

مقدمه ناشر

آیا آنانکه می‌دانند با آنانکه نمی‌دانند برابرند؟ (قرآن کریم)

پس از حمد و سپاس و ستایش به درگاه بی همتای احدیت و درود بر محمد مصطفی، عالی نمونـه بـشریت کـه در تاریـک دور تاریخ، بنا به فرمان نافذ صمدیت از میان مردمی برخاست که خود بودند در پست‌ترین حـد تـوحش و ضـلال و بربریـت و آنگـاه بـا قوانین شامل خویش هم ایشان را راهبری نمود و رهانید از بدویت و استعانت جوییم از قـرآن کـریم، کتـابی کـه هـست جاودانـه و بی‌نقص تا ابدیت.

کتابی که در دست دارید آخرین ویرایش از مجموعه کتب خودآموز مؤسسه آموزش عالی آزاد ماهان است که برمبنـای خلاصـه درس و تأکید بر نکات مهم و کلیدی و تنوع پرسش‌های چهارگزینه‌ای جمع‌آوری شده است. در این ویرایش ضمن توجه کامـل بـه آخرین تغییرات در سرفصل‌های تعیین شده جهت آزمون‌های ارشد تلاش گردیده است که مطالب از منابع مختلـف معتبـر و مـورد تأکید طراحان ارشد با ذکر مثال‌های متعدد بصورت پرسش‌های چهار گزینه‌ای با کلید و در صورت لزوم تشریح کامل ارائه گردد تـا دانشجویان گرامی را از مراجعه به سایر منابع مشابه بی نیاز نماید.

لازم به ذکر است شرکت در آزمون‌های آزمایشی ماهان که در جامعه آماری گسترده و در سطح کشور برگزار می‌گردد می‌توانـد محک جدی برای عزیزان دانشجو باشد تا نقاط ضعف احتمالی خود را بیابند و با مرور مجدد مطالب این کتاب، آنها را برطرف سازند که تجربه سال‌های مختلف موکد این مسیر به عنوان مطمئن‌ترین راه برای موفقیت می‌باشد.

لازم به ذکر است از پورتال ماهان به آدرس www.mahanportal.ir می‌توانید خدمات پشتیبانی را دریافت دارید.

و نیز بر خود می‌بالیم که همه ساله میزان تطبیق مطالب این کتاب با سؤالات آزمون‌های ارشد- که از شاخصه‌های مهم ارزیابی کیفی این کتاب‌ها می‌باشد- ما را در محضر شما سربلند می‌نماید.

در خاتمه بر خود واجب می‌دانیم که از همه اساتید بزرگوار و دانشجویان ارجمند از سراسر کشور و حتی خارج از کشور و همـه همکاران گرامی که با ارائه نقطه نظرات سازنده خود ما را در پربارتر کردن ویرایش جدید این کتاب یاری نمودند سپاسگزاری نموده و به پاس تلاش‌های بی چشمداشت، این کتاب را به محضرشان تقدیم نماییم.

مؤسسه آموزش عالی آزاد ماهان

معاونت آموزش

فهرست مطالب

عنوان | **صفحه**

بخش اول

تحقیق در عملیات ۱

عناوین اصلی

- مفاهیم و مدل‌سازی
- روش سیمپلکس
- دوگان مسائل برنامه‌ریزی خطی و تحلیل حساسیت
- حمل و نقل و تخصیص
- تحلیل شبکه

فصل اول

مفاهیم و مدل‌سازی

عناوین اصلی

- مدل‌سازی
- برنامه‌ریزی خطی
- مفاهیم اولیه

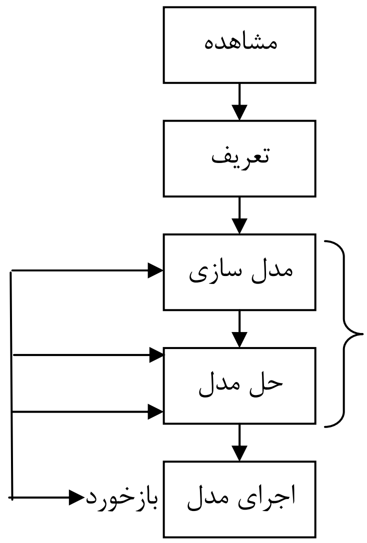
فصل اول

مفاهیم و مدل‌سازی

۱-۱- مفاهیم مدل سازی

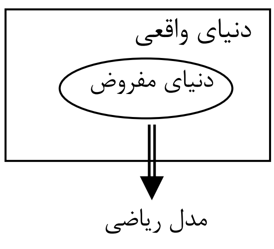
پژوهش عملیاتی

پژوهش عملیاتی در واقع کاربرد نگرش‌های علمی در حل مسائلی است که هدف آنها، اتخاذ بهترین تصمیمات در سیستم‌های واقعی است. فرایند پژوهش عملیاتی، بطور خلاصه بصورت شکل زیر است:



پس از مشاهده وجود مشکل در سیستم، باید مساله بصورت کامل و دقیق تعریف شود تا نتایج حاصل از حل آن مناسب و کارا باشند. هدف از حل مساله نیز باید بصورت دقیق و روشن تعریف شود.

برای بیان وضعیت سیستم از مدل استفاده می‌شود. در واقع هدف، تبدیل سیستم واقعی مورد بحث به یک مدل ریاضی است. در این مرحله باید در مورد پارامترهای در نظر گرفته شده در مدل، تصمیم گرفته شود و سپس پارامترهای کیفی مورد نظر به پارامترهای کمی تبدیل شوند مفروضاتی که در مورد سیستم واقعی، برای ساخت مدل در نظر گرفته می‌شوند. بر کیفیت‌های حاصل تأثیر بسیاری خواهند داشت.



برخی از عناصر سیستم واقعی که در مدل ریاضی در نظر گرفته می‌شوند، مشخص و معلوم هستند. این عناصر پارامترهای مدل هستند. سایر عناصر مدل که هدف از حل مساله، تعیین مقدار بهینه آنهاست، متغیرهای تصمیم‌گیری نام دارند. مدل ریاضی از دو بخش اصلی تشکیل شده است.

۱-تابع هدف objective function: هدف اصلی حل مساله است که در قالب تابعی از متغیرهای تصمیم‌گیری بیان می‌شود.
در سیستم‌های واقعی معمولاً اهداف بصورت حداقل کردن هزینه‌ها، ضایعات، اوقات بیکاری و .... و یا حداکثر سازی سود، کارایی، بهره‌وری و ... مطرح است.

۲-محدودیت‌ها (constraints) : محدودیت‌ها و امکانات مختلف سیستم واقعی را بصورت توابعی از متغیرهای تصمیم‌گیری بیان می‌کنند. به عنوان مثال محدودیت‌های موجود در منابع، محدودیت زمان و ... در محدودیت‌های مساله بیان می‌شوند.

در بحث برنامه‌ریزی خطی، تنها مدل‌هایی مورد بررسی قرار می‌گیرند که توابع مطرح شده در تابع هدف و محدودیت‌ها، توابعی خطی از متغیرهای تصمیم‌گیری باشند. بنابراین ساختار کلی مدل مورد بررسی به شکل زیر خواهد بود.
مدل کلی برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&(\text{Max یا Min}) \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le \text{ یا } = \text{ یا } \ge b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le \text{ یا } = \text{ یا } \ge b_2 \\
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le \text{ یا } = \text{ یا } \ge b_m \\
&x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0 \text{ یا } \le 0 \text{ یا نامقید}
\end{aligned}$$

و یا به شکل خلاصه

$$(\text{Max یا Min}) \quad] = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$S.t \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le \text{ یا } = \text{ یا } \ge b_i \qquad i = 1,\ldots,m$$

$$x_j \ge 0 \text{ یا } \le 0 \text{ یا } \text{نامقید} \qquad j = 1,\ldots,n$$

این مسئله nمتغیر و m محدودیت دارد.

$$\begin{aligned}
&(\text{Max یا Min}) \quad Z = Cx \\
&\text{S.t} \quad Ax \le \text{ یا } \ge \text{ یا } = b \\
&x \ge 0 \text{ یا } \le 0 \text{ یا نامقید}
\end{aligned}$$

و فرم ماتریسی به صورت زیر می‌باشد.
که در آن

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix} , \quad \begin{aligned} C &= (c_1, c_2, \ldots, c_n) \\ x^t &= (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t \\ b^t &= (b_1, b_2, \ldots, b_n)^t \end{aligned}$$

تعریف پارامترها و متغیرها:

Z : نشاندهنده ارزش تابع هدف (یا تابع معیار) است، که مقدار آن پس از حل مدل مشخص می‌شود.

x_j : متغیر تصمیم یا سطوح فعالیت نامیده می‌شوند، که باید مشخص شوند.

c_j: ضرایب تابع هدف که نشاندهنده ارزش هر واحد فعالیت (محصول یا خدمت) در تابع هدف می‌باش. این ضریب در معادله معلوم است.

a_{ij} : ضرایب فنی هستند و در واقع مقداری از منبع i ام می‌باشند که برای انجام فعالیت j ام به کار رفته و عددی معلوم در معادله هستند.

b_i : مقادیر معلوم سمت راست هستند که موجودی منابع یا سقف تقاضا را بیان می‌دارد.

هر مدل ریاضی دارای دو شکل استاندارد و متعارفی (کانونیک) به شرح جدول زیر می‌باشد.

	مساله مینیمم سازی	مساله ماکزیمم سازی
شکل استاندارد	$Min\ \ Z = Cx$ $s.t:\ \ Ax = b$ $x \geq 0$	$Max\ \ Z = Cx$ $s.t:\ \ Ax = b$ $x \geq 0$
شکل متعارفی (کانونی)	$Min\ \ Z = Cx$ $s.t:\ \ Ax \geq b$ $x \geq 0$	$Max\ \ Z = Cx$ $s.t:\ \ Ax \leq b$ $x \geq 0$

۱-۱-۱- فرضیات برنامه‌ریزی خطی

برای اینکه بتوان یک مساله را در دسته مسائل برنامه‌ریزی خطی در نظر گرفت باید چهار فرض اصلی برقرار باشند:

۱-تناسب: طبق این فرض، متغیرهای تصمیم‌گیری باید مستقل از هم قرار بگیرند، تابع هدف متناسب با متغیرهای تصمیم‌گیری کاهش یا افزایش یابد و منابع نیز متناسب با متغیرهای تصمیم‌گیری مصرف شوند. به عبارت ساده‌تر، بنابر فرض تناسب در مدل برنامه‌ریزی خطی، تخفیف، صرفه‌جویی، هزینه اولیه و .....وجود ندارد.

نکته: نتایج حاصل از فرض تناسب به شرح زیر می‌باشد:

- تابع هدف و محدودیتها خطی می‌باشند.
- همه متغیرها توان اول می‌باشند.

۲-جمع‌پذیری: تابع هدف و محدودیت‌ها از مجموع تک تک متغیرها حاصل می‌شود. به بیان دیگر تاثیرات جایگزینی یا متقابل بین فعالیت‌ها وجود ندارد.

نکته: نتایج حاصل از فرض جمع پذیری:

- متغیرها مستقل از یکدیگرند یعنی در هم ضرب (x_1x_2) یا بر هم تقسیم $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$ نشده‌اند.
- مصرف کلی هر یک از منابع برابر حجم تک تک معرف متغیرهاست.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

نکته: اصطلاحاً به فرض‌های تناسب و جمع پذیری، فرض‌های خطی می‌گوییم یعنی این دو فرض باعث خطی بودن مساله می‌باشند.

۳- تقسیم‌پذیری: طبق این فرض، متغیرهای تصمیم‌گیری می‌توانند هر مقداری را در محدوده تعریف شده، اختیار کنند، به عبارت دیگر، دامنه تغییرات متغیرهای تصمیم‌گیری، پیوسته فرض می‌شود.

نکته: پیوسته بودن ناحیه شدنی، مساله برنامه‌ریزی خطی از نتایج این فرض است.

۴- قطعیت (معین بودن): طبق این فرض، تمام عناصر ماتریس‌های b,A,C ، مشخص و قطعی هستند. (در موارد عملی، در صورت نامشخص بودن هر پارامتر از تخمین آن استفاده می‌شود.)

با استفاده از تبدیلات مقدماتی به شرح زیر، می‌توان شکل مسائل را به صورت دلخواه تغییر داد بدون اینکه در ماهیت مساله تغییری حاصل شود.

۱-۱-۲- تبدیلات مدل برنامه‌ریزی خطی

۱- تبدیل تابع هدف:

در هر مساله برنامه‌ریزی خطی می‌توان تابع هدف Min سازی را به شکل Max سازی در آورد بالعکس:

$$Max C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n = -Min - C_1x_1 - ... - C_nx_n$$

این دو تابع هدف معادل هستند. توجه داشته باشید ماهیت ضریب دو منفی با هم فرق می‌کند، منفی اول روش را عوض می‌کند و منفی دوم مقدار دو تابع هدف را با هم مساوی می‌کند. (منظور از منفی اول ضرایب C_i هستند)

۲- تغییر جهت نامعادلات:

با ضرب دو طرف I معادله در (۱-) می‌توان جهت نامساوی را عوض کرد:

$$Ax \le b \rightarrow -Ax \ge -b$$

۳- تبدیلات معادله به نامعادله

هر معادله را می‌توان بصورت اشتراک دو نامعادله نشان داد:

$$Ax = b \rightarrow \begin{cases} Ax \le b \\ Ax \ge b \end{cases}$$

۴- تبدیل نامعادله به معادله:

با افزودن یا کاستن مقداری از سمت چپ یک نامعادله را می‌توان آن را به معادله تبدیل کرد:

$$Ax \le b \rightarrow Ax + S = b \quad (S \ge 0)$$

$$Ax \ge b \rightarrow Ax - S = b \quad (S \ge 0)$$

از این تبدیل برای تغییر شکل مساله از حالت کانونیک به شکل استاندارد استفاده می‌شود و به متغیر S متغیر کمکی گفته می‌شود.

۵- مقید کردن متغیرهای آزاد (نامقید):

با تعریف دو متغیر مقید جدید به ازای هر متغیر نامقید، می‌توان متغیرهای آزاد را به صورت مقید درآورد.

x_i: نامقید است. در تمام توابع به جای آن، مقدار معادل آنرا قرار می‌دهیم:

$$x_j = x'_j - x''_j$$

$$x'_j, x''_j \ge 0$$

نکته: اگر $x_1, x_2, ... x_n$ متغیرهای آزاد در علامت باشند می‌توان با معرفی متغیر اضافی x'' متغیرهای غیر منفی ایجاد نمود.

$$x_j = x'_j - x''$$

که در آن $x'' = Max\{x''_j : x''_j \ge 0\}$ را جایگزاری کرده‌ایم.

نکته: اگر مسئله‌ای دارای n متغیر آزاد در علامت باشد. این مسئله حداقل با n+1 متغیر غیرمنفی قابل حل می‌باشد.

$$x_j \le 0 \Rightarrow -x_j = x'_j, \quad x'_j \ge 0$$

اگر $x_j \le u_j \Rightarrow u_j - x'_j = x'_j, \quad x'_j \ge 0$

$$x_j \ge l_j \Rightarrow x_j - l_j = x'_j, \quad x'_j \ge 0$$

نکته: در $x_j = x'_j - x''_j$ حداکثر یکی از متغیرهای x'_j یا x''_j دارای مقداری مثبت است. (هر دو با هم می‌توانند صفر باشند.)

نکته: همواره به دلیل وابستگی خطی بین x'_j و x''_j (دو ستون موازی ضرایب) هیچگاه این دو متغیر نمی‌توانند با هم در یک پایه باشند.

۶- حذف قدر مطلق:

۶-۱- $|x_j| = x'_j + x''_j \qquad x'_j, x''_j \geq 0$

۶-۲- $|a_1x_1 + a_2x_2| \leq b \rightarrow \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 \leq b \\ a_1x_1 + a_2x_2 \geq -b \end{cases}$

۶-۳- $|a_1x_1 + a_2x_2| \geq b \rightarrow \begin{cases} |y| \geq b \\ y = a_1x_1 + a_2x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} y' + y'' \geq b \\ y' - y'' = a_1x_1 + a_2x_2 \end{matrix}$

۷- تبدیل تابع هدف مرکب به تابع هدف ساده:

با تغییر متغیر می‌توان تابع هدف مرکب را به ساده تبدیل نمود.

$$\text{Min Max}\{c_1x_1 + c_2x_2 + c'_1x_1 + c'_2x_2\}$$
$$\rightarrow \text{Min } y \qquad y = \max\{c_1x_1 + c_2x_2, c'_1x_1 + c'_2x_2\}$$
$$\text{St}: \ y \geq c_1x_1 + c_2x_2$$
$$y \geq c'_1x_1 + c'_2x_2$$

نکات مهم تحلیل حساسیت

۱- در مساله $\begin{cases} Min \quad Cx \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$، اگر یکی از مولفه‌های b را به اندازه یک واحد افـزایش دهـیم $(b_i \rightarrow b_i + 1)$، آنگـاه ناحیـه شـدنی کوچکتر خواهد شد و مقدار تابع هدف بهتر نخواهد شد.

۲- در مساله $\begin{cases} Min \quad Cx \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$، اگر یکی از مولفه‌های b را به اندازه یک واحد افزایش دهیم $(b_i \rightarrow b_i + 1)$، ناحیه شـدنی بزرگتـر خواهد شد و مقدارتابع هدف بدتر نخواهد شد.

۳- مساله $\begin{cases} Min \ (Max) \ Cx \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ موقعی دارای جواب شدنی است که b ترکیب خطی مثبتی از بردارهای ستونی a_i باشد.

۴- اگر قیدی به مساله اضافه کنیم، ناحیه شدنی بزرگتر نخواهد شد و جواب بهینه بهتر نمی‌شود.

(منظور از بهتر شدن همان کوچکتر شدن درمساله Min سازی و بزرگتر شدن در مساله max سازی است)

۵- اگر قیدی از مساله حذف شود، ناحیه شدنی کوچکتر و جواب بهینه بدتر نمی‌شود.

(منظور از بدترشدن جواب بهینه همان کوچکتر شدن در مساله Max سازی و بزرگتر شدن در مساله min سازی است)

۶- اگر متغیری به مساله اضافه کنیم، فضای شدنی کوچکتر و جواب بهینه بدتر نمی‌شود.

۷- اگر متغیری از مساله حذف کنیم، فضای شدنی بزرگتر و جواب بهینه بهتر نمی‌شود.

۲-۱- روش‌های حل ترسیمی مدل برنامه‌ریزی خطی

برای حل مدل برنامه‌ریزی خطی روش‌های مختلفی وجود دارد که می‌توان آنها را در دو گروه ترسیمی و ریاضی دسته‌بندی کرد.

- روش‌های حل مدل برنامه‌ریزی خطی
  - روش‌های ترسیمی
    - ۱- امتحان نقاط رأسی
    - ۲- حرکت دادن تابع هدف
    - ۳- ترسیم بردار گرادیان محدودیت‌های گذرنده از هر نقطه رأسی
  - روش‌های ریاضی
    - ۱- روش جبری
    - ۲- روش سیمپلکس

در ادامهٔ این فصل به بررسی روش‌های ترسیمی حل مدل‌های برنامه‌ریزی خطی خواهیم پرداخت، این روش تنها زمانی که مسئله دو متغیر دارد، کاربرد دارد. اما پیش از آن به چند تعریف و نکته مورد استفاده در روش‌ها می‌پردازیم.

تعاریف:

۱- جواب موجه (شدنی): جوابی که در تمام محدودیت‌ها صدق کند.

۲- منطقه موجه (ناحیه شدنی): مجموعه جوابهای موجه (شدنی) منطقه موجه را بوجود می‌آورد.

۳- جواب گوشه (پایه- اساس): مقادیر تخصیص داده شده به متغیرهای تصمیم ناشی از تقاطع معادلات حدی جواب گوشه حاصل می‌گردد.

۴- جواب بهینه: جوابی موجه که به ازا آن تابع هدف به بهترین وضعیت در آید.

۵- تعریف گرادیان یک بردار:

$$A = a_1x_1 + a_2x + \ldots + a_nx_n$$

$$\nabla A = \left(\frac{\partial A}{\partial x_1}, \frac{\partial A}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial A}{\partial x_n}\right)$$

بنابراین اگر تابع خطی باشد، بردار گرادیان آن همان بردار ضرایبش خواهد بود.

هر تابع با حرکت در جهت گرادیانش بیشترین افزایش و با حرکت در خلاف جهت گرادیانش بیشترین کاهش را خواهد داشت.

مقایسهٔ بردارها :

اگر A و B دو بردار باشند و هر مؤلفهٔ A از مؤلفهٔ نظیرش در B کوچکتر باشد آنگاه گفته می‌شود بردار A از بردار B کوچکتر است و بالعکس.

قدم‌های حل ترسیمی:

قدم اول: رسم معادلات حدی هر محدودیت (با تبدیل نامساوی‌ها به مساوی)

قدم دوم: مشخص کردن منطقه مورد قبول هر معادله حدی (یک نقطه دلخواه معمولا (۰,۰) انتخاب و در نامعادله قرار دهید اگر در نامعادله صدق کرد، منطقه مورد قبول همان سمت نقطه دلخواه است در غیر این صورت سمت دیگر منطقه مورد قبول است).

قدم سوم: تعیین منطقه موجه (فصل مشترک محدودیت‌ها)

در قدم بعدی می‌توان از یکی از سه روش زیر استفاده نمود، تا به نقطه بهینه دست یابیم.

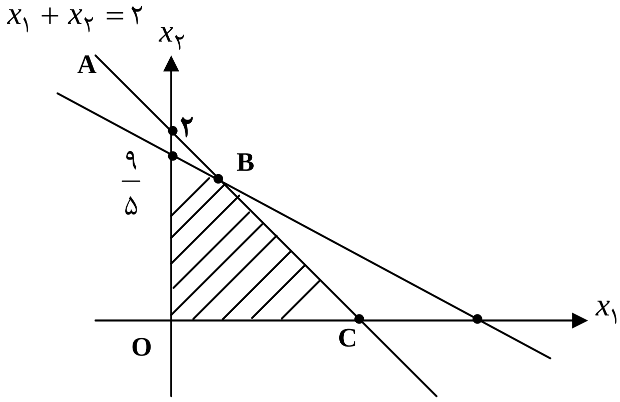
روش اول: امتحان نقاط گوشه‌ای

قضیه : اگر جواب بهینه وجود داشته باشد، آنگاه نقطهٔ گوشه‌ای (رأسی) بهینه هم وجود دارد. اگر بتوانیم ناحیه شدنی را رسم کنیم و مختصات نقاط گوشه‌ای را بدست آوریم طبق قضیهٔ فوق با امتحان آنها می‌توانیم نقطه بهینه را پیدا کنیم.

این روش تنها زمانی معتبر است که ناحیه شدنی کراندار باشد.

مثال ۱ :

$$\begin{aligned}&\text{Max } Z = ۲x_۱ + ۳x_۲\\&\text{S.t}: x_۱ + x_۲ \le ۲\\&\quad ۳x_۱ + ۵x_۲ \le ۹\\&\quad x_۱, x_۲ \ge ۰\end{aligned}$$



نقاط راسی $= \{O, A, B, C\} \Rightarrow Z^* ۵/۵$

$$O = \begin{vmatrix} ۰ \\ ۰ \end{vmatrix} \quad Z_O = ۰ \qquad B = \begin{vmatrix} \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۳} \end{vmatrix} \quad Z_B = \frac{۱۱}{۲} = ۵/۵$$

$$A = \begin{vmatrix} ۰ \\ \frac{۹}{۵} \end{vmatrix} \quad Z_A = ۵/۴ \qquad C = \begin{vmatrix} ۲ \\ ۰ \end{vmatrix} \quad Z_c = ۴$$

روش دوم: حرکت تابع هدف

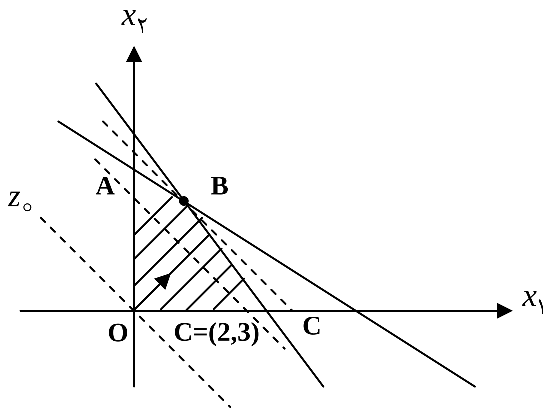
بعد از رسم ناحیه شدنی و مشخص کردن وضعیت تابع هدف، آنرا در جهتی که بیشترین مطلوبیت را حاصل کند حرکت می‌دهیم. یعنی :

- اگر تابع هدف از نوع Min سازی باشد، در خلاف جهت گرادیان (بیشترین کاهش)
- اگر تابع هدف از نوع Max سازی باشد، در جهت بردار گرادیان (بیشترین افزایش)

آخرین نقطه‌ای که در آن تابع هدف با ناحیه شدنی در اشتراک است، همان نقطهٔ بهینه است.

مثال ۲ :

$$\begin{aligned}&\text{Max } Z = ۲x_۱ + ۳x_۲\\&\text{S.t}: \quad x_۱ + x_۲ \le ۲\\&\qquad ۳x_۱ + ۶x_۲ \le ۹\\&\qquad x_۱, x_۲ \ge ۰\end{aligned}$$

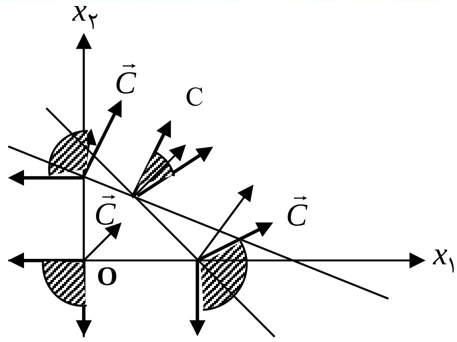


روش سوم: رسم بردار گرادیان محدودیت‌های گذرنده از نقاط گوشه‌ای :

پس از رسم ناحیهٔ شدنی، در تمام نقاط گوشه‌ای، بردار گرادیان محدودیت‌ها را رسم می‌کنیم. در صورتیکه تابع هدف از نوع Max سازی باشد، بردار C و در غیر اینصورت بردار (C-) را نیز در تمام گوشه‌ها رسم می‌کنیم. نقطه یا نقاطی که در آنها بردار C و یا (C-) درون مخروط حاصل از بردارهای گرادیان محدودیت‌ها باشد، نقاط بهینه هستند.

مثال ۳ :

$$\text{Max } Z = ۲x_۱ + ۳x_۲$$
$$\text{S.t}: \quad x_۱ + x_۲ \le ۲$$
$$۳x_۱ + ۶x_۲ \le ۹$$
$$x_۱ , x_۲ \ge ۰$$



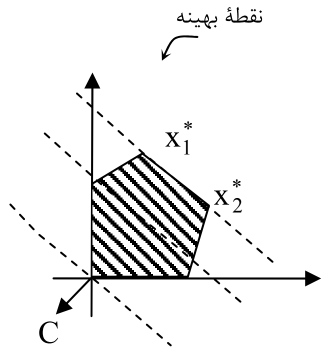
در حل ترسیمی مساله ممکن است به یکی از حالات زیر برخورد کنیم.

۱)جواب بهینه متناهی منحصر به فرد. در این حالت نقطه بهینه یکتاست و مجموعه نقاط بهینه تک عضوی است.

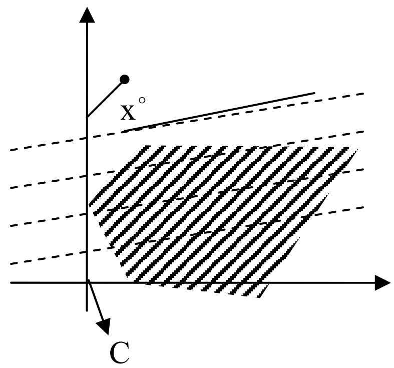
۲) جواب بهینه چندگانه متناهی. اگر تابع هدف موازی یکی از محدودیتهایی باشد که نقطه بهینه روی آن قرار دارد. جواب بهینه چندگانه داریم.

نکته: در فضای دو بعدی شرط لازم جواب بهینه چند گانه، موازی تابع هدف با یکی از محدودیت‌هاست.

نکته: در برنامه‌ریزی خطی اگر بیش از یک نقطه بهینه وجود داشته باشد، حتما بی نهایت نقطه بهینه وجود دارد.



(شکل ۱-۱)



(شکل ۲-۱)

۳) جواب بهینه نامتناهی. در این حالت اگر مسئله $\min$ سازی باشد، جواب بهینه $(-\infty)$ و اگر Max سازی باشد جواب بهینه $(+\infty)$ خواهد بود.

نکته : شرط لازم برای جواب بهینه نامتناهی (بی کران)، ناحیه شدنی بی کران است.

۴) ناحیه شدنی تهی است. هرگاه محدودیتهای یک مسئله برنامه‌ریزی خطی با هم اشتراک نداشته باشند، ناحیه شدنی تهی است. بنابراین مسئله جواب بهینه ندارد.

تست: اگر مقدار تابع هدف در بهینگی متناهی باشد، آنگاه:

۱) ناحیه شدنی حتما متناهی است.

۲) تمام مقادیر x^* متناهی می‌باشند.

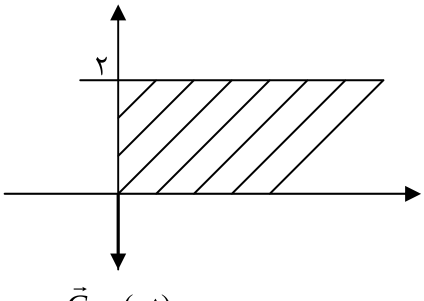
۳) x^* می‌تواند دارای مقادیر نامحدود باشد.

۴) ناحیه شدنی حتما نامتناهی است.

پاسخ: گزینه ۳ صحیح است.

برای تشریح، مثال نقضی برای گزینه در این جا آورده شده در نمودار مقابل که معادله حدی x=2 رسم شده ناحیه موجه بی کران است. و چون مسئله min سازی است با حرکت در خلاف جهت C نهایتا بر روی خط x=2 قرار می‌گیریم، که تمام نقاط این خط بهینه هستند و از جمله جواب‌های بهینه می‌توان به $x^* = (+\infty, ۲)$ اشاره نمود. پس x^* می‌تواند دارای مقادیر نامحدود باشد.

$$\min Z = -x_۲$$



(شکل ۳-۱)

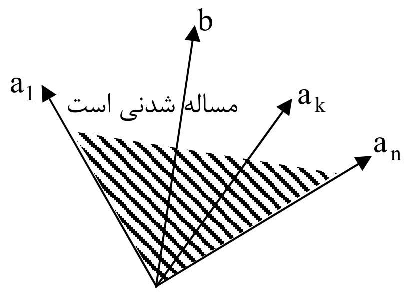
فضای احتیاج (ایجاب) :

اگر تعداد متغیرهای مسئله بیشتر از ۲ باشد نمی‌توانید مسئله را با استفاده از روش ترسیمی حل کنید. در این صورت برای تشخیص شدنی بودن ناحیه یک مسئله برنامه‌ریزی خطی، می‌توان از رسم فضای احتیاج آن استفاده کرد. حال مسئله را در دستگاههای مختلف بررسی می‌کنیم :

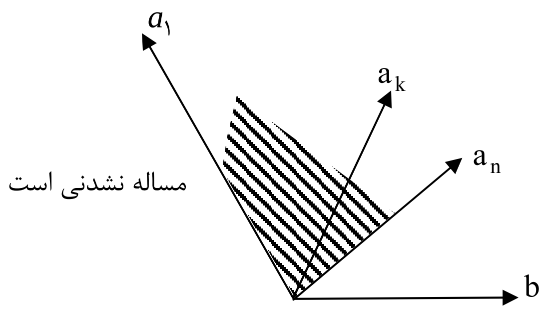
$$1)\, Ax = b$$
$$x \geq 0$$

اگر ستون‌های ماتریس A را به ترتیب $a_n,\ldots,a_2,a_1$ نامگذاری کنیم، داریم :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$



(شکل ۴-۱)



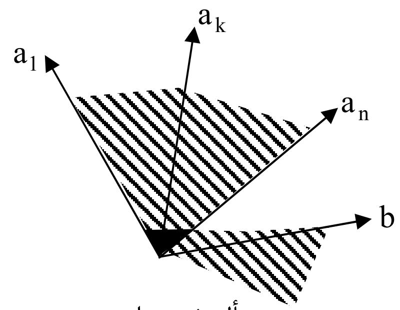
(شکل ۵-۱)

ابتدا بردارهای $a_n,\ldots,a_1$ را درون فضای مورد نظر رسم می‌کنیم. از ترکیب خطی این بردارها یک مخروط حاصل می‌شود. اگر بردار b درون مخروط قرار گرفت مسئله شدنی است ولی اگر بردار b خارج از مخروط افتاد، مسئله ناحیه شدنی ندارد. (مطابق شکل زیر)

$$2)\, Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

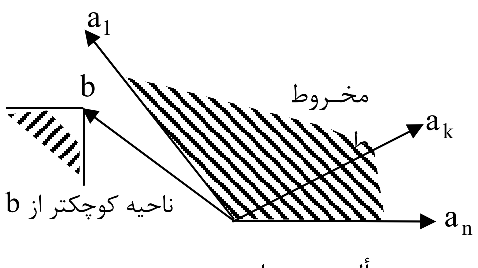
مخروط حاصل از بردارهای $a_n,\ldots,a_2,a_1$ را رسم می‌کنیم.

پس از رسم بردار b، اگر ناحیه کوچکتر از بردار b با مخروط فوق اشتراک داشت، مسئله شدنی است. (مطابق شکل)



مسأله شدنی است.

(شکل ۷-۱)

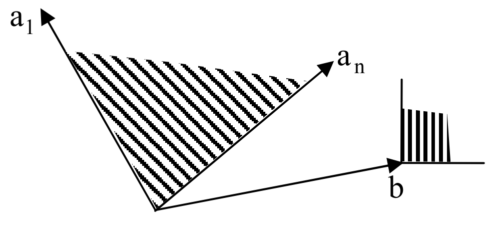


مسأله نشدنی است.

(شکل ۶-۱)

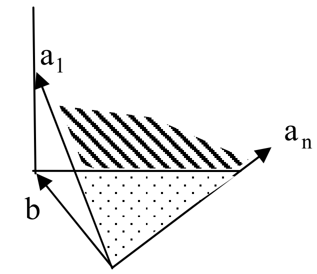
$$3)\quad \begin{aligned} Ax &\geq b \\ x &\geq \circ \end{aligned}$$

در این حالت اگر مخروط حاصل از بردارهای $a_1,\dots,a_n$ با ناحیه بزرگتر از بردار b اشتراک داشت مساله شدنی است. (مطابق شکل)



مسأله نشدنی است.

(شکل ۹-۱)



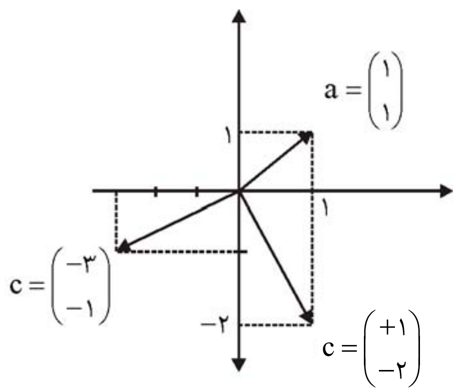
مسأله شدنی است.

(شکل ۸-۱)

۳-۱- جبر خطی

بردارها

یک n بردار، درایه‌ای سطری یا ستونی از n عضو است. بردارها x را با حروف کوچک نشان می‌دهند. هر بردار را می‌توان به صورت یک جهت از مبدأ به یک نقطه با یک جهت از مبدأ به آن نقطه نشان داد. مختصات این نقطه همان درایه‌های بردار است. به مثال توجه کنید:



بردارهای خاص

بردار صفر

بردار مبدأ یا بردار صفر، برداری است که تمام مؤلفه‌هایش صفر باشد.

بردار واحد iام

به برداری که تمام مؤلفه‌هایش صفر باشند و جز مؤلفهٔ iام، که برابر با ۱ است، بردار واحد iام گفته می‌شود.

بردار مجموع

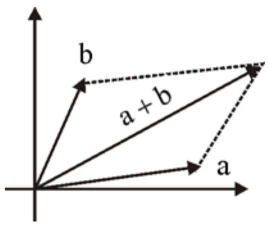
برداری است که تمام مؤلفه‌های آن یک هستند و از اینرو به آن بردار مجموع گفته می‌شود که حاصل ضرب داخلی[1] آن با هر بردار مانند x، برابر مجموع مؤلفه‌های x خواهد بود.

جمع بردارها

جمع دو بردار هم اندازه برداری است با همان اندازه که مؤلفه‌هایش مجموع مؤلفه‌های نظیر به نظیر دو بردار اولیه هستند:

$$\left.\begin{array}{l} a=(a_1,a_2,\ldots,a_n) \\ b=(b_1,b_2,\ldots,b_n) \end{array}\right\} \rightarrow a+b=(a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n)$$

$a+b$ قطر متوازی الاضلاعی است که از رسم دو بردار b,a بدست می‌آید.



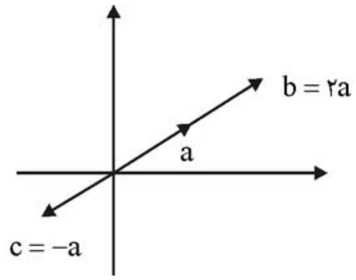
ضرب بردارها

ضرب اسکالر

حاصل ضرب عدد اسکالر k در بردار a، برداری با همان مرتبه (یا اندازه) a است که تمام مؤلفه‌هایش k برابر شده‌اند:

$$a=(a_1,\ldots,a_n) \xrightarrow{\times k} ka=(ka_1,ka_2,\ldots,ka_n)$$

اگر $k>0$ باشد، ka هم جهت a و اگر $k<0$ باشد ka در خلاف جهت a خواهد بود.



ضرب داخلی

دو بردار هم اندازه را می‌توان در هم ضرب کرد و حاصل یک عدد اسکالر خواهد بود. به این عدد حاصلضرب داخلی یا نقطه‌ای دو بردار گفته می‌شود:

$$\left.\begin{array}{l} a=(a_1,a_2,\ldots,a_n) \\ b=(b_1,b_2,\ldots,b_n) \end{array}\right\} \underrightarrow{a.b} \qquad a.b=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

نرم یک بردار

مقیاس‌های مختلفی را می‌توان برای اندازه‌گیری بزرگی یک بردار به کار گرفت. در اینجا نرم اقلیدسی را معرفی می‌کنیم نرم a که با $\|a\|$ نشان داده می‌شود جذر حاصلضرب داخلی a با خودش است.

$$\|a\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

[1] – ضرب داخلی دو بردار در ادامه توضیح داده خواهد شد.

نکته: نرم بردار را با اندازه بردار اشتباه نگیرید. اندازه بردار، تعداد درایه‌های آن است.

نامساوی شوارتز

به ازای دو بردار دلخواه و هم اندازه:

$$|a.b| \le \|a\|.\|b\|$$

زاویه بین دو بردار

اگر زاویه بین دو بردار b,a را با θ نشان دهیم داریم:

$$\cos\theta = \frac{a.b}{\|a\|.\|b\|}$$

بنابراین اگر حاصل ضرب داخلی دو بردار صفر باشد می‌توان نتیجه گرفت دو بردار بر هم عمودند. به چنین دو برداری دو بردار نرمال گفته می‌شود.

فضای اقلیدسی

E^n نشان دهندهٔ یک فضای اقلیدسی n بعدی است. این فضا تمام بردارهای با n درایه را در بر می‌گیرد.

ترکیب خطی :

اگر فرض کنیم $a_1, a_2, ..., a_n$ بردارهایی در فضا باشند، ترکیب خطی آنها به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n . a_n \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, 2, ..., n$$

B را ترکیب خطی مثبت a_iها گوئیم اگر داشته باشیم : $\lambda_i \ge 0 \ \forall_i = 1, 2, ..., n$

ترکیب محدب:

بردار b را ترکیب خطی محدب یا آنین بردارهای a_1 و a_2 و ... و a_n گوئیم هرگاه داشته باشیم :

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \quad \lambda_i \ge 0 \ \forall_i = 1, 2, ..., n$$

مجموعه محدب

مجموعهٔ S را محدب گوئیم اگر دارای شرط زیر باشد $(\lambda \in [0,1])$

$$\forall \ x_1, x_2 \in S \Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in S$$

به عبارت دیگر مجموعهٔ S محدب است اگر خط واصل بین هر دو نقطه آن درونش واقع شود.

فضاهای خطی و محدب

یک زیر فضای خطی S_L از E^n است. بطوریکه اگر a, b عضو S_L باشند، تمام ترکیبات خطی آنها نیز عضو S_L باشد.

$$\left.\begin{array}{l} a \in S_L \\ b \in S_L \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{از } E^n]{\text{زیر فضای خطی } S_L} \lambda_1 a + \lambda_2 b \in S_L$$

اگر تمام ترکیبات محدب b,a عضو S_L باشند S_L یک زیرفضای محدب از E^n است.

<u>تعریف ابر صفحه</u> : تمام معادلات و محدودیت‌های دارای علامت تساوی در واقع نشان دهنده یک ابر صفحه هستند که در حالت کلی بصورت زیر نمایش داده می‌شوند :

$$H = \{x | px = k\}$$

P : بردار ثابت

X : بردار مجهول

K : مقدار ثابت

<u>تعریف نیم فضا</u> : تمام معادلات و محدودیت‌ها با علامت $\le$ یا $\ge$ نشاندهنده یک نیم فضا هستند. یک نیم فضا در حالت کلی بصورت زیر نمایش داده می‌شود.

$H^{+}=\{x|Px\geq k\}$

$H^{-}=\{x|Px\leq k\}$

اشتراک دو نیم فضای فوق یک ابر صفحه و اجتماع آنها کل فضا را نتیجه می‌دهد.

استقلال خطی:

بردارهای $a_1,...,a_n$ را مستقل خطی گوییم، هرگاه از معادله $\lambda_1 a_1+...+\lambda_n a_n=0$ تنها به جواب $\forall_j, \lambda_j=0$ برسیم.

پایه :

بردارهای مستقل $a_1,...,a_n$ را یک پایه برای فضا گوییم هرگاه کل فضا را تولید کنند.

قضیه: پایه‌ای از فضای n بعدی مانند بردارهای $a_1,a_2,...,a_n$ را در نظر بگیرید. هر عضو دلخواه از این فضا مانند بردار b به طور منحصر به فردی بر حسب اعضای این پایه نشان داده می‌شود.

نکته: چون یک پایه در فضای n بعدی همیشه باید n بردار داشته باشد، پس بعد یک پایه منحصر به فرد یعنی n است. ولی یک پایه خودش منحصر به فرد نیست.

قضیه: به ازاء هر نقطه رأسی و جواب شدنی پایه، یک پایه (نه لزوماً منحصر به فرد) وجود دارد. برعکس به ازای هر پایه، یک نقطه راسی یا جواب شدنی پایه (منحصر به فرد وجود دارد).

چند نکته:

- هر مجموعه از بردارها که شامل بردار صفر باشند، وابستهٔ خطی‌اند.
- هر زیر مجموعه از بردارهای مستقل، مستقل است.
- هر مجموعه از بردارها که زیر مجموعه‌ای از بردارهای وابسته داشته باشد، وابسته خطی است.
- هر مجموعه‌ای از بردارها که شامل بردار صفر نیست وابسته خطی است اگر و تنها اگر برداری در آن وجود داشته باشد که بتوان آن را بصورت ترکیب خطی سایر بردارهای مجموعه نوشت.
- در فضای n بعدی حداکثر n بردار می‌توانند مستقل خطی باشند.

۴-۱- چند وجهی

تعریف : چند وجهی عبارت است از اشتراک تعداد متناهی ابر صفحه و یا نیم فضا.

از تعریف چند وجهی نتیجه می‌شود که چند وجهی‌ها محدب هستند.

۵-۱- تعویض یک بردار پایه با بردار دیگر

فرض کنید بردارهای $a_1,...,a_j,...,a_k$ یک پایه برای فضا باشند. می‌خواهیم بردار a را جایگزین بردار a_j کنیم.

چون a یک بردار در این فضاست پس می‌توان آن را به صورت ترکیب خطی بردارهای پایه نوشت.

$a=\lambda a_1+...+\lambda_1 a_1+...+\lambda_k a_k$

در این صورت بردارهای $a_1,...,a,...,a_k$ مستقل خطی هستند اگر و تنها اگر $\lambda_j\neq 0$.

درواقع وقتی a را به صورت ترکیب خطی بردارها $a=\lambda_1 a_1+...+\lambda_j a_j+...+\lambda_k a_k$ می‌نویسیم، می‌توانیم a را جایگزین هر برداری از پایه که ضریب λ_i آن در ترکیب فوق مخالف صفر است کنیم.

۶-۱- بحث در تعداد جوابهای دستگاه

❖ **تعریف :** رتبه سطری ماتریس A برابر ماکزیمم تعداد سطرهای مستقل خطی A است.

❖ **تعریف :** رتبه ستونی ماتریس A برابر ماکزیمم تعداد ستونهای مستقل خطی A است.

نکته : در هر ماتریس رتبه سطری برابر با رتبه ستونی ماتریس است. (به آن رتبه ماتریس گفته می‌شود) و با $R(A)$ نمایش می‌دهند.

$A_{m\times n}\Rightarrow R(A)\leq \min(m,n)$

نکته : برای چک کردن استقلال بردارها رتبه ماتریس حاصل از کنار هم قرار دادن آن‌ها را به‌دست آورید. اگر صفر شد، بردارها وابسته هستند و در غیراین‌صورت مستقل خطی‌اند.

نکته : اگر $R\ (A)=\min(m,n)$ گوییم A رتبه کامل دارد که ممکن است سطری یا ستونی باشد. درواقع رتبه کامل سطری یعنی اینکه همه سطرها مستقل خطی هستند و هرگاه بگوییم ماتریسی رتبه کامل ستونی دارد، بدان معنی است که تمام ستونهای ماتریس A مستقل خطی هستند.

نکته : هرگاه در ماتریس $A_{m\times m}$ داشته باشیم $\det(A)=|A|=0$ بدان معنی است که ماتریس A رتبه کامل (سطری یا ستونی) ندارد. پس $R(A)<m$

❖**تعریف :** در دستگاه معادلات خطی $Ax=b$، از افزودن ستون بردار به ماتریس، ماتریس افزوده $(A|b)$ حاصل می‌شود.

تعداد سطرهای دو ماتریس A و $(A|b)$ با هم برابر است ولی تعداد ستونهای $(A|b)$ یک واحد بیشتر است.

حال می‌خواهیم در وجود و تعداد جوابهای دستگاه $Ax=b$ بحث کنیم. ابتدا ماتریس افزوده $(A|b)$ را می‌سازیم. اکنون دو ماتریس $A_{m\times n}$ و $(A|b)_{m\times(n+1)}$ را در نظر می‌گیریم.

$$1)R(A)<R(A|b)\Rightarrow R(A|b)=R(A)+1$$

در این حالت دستگاه نشدنی است و مسئله جواب ندارد چون بردار را نمی توان با استفاده از ترکیب خطی ستونهای A نوشت.

$$2)R(A)=R(A|b)=k<m$$

مسئله حتماً جواب دارد.

چون $R(A)=k<m$ پس حتماً در ماتریس A سطرهای وابسته به هم، وجود داشته است. برای حل، ماتریس A را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم :

$$A=\begin{matrix}A_{1\,k\times n}\ x=b_1\\ A_{2\,(m-k)\times n}x=b_2\end{matrix}$$

A_1: سطرهای مستقل

A_2: سطرهای وابسته

حال کافیست دستگاه $A_1x=b_1$ را حل کنیم و چون سطرهای A_2 ترکیب خطی سطرهای A_1 هستند، هر جواب A_1 جواب A_2 هست.

اکنون به بررسی حل دستگاه $A_1x=b_1$ می‌پردازیم. چون فرض کردیم که تمام سطرهای A_1 مستقل هستند پس A_1 رتبه کامل سطری دارد و $R(A_1)=k$ و تعداد ستون $k<n\rightarrow$

$$A_1=\left[B_{k\times k},N_{k(n-k)}\right]\qquad,\qquad x=\begin{pmatrix}x_B\\x_N\end{pmatrix}$$

B: ستونهای مستقل A_1

N: ستونهای وابسته

چون تمام ستونهایی که مستقل خطی هستند را در B ریخته‌ایم پس $|B|\neq 0$ و B یک ماتریس معکوس پذیر است.

$$[B,N]\begin{pmatrix}x_B\\x_N\end{pmatrix}=b_1$$

$$Bx_B+Nx_N=b_1\Rightarrow x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N$$

با دادن هر مقدار به x_N یک مقدار جدید برای x_B به دست می‌آید پس مساله بیشمار جواب دارد.

$$3)R(A)=R(A|b)=k=n\rightarrow \text{تعداد ستونها}$$

در این حالت مساله جواب منحصر به فرد دارد. $x_B=B^{-1}b$

۷-۱- حل دستگاه معادلات $Ax=b$

برای حل دستگاه $Ax=b$ ابتدا ماتریس افزوده $(A\,|\,b)$ را سطری پلکانی می‌کنیم تا به دستگاه جدید $Rx=b'$ برسیم.
یکی از حالات زیر اتفاق می‌افتد :

$$1)\ R=I \Rightarrow Ix=b'$$

جواب منحصر به فرد داریم

$$2)R=\begin{bmatrix} I \\ O \end{bmatrix}$$

این حالت وقتی اتفاق می‌افتد که چند سطر وابسته داشته ولی رتبه کامل ستونی داشته باشیم.

$$\begin{bmatrix} I \\ O \end{bmatrix}x=\begin{bmatrix} b'I \\ b'_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} Ix=b'_1 \\ ox=b'_2 \end{cases}$$

اگر $b'_2=0$، دستگاه جواب منحصر به فرد دارد ولی اگر $b'_2 \neq 0$ باشد، دستگاه جواب ندارد.

$$3)Rx=[I\ \ N]\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}=b',\ R=[I\ \ N]$$

در این حالت رتبه کامل سطری داریم.

$$\Rightarrow Ix_B+Nx_N=b'$$

با دادن مقادیر مختلف به x_N برای x_B بی‌شمار مقدار به دست می‌آید.

$$4)\ Rx=\begin{bmatrix} I & N \\ O & O \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{pmatrix} \qquad , \quad \begin{bmatrix} I & N \\ O & O \end{bmatrix}$$

در این حالت نه رتبه کامل سطری داریم و نه رتبه کامل ستونی.

$$\Rightarrow Ix_B+Nx_N=b'_1$$
$$Ox_B+Ox_N=b'_2$$

اگر $b'_2=0$ باشد، دستگاه بی شمار جواب دارد.
اگر $b'_2 \neq 0$ باشد، دستگاه جواب ندارد.

مثال: در حل دستگاه $Ax=b$ با تغییر مقادیر سمت راست، کدامیک از حالت‌های ۱ و ۲ و ۳ قابل تبدیل به یکدیگر نمی‌باشند؟

گزینه ۱: ۱ $\leftrightarrow$ ۳
گزینه ۲: ۲ $\leftrightarrow$ ۱
گزینه ۳: ۳ $\leftrightarrow$ ۲

منظور از حالت‌ها:

۱) $R(A)<R(A/B)$ ۲) $R(A)=R(A/B)=k<m$
۳) $R(A)=R(A/B)=k=n$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه ۱ شامل حالت دوم از مواد ۱-۶ می‌شود. و گزینه ۲ شامل حالت چهارم می‌شود ولیکن از طریق دستکاری b قادر به تبدیل مذکور در گزینه ۳ نیستیم.

۸-۱- نقطه راسی

در این قسمت سه تعریف برای نقطه راسی ارائه می‌دهیم :

۱) $\bar{x}$ را نقطه راسی مجموعه $X \neq \phi$ گوییم اگر نتوان آن را به صورت ترکیب محدب اکید دو نقطه متمایز X نوشت.

۲) $\bar{x}$ را یک نقطه راسی مجموعه محدب $x \neq \phi$ گوییم اگر و تنها اگر $X - \{\bar{x}\}$ محدب باشد.

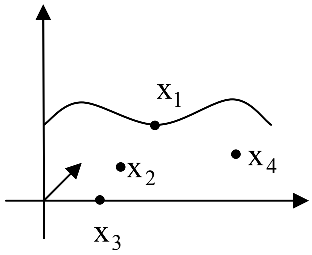
۳) $\bar{x}$ را نقطه راسی $X \neq \phi$ گویند اگر بتوان از تمام ابر صفحه‌های گذرنده از $\bar{x}$ تعریف کنندهٔ x حداقل یک دسته n تایی ابر صفحه مستقل پیدا کرد.

اگر بیشتر از n ابر صفحه که n تای آنها مستقل هستند، از یک نقطه راسی بگذرد آن نقطه **تباهیده** است.

۹-۱- جهت شدنی برای یک نقطه

یک جهت را برای یک نقطه، شدنی گوییم هرگاه این نقطه را در آن جهت به اندازه ε حرکت دهیم، داخل ناحیه شدنی بماند.

در شکل روبرو، d یک جهت شدنی برای x_3, x_4, x_2 است. ولی برای x_1 جهت شدنی نیست.



(شکل ۱۰-۱)

۱۰-۱- جهت دورشونده برای یک نقطه

یک جهت مانند d را برای یک نقطه، جهت دورشونده گوییم هرگاه این نقطه را در جهت d تا بی‌نهایت حرکت دهیم، داخل ناحیه شدنی قرار بگیرد.

قضیه : اگر S، محدب و بسته باشد، هر جهت دورشونده برای نقطه $x_i \in S$، یک جهت دورشونده برای تمام نقاط آن مجموعه است.

۱۱-۱-یافتن جهت دورشونده در دستگاههای مختلف

۱) $d \neq 0$ یک جهت دورشونده برای $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ است اگر و تنها اگر دستگاه $\begin{cases} Ad = 0 \\ d \geq 0 \\ d \neq 0 \end{cases}$ جواب داشته باشد.

۲) $d \neq 0$ یک جهت دورشونده برای $\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$ است اگر و تنها اگر دستگاه $\begin{cases} Ad \leq 0 \\ d \geq 0 \\ d \neq 0 \end{cases}$ جواب داشته باشد.

۳) $d \neq 0$ یک جهت دورشونده برای $\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$ است اگر و تنها اگر دستگاه $\begin{cases} Ad \geq 0 \\ d \geq 0 \\ d \neq 0 \end{cases}$ جواب داشته باشد.

به عبارت دیگر $d \neq 0$، یک جهت دورشونده برای یک دستگاه است هرگاه دستگاه همگن آن جواب غیرصفر داشته باشد.

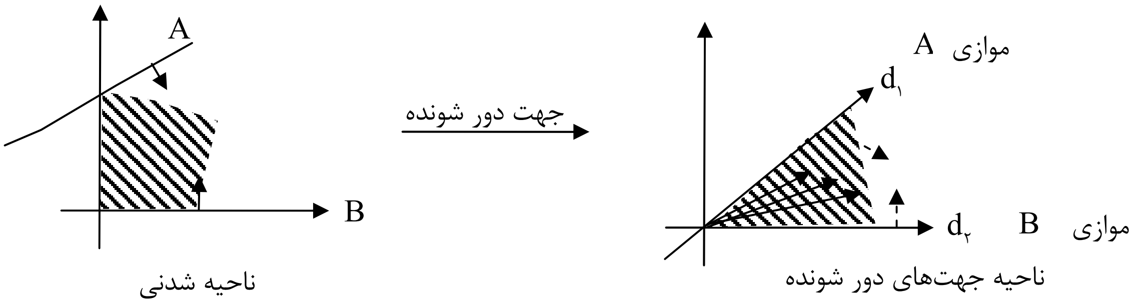
برای اجتناب از چندگانگی، این جهت‌ها را می‌توان نرمال کرد و برای حفظ خطی بودن راحتتر است که از نرم $|d_1| + |d_2| + \ldots + |d_n| = 1$ برای نرمال کردن استفاده شود. چون $d \geq 0$ است می‌توان از رابطه $d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 1$ استفاده کرد. بنابراین مجموعهٔ $D = \{d \mid Ad \leq 0, 1d = 1, d \geq 0\ d \neq 0\}$ جهت‌های دور شونده $\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$ را مشخص می‌سازد.

نکته : در یک مساله جهت دورشونده داریم اگر و تنها اگر ناحیه شدنی بی‌کران باشد.

نکته : مجموعه کراندار جهت دورشونده ندارد.

۱۲-۱-یافتن جهت های دورشونده یک شکل

در یک دستگاه مختصات جدید موازی محدودیت‌ها را از مبدا مختصات رسم می‌کنیم و اشتراک آنها را بـه دسـت مـی‌آوریـم. ایـن اشتراک مجموعهٔ جهت‌های دورشونده است. (شکل زیر)



(شکل ۱۱-۱) **(شکل ۱۲-۱)**

۱۳-۱-جهت رأسی :

$d \neq 0$ را یک جهت راسی می‌گوییم اگر نتوان آن را به صورت ترکیب خطی مثبت از دو جهت متمایز نوشت.

در شکل قبل دو جهت d_1 و $d_۲$ جهت های راسی هستند.

نکته: تمام جهت‌های یک مجموعه را می‌توان با استفاده از ترکیب محدب جهت‌های رأسی آن مجموعه به دست آورد.

نکته: تعداد نقاط راسی و جهت‌های راسی یک ناحیه هیچگونه ارتباطی با هم ندارند.

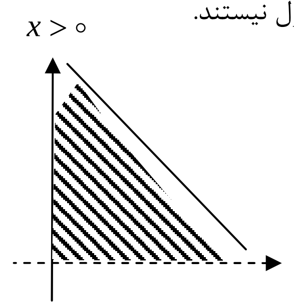
نکته : اگر ناحیه‌ای بسته نباشد جهت راسی ندارد. (ناحیه‌ای بسته است که مرزهایش عضو آن باشند.)

مثال : مساله روبرو را در نظر بگیرید :

$$Ax < b$$
$$x > 0$$

ناحیه شدنی این مساله بسته نیست، چون مرز ناحیه یعنی $x = ۰$ و $Ax = b$ عضو ناحیه مورد قبول نیستند.

$$Ax < b$$



ناحیه شدنی مسأله فوق

این مساله جهت راسی ندارد.

نکته: جهت های راسی مساله $\begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases}$ دقیقا" نقاط راسی $D = \begin{cases} Ad \le 0 \\ 1d = 1 \\ d \ge 0 \end{cases}$ اسـت و ایـن روش بـرای سـایر حـالات مسائل برنامه‌ریزی خطی نیز قابل تعمیم است.

مثال : مجموعه X با نامعادلات زیر داده شده است.

$$\begin{aligned} -۳x_۱ + x_۲ &\le -۲ \\ -x_۱ + x_۲ &\le ۲ \\ -x_۱ + ۲x_۲ &\le ۸ \\ -x_۲ &\le -۲ \\ x_۱, x_۲ &\ge ۰ \end{aligned} \xrightarrow{\text{x نقاط رأسی}} \quad a_۱ = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۶ \end{bmatrix} \quad a_۲ = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \end{bmatrix} \quad a_۳ = \begin{bmatrix} \frac{۴}{۳} \\ ۲ \end{bmatrix}$$

مجموعه D به صورت زیر است:

$$D=\left\{\begin{matrix}(d_1,d_2)\,|\,-3d_1+d_2\le 0,-d_1+d_2\le 0,-d_1+2d_2\le 0,-d_2\le 0 & d\ne 0\\ d_1+d_2=1\quad,\quad d_1\ge 0\quad,\quad d_2\ge 0\end{matrix}\right\}$$

نقاط راسی مجموعه D عبارتست از $d_1=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}$ و $d_2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$. پس جهت های راسی X همان d_1 و d_2 می‌باشد. جهت های دورشونده x باید از ترکیب محدب d_1 و d_2 بدست می‌آیند.

x جهت‌های دورشونده $=\{\lambda d_1+(1-\lambda)d_2\,|\,\lambda\in[0,1]\}$