بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضی مهندسی

کلیه‌رشته‌ها

از مجموعه کتاب‌های آمادگی کارشناسی ارشد ماهان

محمد محمدپور

محمدپور_ محمد

ریاضی مهندسی / محمد محمدپور

مشاوران صعود ماهان: ۱٤۰۱

۳۵۵ص: جدول، نمودار

ISB/N: 978-600-458-804-1

فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.

فارسی ـ چاپ اول

ریاضی مهندسی کلیه رشته‌ها

محمد محمدپور

ج ـ عنوان

کتابخانه ملی ایران ٤٤١٦١٥٣

انتشارات مشاوران صعود ماهان

موسسه آموزش عالی آزاد ماهان

www.mahan.ac.ir

❑ **نام کتاب:** .... ریاضی مهندسی کلیه رشته‌ها

❑ **مدیران مسئول:** .... هادی و مجید سیّاری

❑ **مولف:** .... محمد محمدپور

❑ **مدیر تولید محتوا:** .... سمیه بیگی

❑ **ناشر:** .... مشاوران صعود ماهان

❑ **نوبت و تاریخ چاپ:** .... چاپ اول/ ۱۴۰۱

❑ **تیراژ:** .... ۱۰۰۰ نسخه

❑ **قیمت:** .... ۳/۴۹۰/۰۰۰ ریال

❑ **شابک:** .... ISBN ۹۷۸-۶۰۰-۴۵۸-۸۰۴-۱

انتشارات مشاوران صعود ماهان: تهران ـ خیابان ولیعصر، بالاتر از تقاطع ولیعصر مطهری، پلاک ۲۰۵۰

تلفن: ۸۸۱۰۰۱۱۳ و ۸۸۴۰۱۳۱۳

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به موسسه آموزش عالی آزاد ماهان می‌باشد. و هرگونه اقتباس و کپی‌برداری از این اثر بدون اخذ مجوز پیگرد قانونی دارد.

پیش‌گفتار

سخن ناشر

«به نام حق»

در آغاز ایستاده‌ایم و به آغاز می‌نگریم،
کلمه نزد خدا بود که بر زبان ما جاری شد
و
پاک‌ترین آفریدۀ انسان، همین کلمه شد...
کلمات را کنار هم می‌نشانیم،
کلمات «جمله» می‌شوند
بر ذهن و دل ما می‌نشینند
راهی می‌گشایند درست
و دری می‌بندند که به بیراهه می‌رود...
عزممان را جزم نوشتن کردیم
تا با زلال کلمه
دست و دل و روحمان را از «نمی‌دانم»ها بزداییم...
تنها فکر کردیم،
با هم فکر کردیم
و تنها و با هم نوشتیم و نوشتیم و نوشتیم...
و هرگاه خسته شدیم به آواز خواندیم که:
ای بی‌خبر بکوش که صاحب خبر شوی...
خبر این است:
در آغاز ایستاده‌ایم و به آغاز می‌نگریم...

سخن مولف:

خدایا به ما کمک کن تا آنچه که می‌گوییم به نفع همه‌ی ما باشد.
با توجه به استقبال فراوان دانشجویان عزیز برای ورود به دانشگاه و آزمون‌های ورودی دانشگاه‌ها و همچنین کمبود کتاب‌های آموزشی مفید و مناسب، سعی بر این داشتیم تا کتابی در خور علم و شأن شما عزیزان ارائه دهیم.
در این کتاب سعی کردیم درس به‌طور کامل و مفید تدریس شود تا هیچ شبهه‌ای در مطالب این کتاب وجود نداشته باشد.
رویکرد ما در تالیف این کتاب، آموزشی و آزمون محور بوده و دانشجویان عزیز با مطالعه‌ی دقیق و عمیق کتاب حاضر، قادر خواهند بود که به سوالات آزمون‌های ورودی دانشگاه‌ها، پاسخ مناسب دهند. به‌طور کلی کتاب حاضر دربردارنده‌ی موارد زیر می‌باشد:
۱) ارائه‌ی درس به‌طور کامل و جامع و مفید به‌طوری که هیچ مطلب مفیدی از قلم نیفتاده باشد.
۲) ارائه‌ی تست‌های تالیفی و کنکور در درس‌نامه‌ها برای تمرین و بیان بهتر مطالب درسی
۳) ارائه‌ی بیش از ۵۰۰ پرسش چهارگزینه‌ای سال‌های گذشته
۴) پاسخ تشریحی پرسش‌های چهار گزینه‌ای به‌طوری که به‌راحتی قابل فهم برای خواننده باشد.
۵) بیان روش‌های کوتاه و تستی در پاسخ‌های تشریحی
۶) بیان سوالات تستی و کوتاه در قالب نکات و آموزش درس
۷) حل مرحله به مرحله‌ی سوالات به‌طوری که هر دانشجویی با هر رتبه علمی به‌راحتی بتواند مطلب را فراگیرد.
تالیف هیچ کتابی بدون نقص و اشتباه نخواهد بود بنابراین از همه دوستان، همکاران اساتید بزرگوار تقاضا داریم تا نظرات و انتقادات خود را به ایمیل m_ mohamadpoor@yahoo.com ارسال نمایند.
در آخر از جناب آقای دکتر سیاری و آقای مهندس سیاری مدیران محترم موسسه‌ی ماهان، همچنین دوست عزیز و محترم این‌جانب، جناب آقای مهندس روشناس که زمینه را برای تالیف این کتاب فراهم نمودند، کمال تشکر و سپاس‌گزاری را دارم.
همچنین از ویراستاران محترم و تایپیست‌های گرامی و عزیز که همگی از هیچ تلاشی برای ارائه مطلوب این کتاب فروگذار نکرده‌اند، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

فهرست

فهرست

تقدیم به پدر و مادر عزیز و دلسوز و
همسر صبور و مهربانم که از وقت ایشان برای
تالیف این اثر استفاده کردم
و ایشان با شکیبایی
کاستی‌های بنده را تحمل کردند.

فصل اول

سری‌های فوریه، انتگرال‌ها و تبدیلات فوریه

آنچه در این فصل می‌خوانیم:

تابع متناوب
توابع زوج و فرد
دنباله و سری مثلثاتی
سری فوریه
بسط‌های نیم‌دامنه‌ای
قضیه همگرایی سری فوریه
اتحاد پارسوال
تعریف انتگرال فوریه
انتگرال فوریه
انتگرال فوریه سینوسی
انتگرال فوریه کسینوسی
قضیه همگرایی انتگرال فوریه
سری فوریه مختلط
انتگرال فوریه مختلط
تبدیل فوریه
تبدیل فوریه سینوسی و کسینوسی
مشتق و انتگرال‌گیری از سری فوریه

قبل از شروع بحث سری فوریه به بیان بعضی از مباحث مورد نیاز برای یادگیری سری فوریه می‌پردازیم. البته این مباحث در ریاضی عمومی ۱ تدریس شده و یادآوری آن‌ها پیش‌نیاز مبحث سری فوریه خواهد بود.

تعریف تابع متناوب

تابع حقیقی $y=f(x)$ را در دامنه تعریفش D_f، متناوب گویند هرگاه:

$$\forall x\in D_f \exists\ t=T>0 \Rightarrow f(x+T)=f(x)$$

تابع $f(x)$ را متناوب و $t=T$ را دوره تناوب می‌گویند و منظور کوچک‌ترین دوره تناوب تابع $f(x)$ می‌باشد.

نکته

۱- دوره تناوب توان‌های زوج توابع $\cos ax$ و $\sin ax$ برابر $T=\frac{\pi}{|a|}$ می‌باشد.

به عنوان مثال دوره تابع $\sin^2 2x$ به صورت $T=\frac{\pi}{|a|}=\frac{\pi}{2}$ می‌باشد.

۲- دوره تناوب توان‌های فرد توابع $\cos ax$ و $\sin ax$ برابر $T=\frac{2\pi}{|a|}$ می‌باشد.

به عنوان مثال دوره تناوب تابع $\sin^3 2x$ به صورت $T=\frac{2\pi}{|a|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$ می‌باشد.

۳- دوره تناوب مجموع چند تابع متناوب برابر ک‌م‌م دوره‌های تناوب توابع می‌باشد.

به عنوان مثال دوره تناوب تابع $\sin^3 2x+\cos^2 3x$ به صورت زیر می‌باشد:

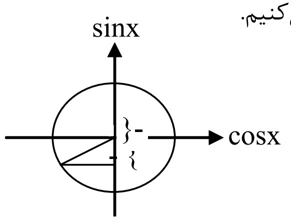
$$\begin{cases}\sin^3 2x \to T=\frac{2\pi}{|a|}=\frac{2\pi}{2}=\pi \\ \cos^2 3x \to T=\frac{\pi}{|a|}=\frac{\pi}{3}\end{cases} \Rightarrow \text{ک م م}\ \left[\pi,\frac{\pi}{3}\right]=\pi$$

۴- دوره تناوب تابع ثابت را می‌توان هر عدد مثبت دلخواهی در نظر گرفت.

۵- اگر دوره تناوب تابعی برابر T باشد، دوره تناوب قدر مطلق آن تابع، کسری از T خواهد بود و به صورت T، $\frac{T}{2}$ و ... می‌باشد.

به عنوان مثال دوره تناوب تابع sinx برابر $T=\frac{2\pi}{1}=2\pi$ می‌باشد و دوره تناوب $|\sin x|$ کسری از T می‌باشد. فرض می‌کنیم دوره تناوب آن $\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{2}=\pi$ باشد، درستی این مقدار را بررسی می‌کنیم.

$$|\sin(\pi+x)|=|-\sin x|=|\sin x|$$



قدرمطلق را منفی حذف می‌کند.

۶- اگر T دوره تناوب تابع $y=f(x)$ باشد، آن‌گاه دوره تناوب $y=f(ax+b)$ برابر $\frac{T}{a}$ می‌باشد.

به عنوان مثال دوره تناوب تابع cosx برابر $T=\frac{2\pi}{|a|}=2\pi$ می‌باشد و دوره تناوب تابع $\cos(\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{3})$ برابر $\frac{T}{a}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=\frac{4\pi}{\pi}=4$ می‌باشد.

۷- اگر $f(x+T)=f(x)$ باشد، آن‌گاه $f(x+nT)=f(x), n\in Z$.

به عنوان مثال دوره تناوب sinx می‌تواند $T=2\pi,-1\times 2\pi,-7\times 2\pi,...$ باشد.

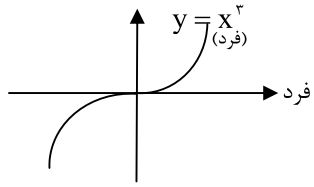
توابع زوج و فرد

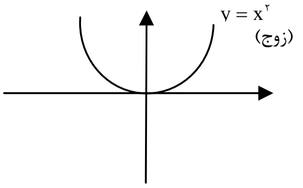
۱- تابع $f(x)$ زوج است هرگاه به ازای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $f(-x)=f(x)$.

۲- تابع $f(x)$ فرد است هرگاه به ازای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $f(-x)=-f(x)$.

نکته

۱- تابع زوج تابعی است که نسبت به محور yها قرینه باشد، مثل $\cos x, x^2$ و تابع فرد تابعی است که نسبت به مبدأ مختصات قرینه باشد، مثل $\sin x, x^3$.





۲- در توابع فرد داریم $f(-x)+f(x)=0$ و در توابع زوج داریم $f(-x)-f(x)=0$.

۳- اگر تابع به صورت ضرب دو تابع بود برای بدست آوردن زوج و فرد بودن آن از اصل مثبت و منفی استفاده می‌کنیم، به این‌گونه که تابع زوج را مثبت (+) و تابع فرد را (-) فرض می‌کنیم و از حاصل‌ضرب آن‌ها تابع فرد (-) تشکیل می‌شود.

به عنوان مثال در تابع $y=x|x|$ داریم:

۱) $y_1 = x \to f(-x)=-x$ فرد (-)

۲) $y_2 = |x| \to f(-x)=|-x|=|x|$ زوج (+)

$\Rightarrow y=x|x| \to (-)\times(+)=(-)$ فرد

۴- تابع $y=c$ همواره زوج است و اگر $y=0$ باشد، هم زوج و هم فرد می‌باشد .

۵- مجموع و تفاضل دو تابع فرد، فرد است.

به عنوان مثال توابع زیر را از لحاظ زوج یا فرد بودن بررسی می‌کنیم.

۱) $y=x \to f(-x)=-x$ $(-)$ فرد

۲) $y=x^2 \to f(-x)=(-x)^2=x^2$ $(+)$ زوج

۳) $y=x^3 \to f(-x)=(-x)^3=-x^3$ $(-)$ فرد

۴) $y=|x| \to f(-x)=|-x|=|x|$ $(+)$ زوج

۵) $y=\cos ax \to f(-x)=\cos a(-x)=\cos ax$ $(+)$ زوج

۶) $y=\sin ax \to f(-x)=\sin a(-x)=-\sin ax$ $(-)$ فرد

۷) $y=x|x| \to (-)\times(+)=-$ فرد

۸) $y=x\cos x \to (-)\times(+)=-$ فرد

۹) $y=x\sin x \to (-)\times(-)=+$ زوج

۱۰) $y=e^{-|x|} \to f(-x)=e^{-|-x|}=e^{-|x|}(+)$ زوج

۱۱) $y=x+x^2 \to f(-x)=-x+(-x)^2=-x+x^2=-(x-x^2)$ نه زوج و نه فرد

۱۲) $y=\sin x+\cos x \to f(-x)=\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin x+\cos x$ نه زوج و نه فرد

تعریف دنباله مثلثاتی

دنباله به صورت
$$1+\sin\frac{\pi}{L}x+\cos\frac{\pi}{L}x+\sin\frac{2\pi}{L}x+\cos\frac{2\pi}{L}x+\ldots+\sin\frac{n\pi}{L}x+\cos\frac{n\pi}{L}x$$
را دنباله مثلثاتی می‌گویند که این دنباله دارای دوره تناوب $T=2L$ می‌باشد.

تعریف سری مثلثاتی

سری زیر را سری مثلثاتی می‌گویند.

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x)=a_0+a_1\cos\frac{\pi}{L}x+b_1\sin\frac{\pi}{L}x$$
$$+a_2\cos\frac{2\pi}{L}x+b_2\sin\frac{2\pi}{L}x+\ldots+a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x$$

ویژگی‌های دنباله مثلثاتی

$$1)\int_{\alpha}^{\alpha+2L}\cos\frac{n\pi}{L}x\sin\frac{m\pi}{L}xdx=0\ ,\ \forall m,n\in\mathbb{N}$$

به‌عنوان مثال:

$$\int_{\pi}^{3\pi}\cos x\sin 4xdx=\int_{\pi}^{\pi+2\pi}\cos\frac{\pi}{\pi}x\sin\frac{4\pi}{\pi}x\,dx=0$$

$$2)\int_{\alpha}^{\alpha+2L}\cos\frac{n\pi}{L}xdx=0\ ,\ \int_{\alpha}^{\alpha+2L}\sin\frac{n\pi}{L}xdx=0$$

این نکته زمانی استفاده می‌شود که طول بازه $(\alpha+2L)-\alpha=2L$ باشد.
به‌عنوان مثال:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos xdx=\int_{-\pi}^{-\pi+2\pi}\cos\frac{\pi}{\pi}xdx=0$$

$$3)\int_{\alpha}^{\alpha+2L}\cos\frac{n\pi}{L}x\cos\frac{m\pi}{L}xdx=\begin{cases}L & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases},m,n\in\mathbb{N}$$

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2L}\sin\frac{n\pi}{L}x\sin\frac{m\pi}{L}xdx=\begin{cases}L & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases},m,n\in\mathbb{N}$$

به‌عنوان مثال:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cos 3x\,dx=\int_{-\pi}^{-\pi+2\pi}\cos\frac{\pi}{\pi}\cos\frac{3\pi}{\pi}x\,dx\Rightarrow\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cos 3x\,dx=0$$

$n=1\ ,\ m=3$

تعریف سری فوریه

هر گاه تابع متناوب $y=f(x)$ با دوره تناوب $T=2L$ را $\alpha<x<\alpha+2L$ یا $-L<x<L$ را بتوان با یک سری مثلثاتی تقریب زد به طوری‌که ضرایب مجهول a_0, a_n, b_n را در آن از روی فرمول اویلر به‌دست آوریم در این صورت سری را سری فوریه می‌نامند.

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\begin{cases} a_0=\dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+2L}f(x)\,dx \\ b_x=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+2L}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \\ a_n=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+2L}f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \end{cases}$$

مثال: سری فوریه تابع $y=x$ که $-1<x\le 1$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n\pi}(-1)^n\cos n\pi x$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n\pi}(-1)^n\sin n\pi x$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\cos n\pi.\cos n\pi x$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\sin n\pi.\sin n\pi x$

$$f(x)=x,\ -1<x\le 1\Rightarrow T=\text{انتها}-\text{ابتدا}=1-(-1)=2=2L\Rightarrow L=1$$

$$\Rightarrow x=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L}f(x)\,dx=\frac{1}{2\times 1}\int_{-1}^{-1+2}x\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x\,dx$$

چون تابع $y=x$ تابعی فرد است و بازه متقارن است پس انتگرال تابع فرد در بازه متقارن برابر صفر است.

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x\,dx=0$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L}f(x)\cos x\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{1}{1}\int_{-1}^{-1+2}x.\cos\frac{n\pi}{1}x\,dx\Rightarrow a_n=\int_{-1}^{1}x.\cos n\pi x\,dx$$

تابع $y_1=x$ فرد (-) و تابع $y_2=\cos n\pi x$ تابعی زوج (+) است و در کل تابع داریم: فرد $(-)=(+)\times(-)$ و انتگرال تابع فرد در بازه متقارن برابر صفر است.

$$a_n=\int_{-1}^{1}x.\cos n\pi x\,dx=0$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{1}{1}\int_{-1}^{-1+2}x.\sin\frac{n\pi}{1}x\,dx$$

$$\Rightarrow b_n=\int_{-1}^{1}x.\sin n\pi x\,dx$$

تابع $y_1=x$ تابعی فرد (-) و $y_2=\sin n\pi x$ نیز تابعی فرد (-) است و کل تابع، زوج $(+)=(-)\times(-)$ می‌باشد و انتگرال تابع زوج در

بازه متقارن، دو برابر انتگرال صفر تا بازه بالای آن می‌باشد. پس:

$$b_n = \int_{-1}^{1} x.\sin n\pi x\, dx = 2\int_{0}^{1} x \sin n\pi x\, dx$$

برای به دست آوردن حاصل انتگرال از روش جز به جز استفاده می‌کنیم و داریم:

	u	dv
+	x	$\sin n\pi x$
-	1	$\frac{-1}{n\pi}\cos n\pi x$
+	0	$\frac{-1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x$

$$b_n = 2\int_{0}^{1} x \sin n\pi x\, dx = 2\left(\frac{-x}{n\pi}\cos n\pi x + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\right)\Big]_{0}^{1}$$

$$\Rightarrow b_n = 2\left(\frac{-1}{n\pi}\cos n\pi + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi - \left(0 + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin(0)\right)\right)$$

توابع $\cos n\pi$ و $(-1)^n$ با یکدیگر هم ارزند زیرا:

	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$\cos n\pi$	$\cos\pi = -1$	$\cos 2\pi = 1$	$\cos 3\pi = -1$
$(-1)^n$	$(-1)^1 = -1$	$(-1)^2 = 1$	$(-1)^3 = -1$

پس به‌جای $\cos n\pi$ می‌توان $(-1)^n$ قرار داد و تابع $\sin$ نیز در مضارب صحیحی از π برابر صفر است پس $\sin n\pi = 0$ خواهد بود. داریم:

$$b_n = 2\left(\frac{-1}{n\pi}(-1)^n + \frac{1}{n^2\pi^2}\times 0\right) = \frac{-2}{n\pi}(-1)^n$$

در نهایت خواهیم داشت:

$$x = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n\pi}(-1)^n \sin n\pi x$$

گزینه (۲) صحیح است.

نکته انتگرال توابع زوج و فرد را در بازه متقارن به صورت زیر داریم:

$$\int_{-a}^{a} \text{تابع فرد}\, dx = 0 \quad \text{و} \quad \int_{-a}^{a} \text{تابع زوج}\, dx = 2\int_{0}^{a} \text{تابع زوج}\, dx$$

نکته روش جز به جز یکی از مهم‌ترین روش‌های انتگرال‌گیری است که در این‌جا به طور کامل آن را توضیح خواهیم داد. فرمول رابطه جزبه‌جز به‌صورت $\int udv = uv - \int vdu$ می‌باشد که باید یک عبارت را u و عبارتی را dv در نظر بگیریم و از این فرمول استفاده کنیم.
ولی روش کوتاه‌تری نیز برای این روش وجود دارد. در این روش از یک جدول استفاده می‌کنیم که ستون سمت چپ عبارت v و سمت راست را dv در نظر می‌گیریم. روش جز به جز معمولاً زمانی استفاده می‌شود که عبارت به‌صورت ضرب دو عبارت باشد که در هم ضرب نمی‌شود و معمولا، این عبارت‌ها به صورت جبری- نمایی، جبری- مثلثاتی یا نمایی- مثلثاتی می‌باشند. در این حالت معمولاً عبارت جبری را به عنوان u و عبارت نمایی و یا مثلثاتی را dv در نظر می‌گیریم. سپس از سمت چپ (u) مشتق می‌گیریم تا به صفر برسیم و از ستون سمت راست (dv) انتگرال می‌گیریم و از بالا یک در میان جملات را مثبت و منفی می‌گذاریم و به صورت ضربدری آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

	u	dv	
مشتق ↓	معمولاً عبارت جبری یا نمایی	معمولاً عبارت نمایی و یا مثلثاتی	انتگرال ↓

به‌عنوان مثال: $\int x \sin x dx = -x\cos x + \sin x + c$

	u	dv
+	x	$\sin x$
−	1	$-\cos x$
+	0	$-\sin x$

مثال: سری فوریه تابع $y=x|x|$ در $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ به کدام صورت است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{-1}{xn\pi}(-1)^n+\frac{1}{4n^3\pi^3}(-1)^n-\frac{1}{n^3\pi^3})\cos 2n\pi x$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n\pi}(-1)^n+\frac{(-1)^n}{n^3\pi^3}+\frac{1}{n^3\pi^3})\sin 6n\pi x$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n\pi}(-1)^n+\frac{\cos n\pi}{n^2\pi^2}+\frac{1}{x^3\pi^3})\cos 2n\pi$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{-1}{2n\pi}(-1)^n+\frac{(-1)^n}{n^3\pi^3}-\frac{1}{n^3\pi^3})\sin 2n\pi x$

$$y=x|x|,-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\rightarrow T=\text{انتها - ابتدا}=\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})=1$$

دوره تناوب سری فوریه برابر $2L$ است، پس: $2L=1\Rightarrow L=\frac{1}{2}$

$$x|x|=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x)$$

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L}f(x)\,dx=\frac{1}{1}\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}+1}x|x|\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}x|x|\,dx$$

همان‌طور که گفته شد این تابع تابعی فرد است زیرا $y_1=x$ فرد(-) و $y_2=|x|$ زوج (+) است پس کل تابع $(-)=(+)\times(-)$ فرد می‌باشد و حاصل انتگرال آن در بازه متقارن برابر صفر است.

$$a_0=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}x|x|\,dx=0$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L}f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}+1}x|x|\cos\frac{n\pi}{\frac{1}{2}}x\,dx$$

$$\Rightarrow a_n=2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}x|x|\cos 2n\pi x\,dx$$

تابع $x|x|$ تابعی فرد (-) و $\cos 2n\pi x$ نیز تابعی زوج است، پس کل تابع $(-)=(+)\times(-)$ فرد می‌باشد و حاصل انتگرال آن در بازه متقارن برابر صفر است.

$$a_n=2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}x|x|\cos 2n\pi x\,dx=0$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}+1}x|x|\sin\frac{n\pi}{\frac{1}{2}}x\,dx$$

$$\Rightarrow b_n=2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}x|x|\sin 2n\pi x\,dx$$

تابع $x|x|$ فرد (-) و $\sin 2n\pi x$ نیز فرد(-) است، پس کل تابع $+=(-)\times(-)$ زوج می‌باشد و حاصل انتگرال آن برابر مقدار زیر است:

$$b_n=2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}x|x|\sin 2n\pi x\,dx=2\times 2\int_{0}^{\frac{1}{2}}x|x|\sin 2n\pi x\,dx$$

$|x|$ در بازه‌ی $(0,\frac{1}{2})$ همواره مثبت است. پس قدر مطلق آن تأثیر ندارد و قدر مطلق آن‌را برمی‌داریم در نتیجه:

$$b_n=4\int_{0}^{\frac{1}{2}}x^2.\sin 2n\pi x\,dx$$

	u	dv
+	x^2	$\sin 2n\pi x$
-	$2x$	$\frac{-1}{2n\pi}\cos 2n\pi x$
+	2	$\frac{-1}{4n^2\pi^2}\sin 2n\pi x$
-	0	$\frac{1}{8n^3\pi^3}\cos 2n\pi x$

$$b_n = 4\left(-x^2\times\frac{1}{2n\pi}\cos 2n\pi x + 2x\times\frac{1}{4n^2\pi^2}\sin 2n\pi x + \frac{2}{8n^3\pi^3}\cos 2n\pi x\right)\Big]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow b_n = 4\left(\frac{-\frac{1}{4}}{2n\pi}\cos n\pi + 2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4n^2\pi^2}\sin n\pi + \frac{2}{8n^3\pi^3}\cos n\pi - \left(0+0+\frac{2}{8n^3\pi^3}\cos(0)\right)\right)$$

به جای $\cos n\pi$ عبارت $(-1)^n$ قرار می‌دهیم و $\sin n\pi = 0$ می‌باشد. پس داریم:

$$b_n = 4\left(\frac{-1}{8n\pi}(-1)^n + \frac{1}{4n^3\pi^3}(-1)^n - \frac{1}{4n^3\pi^3}\right)$$

$$\Rightarrow x|x| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2n\pi}(-1)^n + \frac{(-1)^n}{n^3\pi^3} - \frac{1}{n^3\pi^3}\right)\sin 2n\pi x$$

$$\Rightarrow x|x| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2n\pi}(-1)^n + \frac{(-1)^n}{n^3\pi^3} - \frac{1}{n^3\pi^3}\right)\sin 2n\pi x$$

گزینه (۴) صحیح است.

نکته ۱- اگر دو تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب $T = 2L$ که $\alpha < x < \alpha + 2L$، این تابع زوج باشد، آن‌گاه سری فوریه آن کسینوسی خواهد بود یعنی $b_n = 0$ می‌باشد.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x$$

تابع زوج (+) $\equiv \cos \equiv$ ضرایب $\sin$ صفر است.

۲- اگر تابع $f(x)$ با دوره تناوب $T = 2L$ در بازه‌ی درباره $\alpha < x < \alpha + 2L$ فرد باشد، آن‌گاه سری فوریه آن سینوسی است یعنی در سری فوریه $a_0 = a_n = 0$ خواهد بود.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

تابع فرد (-) $\equiv \sin \equiv$ a_0 و a_n صفر است.

مثال: ضریب تابع کسینوسی در سری فوریه برای تابع $y = x$ درباره $-\pi < x < \pi$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{3\pi}{12}$ ۴) $-\frac{9}{11}$

تابع $y = x$ یک تابع فرد است و با توجه به نکته ۲ در توابع فرد a_0 و a_n (ضریب کسینوس) صفر است.
گزینه (۱) صحیح است.

مثال: در تابع $y=x^2$ که $-\pi<x<\pi$ ، a_x کدام است؟

۱) $\frac{2}{n^2}(-1)^n$ ۲) $\frac{1}{n^2}\cos x\pi$ ۳) $\frac{4}{n^2}(-1)^n$ ۴) $\frac{2}{n^2}\times 3\cos n\pi x$

تابع $y=x^2$ تابعی زوجی است، پس سری فوریه آن کسینوسی و a_0 و a_n وجود دارد و b_n برابر صفر است و در این‌جا فقط a_n مورد نظر است در نتیجه داریم:

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx,\ T=\text{انتها} - \text{ابتدا}=\pi-(-\pi)=2\pi$$

$$\Rightarrow 2L=2\pi\Rightarrow L=\pi$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\pi+2\pi} x^2.\cos\frac{n\pi}{\pi}x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2.\cos nx\,dx$$

توابع x^2 و $\cos nx$ هر دو زوج هستند (+) و کل تابع نیز $(+)\times(+)=(+)$ زوج خواهد بود. پس داریم:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2.\cos nx\,dx$$

با استفاده از روش جز به جز داریم:

	u	dv
+	x^2	$\cos nx$
−	$2x$	$\frac{1}{n}\sin nx$
+	2	$\frac{-1}{n^2}\cos nx$
−	0	$\frac{-1}{n^3}\sin nx$

$$\Rightarrow a_n=\frac{2}{\pi}[\frac{x^2}{n}\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx-\frac{2}{n^3}\sin nx)]_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{2}{\pi}[\frac{\pi^2}{n}\sin n\pi+\frac{2\pi}{n^2}\cos n\pi-\frac{2}{n^3}\sin n\pi-(0+0-0)$$

به‌جای $\cos n\pi$ مقدار $(-1)^n$ را قرار می‌دهیم و حاصل $\sin n\pi$ برابر صفر خواهد بود. در نتیجه داریم:

$$a_n=\frac{2}{\pi}(\frac{\pi^2}{n}(0)+\frac{2\pi}{n^2}(-1)^n-\frac{2}{n^3}\times 0)=\frac{2}{\pi}\times\frac{2\pi}{n^2}(-1)^n\Rightarrow a_n=\frac{4}{n^2}(-1)^n$$

گزینه (۳) صحیح است.

مثال: در تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & 0<x<1\\ 0 & -1<x<0\end{cases}$ مقدار ثابت سری فوریه کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x)\,dx,\ T=\text{انتها} - \text{ابتدا}=1-(-1)=2\ \Rightarrow 2L=2\Rightarrow L=1$$

دوره تناوب سری فوریه برابر $2L$ است پس داریم:

$$\Rightarrow a_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{-1+2} f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

چون تابع، یک تابع ضابطه‌ای است، پس با توجه به بازه‌ها و انتخاب تابع انتگرال را می‌شکنیم.

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{1} x^2dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{1} x^2dx=\frac{1}{2}(\frac{x^3}{3})\Big]_0^1=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-0)=\frac{1}{6}$$

گزینه (۱) صحیح است.

مثال: برای تابع $f(x)=\begin{cases} ۲ & -\pi<x<\circ \\ ۳ & \circ<x<\pi \end{cases}$ **سری فوریه به کدام صورت است؟**

۱) $\frac{۵}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲}{\pi n}\cos nx$ ۲) $\frac{۵}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲}{\pi n}\sin nx$ ۳) $\frac{۳}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲}{\pi n}\sin nx$ ۴) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲}{\pi n}\cos nx$

T= ابتدا و انتها $=\pi-(-\pi)=۲\pi, ۲L=۲\pi \Rightarrow L=\pi$

$$\Rightarrow a_\circ=\frac{۱}{۲L}\int_{\alpha}^{\alpha+۲L}f(x)\,dx=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$$

چون تابع ضابطه‌ای است، انتگرال را با توجه به بازه‌ها می‌شکنیم و تابع مورد نظر را در هر بازه انتخاب می‌کنیم.

$$a_\circ=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\circ}۲\,dx+\frac{۱}{۲\pi}\int_{\circ}^{\pi}۳\,dx=\frac{۱}{۲\pi}(۲x)]_{-\pi}^{\circ}+\frac{۱}{۲\pi}(۳x)]_{\circ}^{\pi}=\frac{۱}{۲\pi}(\circ+۲\pi)+\frac{۱}{۲\pi}(۳\pi-\circ)$$

$$\Rightarrow a_\circ=\frac{۱}{۲\pi}\times ۲\pi+\frac{۱}{۲\pi}\times ۳\pi=۱+\frac{۳}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

$$a_n=\frac{۱}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+۲L}f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{-\pi+۲\pi}f(x)\cos\frac{n\pi}{\pi}x\,dx$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$$

و باز هم با توجه به بازه‌ها انتگرال را می‌شکنیم:

$$a_n=\frac{۱}{\pi}\int_{-n}^{\circ}۲\cos nx\,dx+\frac{۱}{\pi}\int_{\circ}^{\pi}۳\cos nx\,dx=$$

$$\frac{۱}{\pi}[\frac{۲}{n}\sin nx)]_{-\pi}^{\circ}+\frac{۱}{\pi}(\frac{۳}{n}\sin nx)]_{\circ}^{\pi}\Rightarrow$$

$$a_n=\frac{۱}{n}(\circ-\circ)+\frac{۱}{\pi}(\circ-\circ)=\circ$$

$$b_n=\frac{۱}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+۲L}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}dx=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{-n+۲L}f(x)\sin\frac{n\pi}{\pi}x\,dx$$

$$\Rightarrow b_n=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

با توجه به بازه‌های تابع ضابطه‌ای، انتگرال را می‌شکنیم:

$$b_n=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\circ}۲\sin nx\,dx+\frac{۱}{\pi}\int_{\circ}^{\pi}۳\sin nx\,dx=$$

$$\frac{۱}{\pi}(\frac{-۲}{n}\cos nx)]_{-\pi}^{\circ}+\frac{۱}{\pi}(\frac{-۳}{n}\cos nx)]_{\circ}^{\pi}\Rightarrow$$

$$b_n=\frac{۱}{\pi}(\frac{-۲}{n}-\frac{۲}{n})+\frac{۱}{\pi}(\frac{۳}{n}+\frac{۳}{n})=\frac{۱}{\pi}\times(\frac{-۴}{n})+\frac{۱}{\pi}(\frac{۶}{n})$$

$$\Rightarrow b_n=\frac{-۴}{\pi n}+\frac{۶}{\pi n}=\frac{۲}{\pi n}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۵}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲}{\pi n}\sin nx$$

گزینه (۲) صحیح است.

بسط‌های نیم‌دامنه‌ای (سری‌های فوریه سینوسی و کسینوسی)

با توابع غیر متناوب مانند $y=f(x)$ ، $0<x<L$ سروکار داریم که دارای سری فوریه نمی‌باشد ولی می‌توان آن را به دو صورت زیر گسترش داد:

۱- سری فوریه کسینوسی تابع $y=f(x)$ در $0<x<L$:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{L}x$$

که در آن a_0 و a_n را خواهیم داشت:

$$\begin{cases}a_0=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\,dx\\ a_n=\dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\cos\dfrac{n\pi}{L}x\,dx\end{cases}$$

۲- بسط نیم دامنه فرد و یا سری فوریه سینوسی تابع $y=f(x)$ در $0<x<L$:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{L}x$$

و b_n را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

مثال: در تابع $f(x)=\begin{cases}x & 0<x<\pi\\ 0 & \pi\le x<2\pi\end{cases}$ **سری فوریه سینوسی به کدام صورت است؟**

۱) $(\frac{2}{n^2}\cos n\frac{\pi}{2})\sin\frac{n\pi}{2}x$

۲) $(\frac{4}{x^2}\sin n\frac{\pi}{2})\sin\frac{n}{2}x$

۳) $\frac{1}{\pi}(\frac{4}{n^2}\sin n\frac{\pi}{2})\sin\frac{n}{2}x$

۴) $\frac{1}{\pi}(\frac{-2\pi}{n}\cos\frac{n}{2}x+\frac{4}{n^2}\sin\frac{\pi}{2})\sin\frac{n}{2}x$

در بسط‌های نیم‌دامنه‌ای $0<x<L$ می‌باشد و در این مثال $0<x<2\pi$ است، پس مقدار $L=2\pi$ می‌باشد.

$$f(x)=\sum_{x=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin\frac{n\pi}{2\pi}x\,dx$$

$$\Rightarrow b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin\frac{n}{2}x\,dx$$

و بعد با استفاده از بازه‌های تابع ضابطه‌ای انتگرال را می‌شکنیم:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x.\sin\frac{n}{2}xdx+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}0\times\sin\frac{n}{2}x\,dx$$

$$\Rightarrow b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin\frac{n}{2}x\,dx$$

و به کمک روش جز به جز به حل این انتگرال می‌پردازیم:

	u	dv
+	x	$\sin\frac{n}{2}x$
-	1	$-\frac{2}{n}\cos\frac{n}{2}x$
+	0	$-\frac{4}{n^2}\sin\frac{n}{2}x$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2x}{n}\cos\frac{n}{2}x+\frac{4}{n^2}\sin\frac{n}{2}x\right)\Big]_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow b_n=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-2\pi}{n}\cos\frac{n}{2}\times\pi+\frac{4}{n^2}\sin\frac{n}{2}\times\pi-\left(0+\sin(0)\times\frac{4}{n^2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow b_n=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-2\pi}{n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2}\sin n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\alpha}\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi}{n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2}\sin n\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{n}{2}x$$

گزینه (۳) صحیح است.

مثال: در تابع $f(x)=x$ و $0<x<\pi$ سری کسینوسی آن به کدام صورت است؟

۱) $\frac{n}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right)\right)\cos nx$

۲) $\frac{\pi}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right)\cos nx$

۳) $\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right)\right)\sin nx$

۴) $\frac{\pi}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{3}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right)\right)\sin nx$

بسط نیم دامنه‌ای $0<x<L$ است و در این سوال $0<x<\pi$ می‌باشد، پس $L=\pi$ می‌باشد.

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{L}x,$$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big]_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow a_0=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}-0\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x-\cos\frac{n\pi}{\pi}x\,dx$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx$$

با استفاده از روش جز به جز برای انتگرال داریم:

	u	dv
+	x	$\cos nx$
-	1	$\frac{1}{n}\sin nx$
+	0	$\frac{-1}{n^2}\cos nx$

$$\Rightarrow a_n=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\right)\Big]_0^{\pi}=$$

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\sin n\pi+\frac{1}{n^2}\cos n\pi-\left(0+\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

به جای $\cos n\pi$ می‌توان $(-1)^n$ قرار داد و $\sin n\pi = 0$ خواهد بود.

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{\pi}(\frac{1}{n^2}(-1)^n - \frac{1}{n^2})$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{n}(\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2}))\cos nx$$

گزینه (۱) صحیح است.

مثال: سری فوریه کسینوسی برای تابع $f(x) = |\sin x|$ در بازه متناهی $[0, L]$ که $0 < x < 2\pi$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{\pi}$

۲) $\frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2+n}\cos\frac{n}{2}x$

۳) $\frac{n}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2-n}\cos\frac{n}{2}x$

۴) $\frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4-n^2}\cos\frac{n}{2}x$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x, L = 2\pi$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2n}|\sin x|\, dx$$

برای به‌دست آوردن علامت $|\sin x|$ ابتدا ریشه‌های آن را به‌دست می‌آوریم و اگر ریشه به‌دست آمده بین بازه انتگرال بود، انتگرال را می‌شکنیم.

$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi, ...$

از بین ریشه‌ها فقط π بین بازه انتگرال قرار دارد، پس قدر مطلق را می‌شکنیم. از صفر تا π از روی دایره مثلثاتی چون sin محورyها است پس مثبت است و از π تا 2π منفی است پس داریم:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx + \frac{1}{2\pi}\int_n^{2\pi} - \sin x\, dx$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{2\pi}(-\cos x)]_0^{\pi} + \frac{1}{2n}(\cos x)]_{\pi}^{2\pi} \Rightarrow$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}(1+1) + \frac{1}{2\pi}(1+1) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\, dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\sin x|\cos\frac{n\pi}{2\pi}x\, dx$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|\sin x|\cos\frac{n}{2}x\, dx$$

باز هم باید قدرمطلق در بازه شکسته شود پس:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos\frac{n}{2}x\, dx + \frac{1}{\pi}\int_n^{2\pi} - \sin x\cos\frac{n}{2}x\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\sin\frac{2+n}{2}x + \sin\frac{2-n}{2}x)\, dx - \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{2}(\sin\frac{2+n}{2}x + \sin\frac{2-n}{2}x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\times\frac{1}{2}(\frac{-2}{2+x}\cos\frac{2+n}{2}x - \frac{2}{2-n}\cos\frac{2+n}{2}x)]_0^{\pi}$$

$$-\frac{1}{\pi}\times\frac{1}{2}(\frac{-2}{2+n}\cos\frac{2+n}{2}x - \frac{2}{2-n}\cos\frac{2-n}{2}x)]_{\pi}^{2\pi}$$

با فرض آن‌که $n=1$ باشد داریم:

$$a_n=\frac{1}{2n}\left(\frac{-2}{3}\cos\frac{3}{2}\pi-2\cos\frac{1}{2}\pi-\left(\frac{-2}{3}-2\right)\right)-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{-2}{3}\cos\frac{3}{2}\times 2\pi\right.$$
$$\left.-2\cos\frac{1}{2}\times 2\pi-\left(\frac{-2}{3}\cos\frac{3}{2}\pi-2\cos\frac{1}{2}\pi\right)\right)$$

کسینوس مضارب فردی از $\frac{\pi}{2}$، برابر صفر خواهد بود.

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{3}+2\right)-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{3}+3\right)=0\Rightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}$$

گزینه (۱) صحیح است.

نکته

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$$
$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

نکته سری فوریه هر یک از توابع $\cos\frac{n\pi}{L}x,\sin\frac{n\pi}{L}x$ در هر بازه‌ای که طول آن $2L$ باشد، برابر خودش می‌شود. (توان دوم آن نیز برابر خودش است).

مثال: سری فوریه برای تابع $f(x)=x+\cos^2 x$ در بازه $-\pi<x<\pi$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos nx$

۲) $1+\cos 2x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}\cos nx$

۳) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2(-1)^n}{n}\sin nx$

۴) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x+\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx\sin nx$

$$f(x)=x+\cos^2 x=x+\frac{1+\cos 2x}{2}=x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$$

همان‌طوری که مشخص است و با توجه به نکته بالا سری فوریه $\cos^2 x$ برابر خودش است و فقط سری فوریه x را به‌دست می‌آوریم و این تابع نیز تابعی فرد است پس یک تابع سینوسی خواهد بود.

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{L}x,\ b_n=\frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x,\ L=$$ ابتدا- انتها

$$=\pi-(-\pi)=2\pi\Rightarrow 2L=2\pi\Rightarrow L=\pi$$

با استفاده از روش جز به جز داریم:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x.\sin nx\,dx$$

	u	dv
+	x	$\sin nx$
−	۱	$-\frac{1}{n}\cos nx$
+	۰	$-\frac{1}{n^2}\sin nx$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi}(-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx)]_{-\pi}^{\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}(\frac{-\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}\sin n\pi - (\frac{\pi}{n}\cos n(-\pi) + \frac{1}{n^2}\sin n(-\pi)$$

به‌جای $\cos n\pi$ تابع $(-1)^n$ را قرار می‌دهیم و سینوس در مضاربی از π برابر صفر است و کسینوس تابعی زوج است.
یعنی $\cos(-n\pi) = \cos n\pi$. پس:

$$b_n = \frac{1}{\pi}(-\frac{\pi}{n}(-1)^n - \frac{\pi}{n}(-1)^n) = \frac{1}{\pi} \times -2(\frac{(-1)^n \times \pi}{n}) = \frac{-2(-1)^n}{n}$$

$$\Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^n}{n}\sin nx$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^n}{n}\sin nx$$

گزینه (۳) صحیح است.

قضیه همگرایی سری فوریه

هر گاه تابع متناوب $T = 2L$ که $\alpha < x < \alpha + 2L$ و $y = f(x)$، در هر زیر فاصله‌ای متناهی از R مثل (a,b) به‌طور تکه‌ای پیوسته و هموار باشد، آن‌گاه سری فوریه f موجود به ازای هر x حقیقی است و داریم:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x)$$

که در آن $f(x^+)$ حد راست و $f(x^-)$ حد چپ تابع در نقطه x می‌باشند.
در نتیجه:

به‌عنوان مثال برای تابع زیر خواهیم داشت: اگر $f(x^+) + f(x^-)$ موجود و متناهی باشد، آنگاه f در x_0 به صورت تکه‌ای پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\cos\frac{1}{x} & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

این حد تعریف نشده است زیرا زیر رادیکال نباید منفی شود.

$$\lim_{x \to 0^-} \sqrt{x}\cos\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0^+}(0) = 0$$

پس چون $f(0^+) + f(0^-)$ موجود و متناهی نیست، در نتیجه این تابع به‌صورت تکه‌ای پیوسته نیز نمی‌باشد.

نکته هموار به معنای مشتق‌پذیری است یعنی مشتق چپ و راست موجود و متناهی باشد و یا به‌عبارت دیگر داریم:

اگر $\begin{cases} f'(x_0^+) < \infty \\ f'(x_0^-) < \infty \end{cases}$ باشد، آن‌گاه f در x_0 هموار می‌باشد.

به‌عنوان مثال در تابع $f(x)=\begin{cases} x^{2}-1 \ ; \ x>2 \\ \dfrac{1}{x} \quad ; \ x<2 \end{cases}$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x \\ \dfrac{-1}{x^{2}} \end{cases} \rightarrow f'(2)=\begin{cases} f'(2^{+})=2(2)=4 \\ f'(2^{-})=\dfrac{-1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4<\infty \\ \dfrac{-1}{4}<\infty \end{cases}$$

پس تابع f در $x=2$ به‌طور تکه‌ای هموار است یعنی مشتق چپ و راست آن در نقطه $x=2$ موجود و متناهی می‌باشد.

نکته تابع $f(x)$ در بازه (a,b) به‌طور تکه‌ای پیوسته است هرگاه $f(x)$ در همه جای بازه پیوسته باشد و در نقاط انتهایی بازه دارای حد متناهی باشد.

به‌عنوان مثال برای بررسی این‌که تابع زیر در R به‌طور تکه‌ای پیوسته است، به صورت زیر می‌توان عمل کرد:

$$f(x)=\begin{cases} x \ , x<0 \\ 2x-1 \ , 0<x<1 \\ \dfrac{1}{x} \ , x>1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^{-}} x=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^{+}}(2x-1)=-1 \end{cases}$$

پس چون $f(0^{+})+f(0^{-})$، موجود و متناهی است، در نتیجه این تابع در نقطه صفر به‌طور تکه‌ای پیوسته است. هم‌چنین:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^{-}}(2x-1)=2-1=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^{+}}\dfrac{1}{x}=1 \end{cases}$$

چون $f(1^{-})+f(1^{+})$ موجود و متناهی است، در نتیجه این تابع در نقطه یک به‌طور تکه‌ای پیوسته است.
پس چون تابع در این دو نقطه به‌طور تکه‌ای پیوسته است، پس در R نیز به‌طور تکه‌ای پیوسته می‌باشد.

مثال: اگر سری فوریه $f(x)=x+x^{2}$ با دوره متناوب $-\pi<x<\pi, T=2\pi$ به‌صورت $a_{0}+\sum a_{n}\cos nx+b_{n}\sin nx$ باشد، مقدار سری در نقطه $x=\pi$ کدام است؟

۱) π ۲) π^{2} ۳) 2π ۴) $2\pi^{2}$

$$\frac{f(x^{+})+f(x^{-})}{2}=a_{0}+\sum a_{n}\cos nx+b_{n}\sin nx$$

$$\frac{f(\pi^{+})+f(\pi^{-})}{2}=a_{0}+\sum a_{n}\cos nx+b_{n}\sin nx \Rightarrow$$

$$\frac{f(-\pi^{+})+f(\pi^{-})}{2}=\frac{-\pi+(-\pi)^{2}+\pi+\pi^{2}}{2}=\frac{2\pi^{2}}{2}=\pi^{2}$$

گزینه (۲) صحیح است.

نکته اگر تابع متناوب $y=f(x)$ با دوره تناوب $T=2L$ و $a<x<b$ مفروض باشد، آن‌گاه داریم:

۱) $f(a^{-})=f(b^{-})$ ۲) $f(b^{+})=f(a^{+})$

و در این مثال $f(\pi^{+})$ با $f(-\pi^{+})$ برابر است.

مثال: از روی سری فوریه تابع $f(x)=x$ با دوره متناوب $T=۲\pi$ که $-\pi<x<\pi$ می‌باشد، مقدار سری عددی $۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۷}+\dots$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

$$f(x)\simeq a_{\circ}+\sum_{n=۱}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

چون $f(x)=x$ یک تابع فرد است، پس سری آن سری سینوسی است و فقط کافی است b_n را به‌دست آوریم در حالی‌که $a_{\circ}$ و a_n صفرند.

$$b_n=\frac{۱}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+۲L}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx,\ ۲L=۲\pi\Rightarrow L=\pi\Rightarrow$$

$$b_n=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{-\pi+۲\pi}x\sin\frac{n\pi}{\pi}x\,dx=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx$$

برای حل انتگرال از روش جز به جز استفاده می‌کنیم:

	u	dv
+	x	$\sin nx$
−	۱	$-\frac{۱}{n}\cos nx$
+	○	$-\frac{۱}{n^۲}\sin nx$

$$\Rightarrow\int x\sin nx\,dx=\frac{-x}{n}\cos nx+\frac{۱}{n^۲}\sin nx$$

از طرفی توابع x و $\sin x\pi$ هر دو توابعی فرد هستند و $(+=-\times-)$ حاصل تابعی زوجی می‌باشد. پس برای به‌دست آوردن انتگرال در بازه متقارن به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$b_n=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin\pi x\,dx=\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\pi}x\sin nx\,dx\Rightarrow$$

$$b_n=\frac{۲}{\pi}\left(\frac{-x}{n}\cos nx+\frac{۱}{n^۲}\sin nx\right)\Big]_{\circ}^{\pi}=\frac{۲}{\pi}\left[\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi+\frac{۱}{n^۲}\sin n\pi\right)-\left(\circ+\frac{۱}{n^۲}\sin\circ\right)\right]$$

تابع سینوس، در مضاربی از π برابر صفر است و $\cos n\pi$ با $(-۱)^n$ هم‌ارز است پس داریم:

$$b_n=\frac{۲}{\pi}\left(\frac{-\pi}{n}(-۱)^n\right)=\frac{-۲}{n}(-۱)^n$$

$$\Rightarrow f(x)=x=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{-۲}{n}(-۱)^n\sin nx$$

حال باید مقدار سری عددی را با توجه به سری فوریه به‌دست آمده، به‌دست آوریم. سپس به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{۲}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{-۲}{n}(-۱)^n\sin nx\Rightarrow$$

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{۲}=۲\sin x-\frac{۲}{۲}\sin ۲x+\frac{۲}{۳}\sin ۳x-\frac{۲}{۴}\sin ۴x+\frac{۲}{۵}\sin ۵x+\dots$$

پس به‌جای x مقدار $\frac{\pi}{۲}$ را قرار می‌دهیم:

$$x=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\frac{f(\frac{\pi^+}{۲})+f(\frac{\pi^-}{۲})}{۲}=۲-\frac{۲}{۳}+\frac{۲}{۵}-\frac{۲}{۷}+\frac{۲}{۹}+\dots$$

$$\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}=2(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...)\xrightarrow{\times\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...=\frac{\pi}{4}$$

گزینه (۴) صحیح است.

نکته مقدار x که مورد نظر است باید در بازه $(-\pi,\pi)$ باشد و با توجه به گزینه‌ها و سری داده شده در صورت سوال، این مقدار برابر $\frac{\pi}{2}$ می‌باشد.

مثال: با توجه به سری فوریه تابع $f(x)=\frac{x^2}{4}$ با دوره متناوب $T=2\pi$ که $-\pi<x<\pi$ می‌باشد، مقداری سری عددی $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi^2}{6}$ ۴) $\frac{\pi^2}{3}$

$$T=2\pi\Rightarrow 2L=2\pi\Rightarrow L=\pi$$

$$f(x)\sim a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x)$$

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L}f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\pi+2\pi}\frac{x^2}{4}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{4}dx$$

تابع $\frac{x^2}{4}$ تابعی زوج است زیرا:

$$F(-x)=\frac{(-x)^2}{4}=\frac{x^2}{4}=f(x)$$

پس برای به‌دست آوردن انتگرال آن در بازه متقارن، انتگرال صفر تا بازه مشتق را به‌دست می‌آوریم و سپس آن‌را دو برابر می‌کنیم:

$$\Rightarrow a_0=\frac{1}{2\pi}\times 2\int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{4}dx=\frac{1}{\pi}(\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}x^3)\Big]_0^{\pi}=\frac{1}{12\pi}(\pi^3-0)=\frac{\pi^3}{12\pi}$$

$$\Rightarrow a_0=\frac{\pi^2}{12}$$

از طرف دیگر چون تابع $\frac{x^2}{4}$ زوج است، پس سری فوریه آن کسینوسی است یعنی b_n برابر صفر است و فقط باید a_n را به‌دست آوریم. در نتیجه داریم:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2L}f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\pi+2\pi}\frac{x^2}{4}\times\cos\frac{n\pi}{\pi}x\,dx$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{4}\times\cos nx\,dx$$

همان‌طور که گفته شد توابع $\frac{x^2}{4}$ و تابع $\cos nx$ توابع زوج (+) هستند؛ پس کل تابع $(+\times+=+)$ زوج می‌باشد. پس حاصل انتگرال به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$a_n=\frac{1}{n}\times 2\int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{4}\times\cos nx\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}x^2\cos nx\,dx$$

و حاصل انتگرال را از روش جز به جز به‌دست می آوریم:

	u	dv
+	x^2	$\cos nx$
−	$2x$	$\frac{1}{n}\sin nx$
+	2	$\frac{-1}{n^2}\cos nx$
−	0	$\frac{-1}{n^3}\sin nx$

$$\Rightarrow \int x^2 \cos nx\, dx = \frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2x}{n^2} - \frac{2}{n^3}\sin nx$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2x}{n^2}\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx)\right]_0^{\pi} \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{\pi^2}{n}\sin n\pi + \frac{2\pi}{n^2}\cos n\pi - \frac{2}{n^3}\sin n\pi\right) - (0+0-0)\right]$$

تابع سینوس در مضاربی از π برابر صفر است و تابع $\cos n\pi$ با $(-1)^n$ هم‌ارز است پس:

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{n^2}(-1)^n\right) \Rightarrow a_n = \frac{1}{n^2}(-1)^n$$

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \Rightarrow$$

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{12} + \frac{(-1)^1}{1}\cos x + \frac{(-1)^2}{2^2}\cos 2x + \frac{(-1)^3}{3^2}\cos 3x + \ldots \Rightarrow$$

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{12} - \cos x + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{9}\cos 3x + \ldots$$

با توجه به سری عددی داده شده باید همه جملات در یک (۱-) ضرب شود پس باید تابع در نقطه $x = \pi$ بررسی شود:

$$x = \pi \Rightarrow \frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{\pi^2}{12} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots$$

همان‌طور که قبلاً هم گفته شده $f(-\pi^+) = f(\pi^+)$:

$$\frac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{\pi^2}{12} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots$$

و با توجه به تابع $f(x) = \frac{x^2}{4}$ و به‌دست آوردن حد چپ و راست آن در نقطه $x = \pi$ داریم:

$$\frac{\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4}}{2} = \frac{\pi^2}{12} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots \Rightarrow$$

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \Rightarrow$$

$$\frac{3\pi^2 - \pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

گزینه (۳) صحیح است.

نکته اگر در سری فوریه حاصل $\left(\frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\right)$ و سری عددی مفروض $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)$، توان n برابر و یکسان باشند، در این صورت از قضیه همگرایی سری فوریه باید استفاده کرد.

مثال: اگر در تابع $f(x)=x^۲$ با دوره تناوب $T=۲\pi$ که $-\pi<x<\pi$ است، مفروض باشد، با توجه به سری فوریه آن، مقدار سری عددی $۱-\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}-\frac{۱}{۴^۲}+...$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^۲}{۳}$ ۲) $\frac{\pi^۲}{۱۲}$ ۳) $\frac{\pi^۲}{۶}$ ۴) $\frac{\pi^۲}{۴}$

تابع $f(x)=x^۲$ تابعی زوج است که سری فوریه آن نیز کسینوسی است پس b_n برابر صفر است و فقط باید $a_n, a_\circ$ را به‌دست آوریم:

$$a_\circ=\frac{۱}{۲L}\int_{\alpha}^{\alpha+۲L} f(x)\,dx,\ ۲L=T=۲\pi\Rightarrow L=\pi$$

$$\Rightarrow a_\circ=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{-\pi+۲\pi}x^۲\,dx=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^۲\,dx$$

چون $x^۲$ تابعی زوج است، انتگرال آن در بازه متقارن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$a_\circ=\frac{۱}{۲\pi}\times۲\int_\circ^{\pi}x^۲\,dx=\frac{۱}{\pi}(\frac{۱}{۳}x^۳)]_\circ^{\pi}=\frac{۱}{\pi}(\frac{\pi^۳}{۳}-\circ)=\frac{۱}{\pi}\times\frac{\pi^۳}{۳}=\frac{\pi^۲}{۳}$$

$$a_n=\frac{۱}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+۲L}f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{-\pi+۲L}x^۲\cos\frac{n\pi}{\pi}x\,dx$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^۲\cos nx\,dx$$

توابع $\cos nx, x^۲$ هر دو زوج‌اند پس کل تابع نیز زوج $(+\times+=+)$ می‌باشد و داریم:

$$a_n=\frac{۱}{\pi}\times۲\int_\circ^{\pi}x^۲\cos nx\,dx$$

برای به‌دست آوردن انتگرال از روش جز به جز استفاده می‌کنیم:

	u	dv
+	$x^۲$	$\cos nx$
−	$x۲$	$\frac{۱}{n}\sin nx$
+	۲	$\frac{-۱}{n^۲}\cos nx$
−		$\frac{-۱}{n^۳}\sin nx$

$$\Rightarrow\int x^۲\cos nx\,dx=\frac{x^۲}{n}\sin nx+\frac{۲x}{n^۲}\cos nx-\frac{۲}{n^۳}\sin nx$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{۲}{\pi}(\frac{x^۲}{n}\sin nx+\frac{۲x}{n^۲}\cos nx-\frac{۱}{n^۳}\sin nx)]_\circ^{n}$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{۲}{\pi}[(\frac{\pi^۲}{n}\sin nx+\frac{۲\pi}{n^۲}\cos n\pi-\frac{۱}{n^۳}\sin n\pi)-(\circ+\circ-\circ)]$$

تابع $\cos n\pi$ با تابع $(-۱)^n$ هم‌ارز است و تابع سینوس در مضاربی از π برابر صفر است پس داریم:

$$a_n=\frac{۲}{\pi}(\frac{۲\pi}{n^۲}(-۱)^n)=\frac{۴}{n^۲}(-۱)^n$$

$$\Rightarrow x^۲\sim\frac{n^۲}{۳}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴}{n^۲}(-۱)^n\cos nx\Rightarrow$$

$$x^۲\sim\frac{\pi^۲}{۳}+\frac{۴}{۱^۲}(-۱)^۱\cos x+\frac{۴}{۲^۲}(-۱)^۲\cos ۲x+\frac{۴}{۳^۲}(-۱)^۳\cos ۳x+...\Rightarrow$$

$$x^2 \sim \frac{n^2}{3} + 4(-\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x \frac{-1}{9}\cos 3x + \ldots)$$

با توجه به سری خواسته شده باید در $x = 0$ تابع را بررسی کنیم:

$$x = 0 \Rightarrow \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{\pi^2}{3} + 4(-1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \ldots)$$

و از طرف دیگر حد چپ و راست تابع $f(x) = x^2$ در نقطه صفر برابر صفر است، پس داریم:

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4(-1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \cdots) \Rightarrow \frac{-\pi^2}{3} = -4(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \ldots)$$

$$\Rightarrow \frac{n^2}{12} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots$$

گزینه (۲) صحیح است.

اتحاد پارسوال

اگر سری فوریه تابع $f(x)$ با دوره تناوب $T = 2L$ و $\alpha < x < \alpha + 2L$ به‌صورت $f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x)$ باشد، آن‌گاه تساوی پارسوال را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L}(f(x))^2\,dx = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

مثال: به‌کمک اتحاد پارسوال و به‌دست آوردن سری فوریه کسینوسی تابع $f(x) = x$، $0 < x < 1$، حاصل سری $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{9}$ ۲) $\frac{\pi^2}{9}$ ۳) $\frac{\pi^2}{96}$ ۴) $\frac{\pi^2}{16}$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \frac{1}{1}\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{2}{1}\int_0^1 x\cos\frac{n\pi}{1}x\,dx$$

حاصل انتگرال را به‌روش جز به جز به‌دست می‌آوریم:

	u	dv
+	x	$\cos n\pi x$
−	1	$\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x$
+	0	$\frac{-1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$

$$\Rightarrow \int x\cos n\pi x\,dx = \frac{x}{n\pi}\sin n\pi x + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$$

$$a_n \Rightarrow 2\int x\cos n\pi x = 2(\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x)]_0^1 \Rightarrow$$

$$a_n = 2[(\frac{1}{n\pi}\sin n\pi + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi) - (0 + \frac{1}{n^2\pi^2})] \Rightarrow$$

$$a_n = 2(\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2} - \frac{1}{n^2\pi^2}) = 2\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}$$

پس سری فوریه کسینوسی تابع $f(x)=x$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$f(x)=x\sim\frac{۱}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}۲\frac{(-۱)^n-۱}{n^۲\pi^۲}\cos n\pi x$$

و طبق اتحاد پارسوال داریم:

$$\Rightarrow\frac{۱}{۱}\int_{-۱}^{۱}x^۲\,dx=۲(\frac{۱}{۲})^۲+\sum_{n=۱}^{\infty}۴(\frac{(-۱)^n-۱}{n^۲\pi^۲})^۲$$

$$\Rightarrow\frac{x^۳}{۳}\Big]_{-۱}^{۱}=\frac{۱}{۲}+۴(\frac{۴}{\pi^۴}+\circ+\frac{۴}{۹\pi^۴}+\circ+\frac{۴}{۲۵\pi^۴}+\dots)$$

$$\Rightarrow(\frac{۱}{۳}-\frac{-۱}{۳})=\frac{۱}{۲}+\frac{۱۶}{\pi^۴}(۱+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۲۵}+\dots)\Rightarrow\frac{۱}{۱۶}=\frac{۱۶}{\pi^۴}(۱+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۲۵}+\dots)\Rightarrow$$

$$\frac{\pi^۴}{۹۶}=۱+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۲۵}+\dots$$

گزینه (۳) صحیح است.

تعریف انتگرال فوریه

تابع $y=f(x)$ که $-\infty<x<\infty$ می‌باشد را به‌طور مطلق انتگرال‌پذیر می‌گویند هرگاه حاصل $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ کوچک‌تر از بی‌نهایت شود. و یا به‌عبارت دیگر حاصل این انتگرال موجود و متناهی باشد.

مثال: کدام یک از توابع زیر در بازه داده شده به‌طور مطلق انتگرال‌پذیر هستند؟

۱) $f(x)=|x|$

۲) $f(x)=\begin{cases}e^{-۲x} & x>\circ\\ ۱ & x<\circ\end{cases}$

۳) $f(x)=\begin{cases}e^{-۳x} & x>\circ\\ \circ & x<\circ\end{cases}$

۴) $f(x)=e^{x}$

در این مثال باید حاصل $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ هر یک از گزینه‌ها را به‌دست آوریم.

$$۱)\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=\int_{-\infty}^{\infty}|x|dx$$

این تابع، تابعی زوج است زیرا:

$$f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$$

پس برای حل انتگرال آن در بازه متقارن به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|dx=۲\int_{\circ}^{\infty}|x|dx=۲\int_{\circ}^{\infty}x\,dx=۲\times\frac{x^۲}{۲}\Big]_{\circ}^{\infty}=\infty-\circ=\infty$$

چون حاصل انتگرال موجود و متناهی نیست $(\infty\not<\infty)$ پس این تابع به‌طور مطلق انتگرال‌پذیر نمی‌باشد.

نکته برای شکستن قدر مطلق ابتدا ریشه داخل قدرمطلق را به‌دست می‌آوریم. اگر ریشه بین بازه انتگرال بود انتگرال را می‌شکنیم، در غیر این صورت علامت داخل قدرمطلق را به دست می‌آوریم و قدر مطلق را حذف می‌کنیم.

$$\int_{\circ}^{\infty}|x|dx\to x=\circ$$

$x=\circ$ بین بازه انتگرال نیست و x در بازه $(\circ,\infty)$ همواره مثبت است پس قدرمطلق آن حذف می‌شود.

$$\int_{\circ}^{\infty}|x|dx=\int_{\circ}^{\infty}x\,dx$$

$$۲)\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=\int_{-\infty}^{\circ}|۱|dx+\int_{\circ}^{\infty}|e^{-۲x}|dx=\int_{-\infty}^{\circ}۱dx+\int_{\circ}^{\infty}e^{-۲x}dx$$