به نام خداوند بخشنده مهربان

موسسه آموزش عالی آزاد ماهان
www.mahan.ac.ir

فیزیک عمومی(۲)

الکترومغناطیس

مجموعه: فیزیک

(علوم و فناوری نانو – نانو فیزیک)

مؤلف:

احسان تنهایی

آمادگی آزمون دکتری

ماهان
مشاوران صعود

تنهایی، احسان
فیزیک عمومی (۲) الکترومغناطیس مجموعه: فیزیک (فیزیک دریا ـ نانوفیزیک – هواشناسی ـ فیزیک پزشکی ـ برق / مخابرات)/ احسان تنهایی
مشاوران صعود ماهان: ۱۴۰۱
جدول، نمودار (آمادگی آزمون دکتری مجموعه فیزیک)
۳۸۰ص: ISB/N: 978-600-458-652-8
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
فارسی ـ چاپ اول
الکترومغناطیس
احسان تنهایی
ج ـ عنوان
کتابخانه ملی ایران ۵۷۵۱۸۹۵

انتشارات مشاوران صعود ماهان

موسسه آموزش عالی آزاد ماهان
www.mahan.ac.ir

❑ **نام کتاب:** .... فیزیک عمومی (۲) الکترومغناطیس
❑ **مدیران مسئول:** .... مجید و هادی سیّاری
❑ **مولف:** .... احسان تنهایی
❑ **مسئول برنامه‌ریزی و تولید محتوا:** .... سمیه بیگی
❑ **ناشر:** .... مشاوران صعود ماهان
❑ **نوبت و تاریخ چاپ:** .... اول /۱۴۰۱
❑ **تیراژ:** .... ۱۰۰۰ نسخه
❑ **قیمت:** ۳/۴۹۰/۰۰۰ریال
❑ **شابک:** ISBN۹۷۸-۶۰۰-۴۵۸-۶۵۲-۸

انتشارات مشاوران صعود ماهان:تهران ـ خیابان ولیعصر، بالاتر از تقاطع ولیعصر مطهری، پلاک ۲۰۵۰
تلفن: ۸۸۱۰۰۱۱۳ و ۸۸۴۰۱۳۱۳

مقدمه ناشر

بنام خدا

ایمان داریم که هر تغییر و تحول بزرگی در مسیر زندگی بدون تحول معرفت و نگرش میسر نخواهد بود. پس بیایید با اندیشه توکل، تفکر، تلاش و تحمل در توسعه دنیای فکریمان برای نیل به آرامش و آسایش توأمان اولین گام را برداریم. چون همگی یقین داریم دانایی، توانایی می‌آورد.

شاد باشید و دلی را شاد کنید

برادران سیاری

مقدمه مولف

با توجه به منابع پراکنده موجود در این درس و تدریس آن در دانشگاه ها به صورت نادرست در هر رشته، اقدام به تالیف منبعی جامع که در بر گیرنده‌ی تمامی مطالب موجود در فیزیک پایه است نمودم که بتواند تا مقطع دکتری نانو فیزیک، فیزیک و فیزیک پزشکی مورد استفاده قرار گیرد.

به تمامی دانشجویان دوره‌ی کارشناسی و نیز دانشجویان کارشناسی ارشد توصیه می‌کنم که بعد از مطالعه‌ی منابع درس فیزیک عمومی در لیست منابع پایانی آورده‌ام، به فهم تمامی مطالب این کتاب در کنار سوالات موجود در هر بخش بپردازند.

در این کتاب تمامی نکات و مفاهیم اساسی مربوط به مکانیک کلاسیک، الکترومغناطیس و ترمودینامیک با زبانی ساده ذکر شده و در پایان هر مبحث با بیان گروهی از مثال‌ها پیرامون آن سعی بر درک بهتر مطالب شده است. لازم به ذکر است که تمامی مطالب و سوالات به نحوی طرح شده‌اند که مشکلات دانشجویان در این کتاب برطرف شود.

در بخش پایانی کتاب سوالات بنیادی مربوط به این درس در گروه فیزیک و نیز گروه پزشکی آورده شده است و برای اینکه دانشجو در ریاضیات دچار مشکل نشود توصیه می‌کنم از پیوست‌های موجود در انتهای کتاب استفاده شود.

با سپاس بیکران

احسان تنهایی

(نانو فیزیک دانشگاه تهران)

فصل اول

الکترواستاتیک

آنچه که در این فصل می‌خوانیم

- ☑ آنالیز برداری و المان‌ها
- ☑ روابط ریاضی کاربردی
- ☑ قانون کولن
- ☑ میدان الکتریکی و خطوط میدان
- ☑ قانون گوس ــ شار الکتریکی
- ☑ دو قطبی الکتریکی
- ☑ معادلات پواسون
- ☑ مفهوم بار تصویری به طور ساده
- ☑ دی‌الکتریک‌ها و قطبش
- ☑ خازن‌ها و انرژی الکتریکی

فصل اول

آنالیز برداری و الکترو استاتیک

آنالیز برداری و کاربرد آن در الکترو مغناطیس

قبل از شروع فصل‌های الکترومغناطیس لازم است که دستگاه‌های مختصات و عملگرهای دیفرانسیلی مهم را که در مطالعه الکترومغناطیس بسیار کاربردی می‌باشند را معرفی کنیم.

۱- دستگاه مختصات دکارتی

الف) جزء طول(المان طول):

$$\overrightarrow{dr} = \hat{i}dx + \hat{j}dy + \hat{k}dz$$

ب) جزء سطح (المان سطح):

همانطورکه می‌دانیم سطح، بردار است پس می‌توان نوشت:

$$d\vec{A} = \hat{i}dydz$$

$$d\vec{A} = \hat{j}dxdz$$

$$d\vec{A} = \hat{k}dxdy$$

ج) جزء حجم(المان حجم):

$$dV = dxdydz$$

۲-دستگاه مختصات استوانه‌ای

الف) جزء طول(المان طول)

$$d\vec{r} = \hat{\rho}d\rho + \hat{\phi}\rho d\phi + \hat{k}dz$$

ب) جزء سطح (المان سطح):

$$d\vec{A} = \hat{\rho}(\rho d\phi)(dz)$$

$$d\vec{A} = \hat{\phi}(d\rho)(dz)$$

$$d\vec{A} = \hat{k}(\rho d\phi)(d\rho)$$

ج) جزء حجم(المان حجم):

$$dV = \rho d\rho d\phi dz$$

۳- دستگاه مختصات کروی

الف)جزء سطح (المان سطح):

$$d\vec{r} = \hat{r}dr + \hat{\theta}rd\theta + \hat{\phi}(r\sin\theta)d\phi$$

ب)جزء سطح (المان سطح):

$$d\vec{A} = \hat{r}(rd\theta)(r\sin\theta d\phi)$$
$$d\vec{A} = \hat{\theta}(dr)(r\sin\theta d\phi)$$
$$d\vec{A} = \hat{\phi}(dr)(rd\theta)$$

ج)جزء حجم(المان حجم):

$$dV = r\sin\theta dr d\theta d\phi$$

عملگر گرادیان

اگرعملگر دیفرانسیلی برداری دل بر روی یک تابع نرده‌ای اثر کند برداری به نام گرادیان ساخته می‌شود. شکل این بردار در سه دستگاه مختصات عبارتست از:

$\vec{\nabla}F = \frac{\partial F}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\hat{k}$	دکارتی
$\vec{\nabla}F = \frac{\partial F}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \phi}\hat{\phi}$	کروی
$\vec{\nabla}F = \frac{\partial F}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial F}{\partial z}\hat{k}$	استوانه‌ای
$\vec{\nabla}F = \frac{1}{h_1}\frac{\partial F}{\partial q_1}\hat{q}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial F}{\partial q_2}\hat{q}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial F}{\partial q_3}\hat{q}_3$	حالت کلی

عملگر دیورژانس

از حاصل ضرب نقطه عملگر دل در یک بردار، واگرایی بردار محاسبه می‌شود که برای سه دستگاه مختصات داریم:

$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	دکارتی
$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}A_\phi$	کروی
$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	استوانه‌ای
$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(A_2h_1h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(A_3h_1h_2)\right]$	حالت کلی

عملگرکرل (چرخش)

تاو یک بردار به صورت حاصل‌ضرب خارجی عملگر دل در یک بردار می‌باشد و در سه دستگاه مختصات داریم:

دکارتی	$\vec{\nabla}.\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$
کروی	$\vec{\nabla}.\vec{A}=\begin{vmatrix}\frac{\hat{r}}{r^2\sin\theta} & \frac{\hat{\theta}}{r\sin\theta} & \frac{\hat{\phi}}{r}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi}\\ \frac{A_r}{r^2\sin\theta} & \frac{A_\theta}{r\sin\theta} & \frac{A_\phi}{r}\end{vmatrix}$
استوانه‌ای	$\vec{\nabla}.\vec{A}=\begin{vmatrix}\frac{\hat{\rho}}{\rho} & \hat{\phi} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{A_\rho}{\rho} & A_\phi & \frac{A_z}{\rho}\end{vmatrix}$
حالت کلی	$\vec{\nabla}.\vec{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}h_1\hat{q}_1 & h_2\hat{q}_2 & h_3\hat{q}_3\\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3}\\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3\end{vmatrix}$

نکته:

هرگاه تاو یک کمیت برداری صفحه باشد میدان برداری است داریم.

عملگر لاپلاسین

واگرایی گرادیان یک میدان نرده‌ای را عملگر لاپلاس می‌نامند و به صورت زیر نمایش می‌دهند.

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\phi=\nabla^2\phi$$

این عملگر در دستگاه‌های مختلف به صورت زیر است:

دکارتی	$\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
کروی	$\nabla^2 f=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$
استوانه‌ای	$\nabla^2 f=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho})+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

تذکر

در تمامی عملگرهای فوق q مختصه‌ی تعمیم یافته و h معرف ضرایب سنجه‌ی مربوط به هر دستگاه مختصات است.

نکته

می‌توان گروهی از روابط عملگری را به صورت زیر دسته‌بندی نمود:

۱) $\vec{\nabla}(fg)=g\vec{\nabla}f+f\vec{\nabla}g$

۲) $\vec{\nabla}.(f\vec{A})=\vec{\nabla}f.\vec{A}+f\vec{\nabla}.\vec{A}$

۳) $\vec{\nabla}\times(f\vec{A})=\vec{\nabla}f\times\vec{A}+f\vec{\nabla}\times\vec{A}$

۴) $\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{B})=\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})+(\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B}+(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A}+\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$

۵) $\vec{\nabla}.(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}.(\vec{\nabla}\times\vec{A})-\vec{A}.(\vec{\nabla}\times\vec{B})$

۶) $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}f)=\nabla^{۲}f$

۷) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}f)=۰$

۸) $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{A})=۰$

۹) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A})-\nabla^{۲}\vec{A}$

۱۰) $\vec{\nabla}f(r)=\frac{\vec{r}}{r}\frac{df(r)}{dr}$

۱۱) $\vec{\nabla}.F(r)=\frac{\vec{r}}{r}.\frac{d\vec{F}}{dr}$

۱۲) $\vec{\nabla}(\frac{۱}{r})=-\frac{\vec{r}}{r^{۳}}$

روابط پر کاربرد در الکترومغناطیس

در اینجا لازم است به روابط اساسی در مثلثات و انتگرال‌گیری اشاره نمود که استفاده از آنها بارها تکرار می‌شود:

(الف) بسط دوجمله‌ای:

$$(۱+x)^{n}=۱+nx+\frac{n(n-۱)}{۲!}x^{۲}+\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳!}x^{۳}$$

$$+\ldots+\binom{n}{r}x^{r}+\ldots\ ,\quad |x|<۱$$

$$(۱-x)^{n}=۱-nx+\frac{n(n-۱)}{۲!}x^{۲}-\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳!}x^{۳}$$

$$+\ldots+(-۱)^{r}\binom{n}{r}x^{r}+\ldots\ ,\quad |x|<۱$$

که در اینجا ضرایب دوجمله‌ای عبارت‌اند از:

$$\binom{n}{r}\equiv\frac{n!}{(n-r)!r!} \qquad (۱$$

$$(۱\pm x)^{۱/۲}=۱\pm\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۸}x^{۲}\pm\frac{۱}{۱۶}x^{۳}-\ldots \qquad (۲$$

$$(۱\pm x)^{۱/۳}=۱\pm\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۹}x^{۲}\pm\frac{۵}{۸۱}x^{۳}-\ldots \qquad (۳$$

$$(۱\pm x)^{-۱/۲}=۱\mp\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۸}x^{۲}\mp\frac{۵}{۱۶}x^{۳}+\ldots \qquad (۴$$

$$(1\pm x)^{-1/3}=1\mp\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2\mp\frac{14}{81}x^3+\dots \tag{۵}$$

$$(1\pm x)^{-1}=1\mp x+x^2\mp x^3+\dots \tag{۶}$$

$$(1\pm x)^{-2}=1\mp 2x+3x^2\mp 4x^3+\dots \tag{۷}$$

$$(1\pm x)^{-3}=1\mp 3x+6x^2\mp 10x^3+\dots \tag{۸}$$

برای همگرایی تمام سری‌های بالا، باید داشته باشیم $|x|<1$.

ب) روابط مثلثاتی:

$$\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B \tag{۹}$$

$$\cos(A\pm B)=\cos A\cos B\pm\sin A\sin B \tag{۱۰}$$

$$\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A} \tag{۱۱}$$

$$\cos 2A=2\cos^2 A-1 \tag{۱۲}$$

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos A) \tag{۱۳}$$

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos A) \tag{۱۴}$$

$$\sin^2 A=\frac{1}{2}(1-\cos 2A) \tag{۱۵}$$

$$\sin^3 A=\frac{1}{4}(3\sin A-\sin 3A) \tag{۱۶}$$

$$\sin^4 A=\frac{1}{8}(3-4\cos 2A+\cos 4A) \tag{۱۷}$$

$$\cos^2 A=\frac{1}{2}(1+\cos 2A) \tag{۱۸}$$

$$\cos^3 A=\frac{1}{4}(3\cos A+\cos 3A) \tag{۱۹}$$

$$\cos^4 A=\frac{1}{8}(3+4\cos 2A+\cos 4A) \tag{۲۰}$$

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B} \tag{۲۱}$$

$$\tan^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{1+\cos A} \tag{۲۲}$$

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \tag{۲۳}$$

۲۴) $$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{۲}$$

۲۵) $$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

پ) سری‌های مثلثاتی:

۲۶) $$\sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \frac{x^۷}{۷!} + \ldots$$

۲۷) $$\cos x = ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} - \frac{x^۶}{۶!} + \ldots$$

۲۸) $$\tan x = x + \frac{x^۳}{۳} + \frac{۲}{۱۵} x^۵ + \ldots \quad , \quad |x| < \pi/۲$$

۲۹) $$\sin^{-۱} x = x + \frac{x^۳}{۶} + \frac{۳}{۴۰} x^۵ + \ldots \quad , \quad \begin{cases} |x| < ۱ \\ |\sin^{-۱} x| < \pi/۲ \end{cases}$$

۳۰) $$\cos^{-۱} x = \frac{\pi}{۲} - x - \frac{x^۳}{۶} - \frac{۳}{۴۰} x^۵ - \ldots \quad , \quad \begin{cases} |x| < ۱ \\ ۰ < \cos^{-۱} x < \pi \end{cases}$$

۳۱) $$\tan^{-۱} x = x - \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵} - \frac{x^۷}{۷} + \ldots \quad , \quad |x| < ۱$$

ت) سری‌های نمایی و لگاریتمی:

۳۲) $$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \ldots = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

۳۳) $$\ln(۱+x) = x - \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳} - \frac{x^۴}{۴} + \ldots \quad , \quad |x| < ۱ \quad , \quad x = ۱$$

۳۴) $$\ln\left[\sqrt{(x^۲/a^۲)+۱} + (x/a)\right] = \sinh^{-۱} x/a$$

۳۵) $$= -\ln\left[\sqrt{(x^۲/a^۲)+۱} - (x/a)\right]$$

ث) کمیت‌های مختلط:

۳۶) صورت دکارتی: $z = x - iy$ مزدوج مختلط: $i = \sqrt{-۱}$ و $z^* = x - iy$

۳۷) صورت قطبی: $z = |z| e^{i\theta}$

۳۸) $z^* = |z| e^{-i\theta}$

۳۹) $zz^* = |z|^۲ = x^۲ + y^۲$

۴۰) قسمت حقیقی z: $\operatorname{Re} z = \frac{۱}{۲}(z + z^*) = x$

۴۱) قسمت موهومی z: $\operatorname{Im} z = \frac{-۱}{۲}(z - z^*) = y$

۴۲) فرمول اویلر z: $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$

ج) توابع هذلولی:

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$ (۴۳

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$ (۴۴

$$\tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$ (۴۵

$$\sin ix = i \sinh x$$ (۴۶

$$\cos ix = \cosh x$$ (۴۷

$$\sinh ix = i \sin x$$ (۴۸

$$\cosh ix = \cos x$$ (۴۹

$$\sinh^{-1} x = \tanh^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^{2}+1}}\right)$$ (۵۰

$$= \ln\left(x + \sqrt{x^{2}+1}\right)$$

$$= \cosh^{-1}\left(\sqrt{x^{2}+1}\right) \quad , \quad \begin{cases} >0 \quad , \quad x > 0 \\ <0 \quad , \quad x < 0 \end{cases}$$ (۵۱

$$\cosh^{-1} x = \pm \tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^{2}-1}}{x}\right) \quad , \quad x > 1$$

$$= \pm \ln\left(x + \sqrt{x^{2}-1}\right) \quad , \quad x > 1$$ (۵۲

$$= \pm \sinh^{-1}\left(\sqrt{x^{2}-1}\right) \quad , \quad x > 1$$ (۵۳

$$\frac{d}{dy} \sinh y = \cosh y$$ (۵۴

$$\frac{d}{dy} \cosh y = \sinh y$$ (۵۵

$$\sinh(x_{1} + x_{2}) = \sinh x_{1} \cosh x_{2} + \cosh x_{1} \sinh x_{2}$$ (۵۶

$$\cosh(x_{1} + x_{2}) = \cosh x_{1} \cosh x_{2} + \sinh x_{1} \sinh x_{2}$$ (۵۷

$$\cosh^{2} x - \sinh^{2} x = 1$$ (۵۸

(چ) انتگرال‌های توابع جبری

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad , \quad \left|\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right| < \frac{\pi}{2}$$ (۵۹

$$\int \frac{xdx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2}\ln(a^2+x^2)$$ (۶۰

$$\int \frac{dx}{x(a^2+x^2)} = \frac{1}{2a^2}\ln\left(\frac{x^2}{a^2+x^2}\right)$$ (۶۱

$$\int \frac{dx}{a^2x^2-b^2} = \frac{1}{2ab}\ln\left(\frac{ax-b}{ax+b}\right)$$ (۶۲

$$= -\frac{1}{ab}\coth^{-1}\left(\frac{ax}{b}\right)$$ (۶۳

$$= -\frac{1}{ab}\tanh^{-1}\left(\frac{ax}{b}\right) \quad , \quad a^2x^2 < b^2$$ (۶۴

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx}$$ (۶۵

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$ (۶۶

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$$ (۶۷

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+2ax+b\right) \quad , \quad a>0$$ (۶۸

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\sinh^{-1}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) \quad , \quad \begin{cases} a>0 \\ 4ac>b^2 \end{cases}$$ (۶۹

$$= -\frac{1}{\sqrt{-a}}\sin^{-1}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right) \quad , \quad \begin{cases} a<0 \\ b^2<4ac \\ |2ax+b| < \sqrt{b^2-4ac} \end{cases}$$ (۷۰

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$ (۷۱

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\frac{1}{\sqrt{c}}\sinh^{-1}\left(\frac{bx+2c}{|x|\sqrt{4ac-b^2}}\right) \quad , \quad \begin{cases} c>0 \\ 4ac>b^2 \end{cases}$$ (۷۲

$$= \frac{1}{\sqrt{-c}}\sin^{-1}\left(\frac{bx+2c}{|x|\sqrt{b^2-4ac}}\right) \quad , \quad \begin{cases} c<0 \\ b^2>4ac \end{cases}$$ (۷۳

$$= -\frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left(\frac{2\sqrt{c}}{x}\sqrt{ax^2+bx+c}+\frac{2c}{x}+b\right) \quad , \quad c>0$$ (۷۴

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\frac{4ac-b^2}{8a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$ (۷۵

ح) انتگرال‌های توابع مثلثاتی:

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x$$ (۷۶

$$\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x$$ (۷۷

$$\int \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\tan^{-1}\left[\frac{a\tan(x/2)+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right] \quad , \quad a^2>b^2$$ (۷۸

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\tan^{-1}\left[\frac{(a-b)\tan(x/2)}{\sqrt{a^2-b^2}}\right] \quad , \quad a^2>b^2$$ (۷۹

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^2} = \frac{b\sin x}{(b^2-a^2)(a+b\cos x)}-\frac{a}{b^2-a^2}\int \frac{dx}{a+b\cos x}$$ (۸۰

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x|$$ (۸۱

$$\int \tanh x dx = \ln\cosh x$$ (۸۲

$$\int e^{ax}\sin x dx = \frac{e^{ax}}{a^2+1}(a\sin x-\cos x)$$ (۸۳

$$\int e^{ax}\sin^2 x dx = \frac{e^{ax}}{a^2+4}\left(a\sin^2 x-2\sin x\cos x+\frac{2}{a}\right)$$ (۸۴

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\pi/a}$$ (۸۵

خ) فرمول‌ها و قضایای برداری:

۸۶) $$\nabla(f+g)=\nabla f+\nabla g$$

۸۷) $$\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\nabla\cdot\mathbf{A}+\nabla\cdot\mathbf{B}$$

۸۸) $$\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\nabla\times\mathbf{A}+\nabla\times\mathbf{B}$$

۸۹) $$\nabla(fg)=(\nabla f)g+f(\nabla g)$$

۹۰) $$\nabla\cdot(f\mathbf{A})=(\nabla f)\cdot\mathbf{A}+f(\nabla\cdot\mathbf{A})$$

۹۱) $$\nabla\times(f\mathbf{A})=(\nabla f)\times\mathbf{A}+f(\nabla\times\mathbf{A})$$

۹۲) $$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})$$

۹۳) $$\nabla\cdot(A\times B)=(\nabla\times A)\cdot B-(\nabla\times B)\cdot A$$

۹۴) $$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}+\mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B})-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}-\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})$$

۹۵) $$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=(\mathbf{C}\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}\quad\text{(Triple scalar product)}$$

۹۶) $$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\quad\text{(BAC}-\text{CAB rule)}$$

۹۷) $$\int_V\nabla\cdot\mathbf{A}du=\oint_S\mathbf{A}da\quad\text{(Divergence theorem)}$$

۹۸) $$\int_V\nabla\times\mathbf{A}dV=\oint_S(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{A})\,da=\oint_S d\mathbf{a}\times\mathbf{A}$$

۹۹) $$\int_V\nabla\Phi dV=\int_S\Phi\hat{\mathbf{n}}da$$

۱۰۰) $$\int_S(\nabla\times\mathbf{A})\cdot da=\oint_C\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}\quad\text{(Stokes theorem)}$$

۱۰۱) $$\oint d\mathbf{r}\times\mathbf{B}=\int_S(\hat{\mathbf{n}}\times\nabla)\times\mathbf{B}da$$

۱۰۲) $$\oint_C\Phi d\mathbf{r}=\int_S(\hat{\mathbf{n}}\times\nabla\Phi)\,da=\int d\mathbf{a}\times\nabla\Phi$$

دستگاه دکارتی

۱۰۳) $$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

۱۰۴) $$\nabla\times\mathbf{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{x}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{y}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

۱۰۵) $$\nabla\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{z}$$

۱۰۶) $$\nabla^{۲}\Phi=\frac{\partial^{۲}\Phi}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial^{۲}\Phi}{\partial y^{۲}}+\frac{\partial^{۲}\Phi}{\partial z^{۲}}$$

دستگاه استوانه‌ای

$$\nabla . A = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$ (۱۰۷

$$\nabla \times A = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right)\hat{z}$$ (۱۰۸

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{1\partial\Phi}{\rho\partial\phi}\hat{\Phi} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{z}$$ (۱۰۹

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$ (۱۱۰

دستگاه کروی

$$\nabla . \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$ (۱۱۱

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{r} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right]\hat{\theta}$$ (۱۱۲

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{\phi}$$

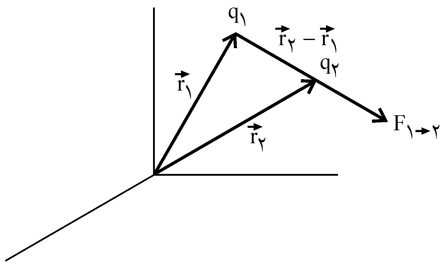
$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\hat{\phi}$$ (۱۱۳

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$ (۱۱۴

۱-۱ قانون کولن

نیروی بین دو بار الکتریکی به کمک قانون تجربی کولن بدست می‌آید.

$$F_{1\to2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\underline{r}_2 - \underline{r}_1}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|^3}$$



نیروی بین دو بار الکتریکی

نیروی وارد بر بار q از طرف بارهای نقطه‌ای و توزیع بار بصورت زیر است:

$$F=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\sum_i \frac{q_i(r-r_i)}{|r-r_i|^3}+\int_V \frac{r-r'}{|r-r'|^3}\rho(r')dv'+\int_S \frac{r-r'}{|r-r|^3}\sigma(r')da'\right]$$

که در آن r محل بار q و r' محل جزء کوچک بار dq در توزیع بار است.

۲-۱-میدان الکتریکی

اطراف هر بار الکتریکی خاصیتی موسوم به میدان الکتریکی وجود دارد. نیروی وارد بر بار مثبت آزمون (۱ +) را شدت میـدان الکتریکی می‌نامند.

$$E=\frac{F}{q}$$

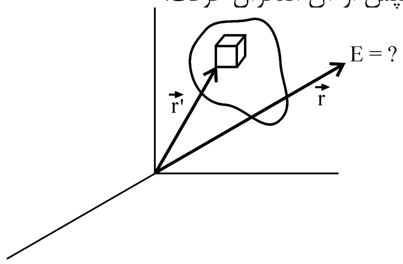
به همین دلیل شدت میدان الکتریکی اطراف یک بار نقطه‌ای به صورت زیر است:

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r-r'}{|r-r'|^3}$$

شدت میدان الکتریکی توسط گروهی بار نقطه ای از برآیند برداری میدان تک‌تک بارها به دست می‌آید.

$$E=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r-r_1'}{|r-r_1'|^3}+\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r-r_2'}{|r-r_2'|^3}+\cdots$$

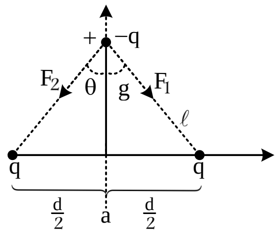
برای تعیین شدت میدان الکتریکی در اطراف توزیع بار می‌توان شدت میدان الکتریکی مربوط به بار کوچـک dq را محاسـبه و سپس از آن انتگرال گرفت.



$$dE=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r-r'}{|r-r'|^3}$$

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho(r')\frac{r-r'}{|r-r'|^3}dv'$$

مثال: دو بار q مثبت در فاصله‌ی d از یکدیگر قرار دارند در صورتی‌که بار منفی q در فاصله‌ی y مطابق شکل از آنها قرار داشته باشد فرکانس نوسانات زاویه‌ای کوچک در مورد آنها چقدر خواهد بود؟(سیستم را در صفحه‌ی افقی فرض کنید)



حل -

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$|F_1| = |F_2| = \frac{kq^2}{\ell^2}\ ,\ \sin\theta = \frac{d}{2\ell}$$

$$\ell = \frac{d}{2\sin\theta}\ ;\ \ell = \sqrt{y^2 + (\frac{d}{2})^2}$$

حال می‌توان دید در راستای قائم شتاب پیدا کرده است.

$$\cos\theta = \frac{y}{\ell}$$

$$F_T = 2f_1 \cos\theta/2 = -\frac{2kq^2 y}{(y^2 + (\frac{d}{2})^2)^{3/2}}$$

$$F_T = \frac{-2kq^2 y}{(y^2 + d^2/4)^{3/2}} = m\ddot{y}$$

$$y + \frac{2kq^2 y}{m(y^2 + d^2/4)^{3/2}} = 0 \Rightarrow d >> y$$ برای نوسانات کوچک

$$\ddot{y} + \frac{2kq^2 y}{md^3} \sim 0 \ \rightarrow \qquad w \cong \sqrt{\frac{2kq^2}{md^3}}$$

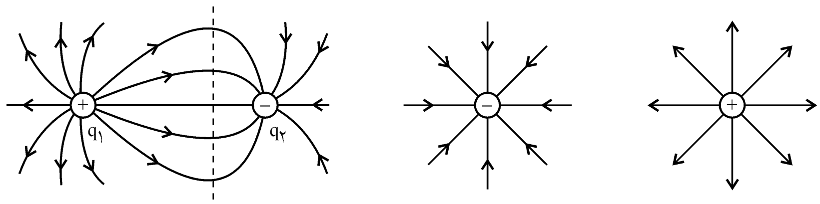
برای سهولت در مشاهده و محاسبه شدت میدان الکتریکی، آن‌را توسط خطوط میدان نمایش می‌دهند. این خطوط سه شرط زیر را دارند.

۱- مماس بر خط میدان نشان دهنده نیروی وارد بر بار مثبت آزمون است.

۲- چگالی خطوط نشان دهنده شدت میدان الکتریکی است.

۳- خطوط میدان نمی‌توانند متقاطع باشند.

شکل زیر خطوط میدان مربوط به چند مورد را نشان می‌دهد.



الف) یک بار نقطه ای مثبت ب) یک بار نقطه ای منفی پ) $|q_1| > |q_2|$

خطوط میدان برای بار نقطه‌ای و دو بار غیر همنام

در شکل چنانچه بار الکتریکی q_1 و q_2 از نظر مقدار مساوی باشند خط تقارن وسط بین دو بار بدست می‌آید.

می‌توان با توجه به میدان الکتریکی رابطه‌ی خطوط میدان الکتریکی را به صورت زیر نوشت:

$$\vec{E} = E_{q_1}\hat{q} + E_{q_2}\hat{q}_2 + \ldots$$

$$\boxed{\frac{h_1 dq_1}{E_{q_1}} = \frac{h_2 dq_2}{E_{q_2}} = \ldots.}$$

مثال: برای میدان الکتریکی $\vec{E} = 2xz^2\hat{i} + 2z(x^2+1)\hat{k}$ معادله خط نیرویی را که از نقطه $(1,3,-1)$ می‌گذرد، بیابید؟

حل-

چون میدان مولفه y ندارد خطوط نیرو در صفحات $y=c$ قرار دارد.

$$\frac{dz}{dx}=\frac{E_z}{E_x}=\frac{2z(x^2+1)}{2xz^2}\Rightarrow zdz=(x+\frac{1}{x})dx$$

با انتگرال‌گیری به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{2}z^2=\frac{1}{2}x^2+\ln x+c$$

در نقطه $(1,3,-1)$

$$\frac{1}{2}(-1)^2=\frac{1}{2}(1)^2+\ln 1+C\Rightarrow C=0$$

$$z^2=x^2+2\ln x$$

مثال: در مختصات استوانه‌ای میدان الکتریکی به صورت $\vec{E}=\rho\cos 2\varphi\hat{\rho}-\rho\sin 2\varphi\hat{\varphi}$ داده شده است. معادله خط نیروی گذرنده از نقطه $(2,30,0)$ را بیابید؟

حل-

معادله دیفرانسیل خطوط نیرو در صفحه(z= ثابت) دستگاه مختصات استوانه‌ای عبارتست از:

$$\frac{E_P}{E_\varphi}=\frac{dp}{\rho d\varphi}=\frac{\rho\cos 2\varphi}{-\rho\sin 2\varphi}\Rightarrow\frac{d\varphi}{\tan^2\varphi}=-\frac{d\rho}{\rho}$$

با انتگرال‌گیری از دو طرف رابطه داریم:

$$Ln\rho=-\frac{1}{2}Ln\sin 2\varphi+C$$

$$Ln\rho^2\sin 2\varphi=C\Rightarrow\rho^2=\frac{C'}{\sin 2\varphi s}$$

در نقطه $(2,30,0)$ داریم

$$4=\frac{C'}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Rightarrow C'=2\sqrt{3},\qquad \rho^2=\frac{2\sqrt{3}}{\sin 2\varphi}$$

مثال: یک حلقه به شعاع a دارای چگالی خطی λ می‌باشد، میدان الکتریکی را بر روی محور حلقه در نقطه p و به فاصله z از مرکز حلقه کدام است؟

حل-

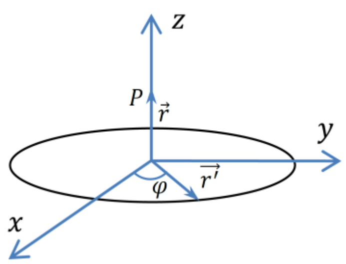
$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\lambda dl'$$

$$\vec{r}=z\hat{k}\qquad \vec{r}'=a\hat{e}_\rho\qquad dl'=ad\varphi'$$

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{(z\hat{k}-a\hat{e}_\rho)}{(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}a\lambda d\varphi'=\frac{az\lambda\hat{k}}{2\varepsilon_0(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\hat{e}_\rho=\cos\varphi'\hat{i}+\sin\varphi'\hat{j}$$

$$\int_0^{2\pi}\sin\varphi' d\varphi'=\int_0^{2\pi}\cos\varphi' d\varphi'=0$$



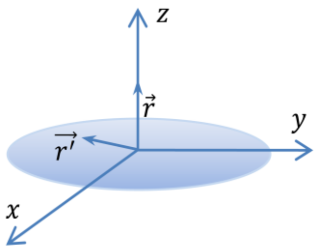
مثال: یک دیسک به شعاع a دارای چگالی سطحی σ می‌باشد. میدان روی محور دیسک و به فاصله z از مرکز آن کدام است؟

حل-

$$\vec{E}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\int\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')\sigma da'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^{۳}}$$

$$\vec{r}=z\hat{k}\qquad \vec{r}\,'=\rho\hat{e}_\rho\qquad da'=\rho'd\rho'd\varphi'$$

$$\vec{E}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\int_۰^a\int_۰^{۲\pi}\frac{(z\hat{k}-\rho'\hat{e}_\rho)\sigma\rho'd\rho'd\varphi'}{(z^{۲}+\rho'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$$

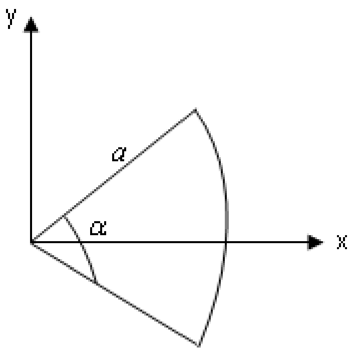


باز هم انتگرال‌گیری روی قسمت دوم مقدار صفر می‌دهد.

$$\vec{E}=\frac{\sigma(۲\pi)z\hat{k}}{۴\pi\varepsilon_۰}\int_۰^a\frac{\rho'd\rho'}{(z^{۲}+\rho'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{\sigma(۲\pi)z\hat{k}}{۴\pi\varepsilon_۰}\left.\frac{۱}{(z^{۲}+\rho'^{۲})^{\frac{۱}{۲}}}\right]_۰^a=$$

$$-\frac{\sigma z\hat{k}}{۲\varepsilon_۰}\left[\frac{۱}{(z^{۲}+a^{۲})^{\frac{۱}{۲}}}-\frac{۱}{z}\right]=\frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰}\left[۱-\frac{۱}{(z^{۲}+a^{۲})^{\frac{۱}{۲}}}\right]\hat{k}$$

مثال: یک کمان مطابق شکل زیر داریم. میدان را در نقطه O کدام است؟



حل-

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\int\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\lambda dl'$$

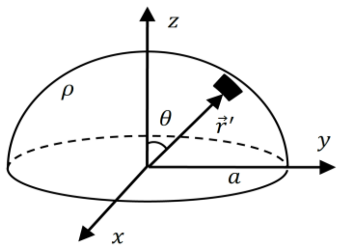
$$\vec{r}=0 \qquad \vec{r}'=a\hat{e}_\rho \qquad dl'=ad\phi'$$

$$\vec{E}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_\circ}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}\frac{-a^2d\phi'}{a^3}\hat{e}_\rho=$$

$$-\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_\circ a}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}\left[\cos\phi'd\phi'\hat{i}-\sin\phi'd\phi'\hat{j}\right]=$$

$$-\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_\circ a}\left[\sin\phi'\hat{i}\Big|_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}+\cos\phi'\hat{j}\Big|_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}\right]=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_\circ a}\sin\frac{\alpha}{2}\hat{i}$$

مثال: یک نیم‌کره فلزی به شعاع a و با چگالی سطحی σ در اختیار است. شدت میدان الکتریکی را در مرکز نیم‌کره کدام است؟



حل-

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\int\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\sigma da'$$

$$\vec{r}=\circ \qquad \vec{r}'=R\hat{e}_\rho \qquad da'=R^2\sin\theta'd\theta'd\phi'$$

$$\vec{E}=\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_\circ}\int\frac{-R\hat{e}_r R^2\sin\theta'd\theta'd\phi'}{R^3}=$$

$$-\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_\circ}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin\theta'\cos\phi'\hat{i}+\sin\theta'\sin\phi'\hat{j}+\cos\theta'\hat{k}\right]\sin\theta'd\theta'd\phi'$$

$$=-\frac{\sigma(2\pi)}{4\pi\varepsilon_\circ}\hat{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta'\sin\theta'd\theta'=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2}=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\sin^2\theta'\hat{k}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

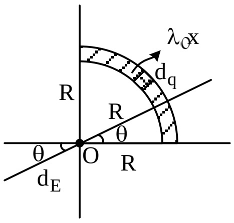
$$\vec{E}=-\frac{\sigma}{4\varepsilon_\circ}\hat{k}$$

انتگرال‌گیری روی قسمت‌های $\hat{i}$ و $\hat{j}$ مقدار صفر می‌دهد.

به سادگی می‌توان نشان داد میدان یک ربع کره در مرکز از طریق رابطه زیر به دست می‌آید.

$$E=\frac{\sigma\sqrt{2}}{8\varepsilon_0}$$

مثال: مطابق شکل زیر اگر بار کل مربوط به میله‌ی خمیده شده به صورت $\lambda=\lambda_0 x$ باشد مقدار میدان الکتریکی در نقطه‌ی o چقدر است؟



حل-

$$E_x=-\int dE\cos\theta$$

$$E_y=-\int dE\sin\theta$$

$$\int dE=|E|=\frac{kdq}{R^2}=\frac{k\lambda.xd\ell}{R^2}$$

$$1)\,E_x=\frac{-\lambda k}{R^2}\int x\underbrace{d\ell}_{Rd\theta}=\frac{-\lambda.k}{\cancel{R}}\int\cos\theta d\theta \qquad \begin{cases}x=R\cos\theta\\ y=R\sin\theta\end{cases}$$

$$=-k\lambda\int\frac{1+\cos2\theta}{2}2=-k\lambda_0{}^{\pi}\!/_{4}$$

$$2)\,E_y=\frac{-k\lambda_0}{\cancel{R^2}}\int x\sin\theta\cos\theta d\theta=\frac{k\lambda_0}{4}\cos2\theta\Big|_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{k\lambda_0}{4}\times-2=-\frac{k\lambda_0}{2}$$

$$\vec{E}=-\frac{k\lambda_0}{2}(\hat{i}+\hat{j})$$

مثال: nقطره‌ی کوچک کروی با میدان الکتریکی E_0 و شعاع R به هم می‌پیوندند و تشکیل قطره‌ای بزرگ را می‌دهند در مورد میدان الکتریکی مربوط به قطره‌ی بزرگ چه نظری می‌توان داد:

حل-

$$R,E_0=\frac{kq}{r^2}$$

چگالی باریک کره آب بزرگ با یک قطره‌ی کوچک یکی است با توجه با این مفهوم می‌توان داشت:

$$\rho_q=\rho_Q$$

$$\frac{q}{{}^4\!/_3\pi R^3}=\frac{Q}{{}^4\!/_3\pi R'^3}\rightarrow\frac{\cancel{q}}{\cancel{{}^4\!/_3\pi}R^3}=\frac{n\cancel{q}}{\cancel{{}^4\!/_3\pi}R'^3}$$

$$\boxed{R'=Rn^{1/3}} \qquad \vec{E}_Q=\frac{KQ}{R'^2}=\frac{knq}{R^2n^{2/3}}=\frac{kq}{R^2}n^{1/3}$$

۳-۱- شار الکتریکی

۳-۱-۱-قانون گاوس

علاوه بر انتگرال‌گیری مستقیم برای محاسبه میدان الکتریکی از یک قانون مهم می‌توان استفاده کرد که قانون گاوس نامیده می‌شود که طبق آن داریم:

$$\oint_s \vec{E}.\hat{n}\, da = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

با توجه به این رابطه، Q کل باری است که سطح بسته s آنرا در بر می‌گیرد و $\hat{n}$ بردار عمود بر سطح بسته است.
شکل دیفرانسیلی قانون گاوس به صورت زیر می‌باشد.

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_\circ}$$

نکته

تقارن یکی از شرطهای لازم برای به کارگیری قانون گاوس است:

۱- تقارن کروی، $\rho = \rho(r)$ (یعنی ρ فقط تابعی از r است)– سطح گاوسی به شکل کره هم مرکز با توزیع بار در نظر گرفته می‌شود.

۲- تقارن استوانه ای $\rho = \rho(\rho)$ (یعنی ρ فقط تابعی از ρ است) – سطح گاوسی را به صورت یک استوانه هم‌محور با توزیع بار در نظر گرفته می‌شود.

۳- تقارن صفحه‌ای – سطح گاوسی را به شکل مکعبی در نظر بگیرید که صفحه موردنظر از وسط آن عبور کند.

نکته

چگالی بار متناظر با بار نقطه‌ای را می‌توان با تابع دلتای دیراک نمایش داد. بنابراین برای یک بار نقطه‌ای q در $r = r'$ می‌توان نوشت:

$$\rho(r) = q\,\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad , \quad \vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{q}{\varepsilon_\circ}\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

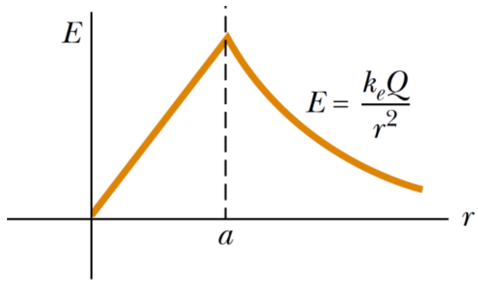
۳-۲-۱- شار الکتریکی

اگر در ناحیه‌ای از فضا، میدان الکتریکی وجود داشته باشد شار میدان الکتریکی که از سطح a عبور می‌کند از رابطه زیر محاسبه می‌شود. $\hat{n}$ برداری که عمود بر سطح بسته به طرف خارج سطح می‌باشد. می‌توان گفت شار الکتریکی که از یک سطح بسته عبور می‌کند وابسته به بار الکتریکی درون سطح است در این حالت قانون گاوس ارتباط بین شار الکتریکی و بار درون سطح بسته را به صورت زیر می‌دهد:

$$\phi_E = \int \vec{E}.\hat{n}\, da = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

مثال: یک کره عایق به شعاع a با چگالی حجمی ρ موجود است. میدان الکتریکی را برای نقاط داخل و خارج کره کدام است؟

حل-



$$r < a \Rightarrow \oint \vec{E}.\vec{n}da = \frac{1}{\varepsilon_\circ}\int \rho dV$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_\circ}\rho(\frac{4}{3}\pi r^3) \Rightarrow E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_\circ}$$

$$r > a \Rightarrow \oint \vec{E}.\vec{n}da = \frac{1}{\varepsilon_\circ}\int \rho dV$$

$$\Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_\circ}(\frac{4}{3}\pi a^3) \Rightarrow E = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_\circ r^2}$$

نکته

طبق تابع دیراک می توان داشت:

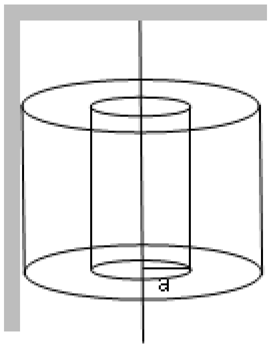
$$\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x),a=\text{ثابت}$$

مثال: در دستگاه مختصات استوانه‌ای توزیع بار زیر داده شده است، شدت میدان الکتریکی در محدوده‌ی مشخص شده کدام است؟

$$\rho=\begin{cases}\frac{K}{a}\rho & \rho<a\\ 0 & \rho>a\end{cases}$$

حل-

یک سطح استوانه‌ای به ارتفاع h و شعاع ρ هم‌محور با محور z در نظر می‌گیریم:



$$\rho<a\Rightarrow \oint \vec{E}.\vec{n}da=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho dV$$

$$\int E\rho d\varphi dz=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\frac{K}{a}\rho^2 d\rho d\varphi dz$$

$$\Rightarrow 2\pi E\rho h=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{k}{a}\frac{1}{3}\rho^3(2\pi)h\Rightarrow E=\frac{k\rho^2}{3\varepsilon_0 a}$$

$$\rho>a\Rightarrow\oint\vec{E}.\vec{n}da=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho dV\Rightarrow E(2\pi\rho h)=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\frac{K}{a}\rho^2 d\rho d\varphi dz$$

$$\Rightarrow E(2\pi\rho h)=\frac{k}{a}\frac{a^3}{3\varepsilon_0}(2\pi h)\Rightarrow E=\frac{ka^3}{3\varepsilon_0\rho}$$

مثال: میله‌ای استوانه‌ای با طول بی‌نهایت و شعاع R دارای چگالی بار یکنواخت ρ است. با استفاده از قانون گاوس میدان الکتریکی را در فاصله $r<R$ و $r>R$ کدام است؟

حل-

با استفاده از انتخاب سطح گاوسی استوانه‌ای به طول l داریم:

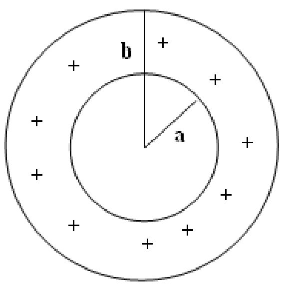
$$r<R\Rightarrow\oiint\vec{E}.\vec{n}da=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho dV$$

$$\Rightarrow E(2\pi rl)=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\pi r^2)l\Rightarrow E=\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

$$r>R\Rightarrow\oiint\vec{E}.\vec{n}da=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho dV$$

$$\Rightarrow E(2\pi rl)=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\rho(\pi R^2)l\Rightarrow E=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$$

مثال: در شکل زیر که یک حفره به شعاع a در مرکز یک کره عایق به شعاع b و چگالی $\rho=\frac{A}{r}$ است. میدان در هر ناحیه کدام است؟



حل-

$r > b \quad , \quad a < r < b \quad , \quad r < a$

$$r < a \Rightarrow E = 0$$

$$a < r < b : \oint \vec{E}.d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho dV$$

$$\Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_a^r \frac{A}{r} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\pi} d\phi$$

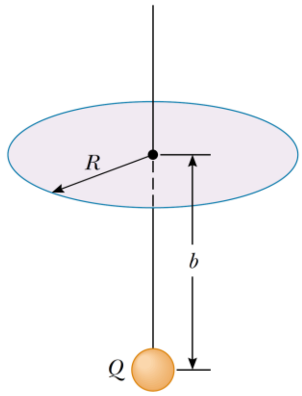
$$\Rightarrow E = \frac{A(r^2 - a^2)}{2\varepsilon_0 r^2}$$

$$r > b : \oint \vec{E}.d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho dV$$

$$\Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_a^b \frac{A}{r} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \Rightarrow E = \frac{A(b^2 - a^2)}{2\varepsilon_0 r^2}$$

مثال: بار نقطه‌ای Q در زیر یک سطح دایره‌ای به شعاع R قرار دارد. فاصله بار مذکور از مرکز دایره b است. شار گذرنده از سطح دایره‌ای کدام است؟

حل-



$$\Phi_E = \int \vec{E}.d\vec{s} = \int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(2\pi\rho)d\rho\cos\theta$$

$$= \int_0^a \frac{Q(2\pi\rho)d\rho}{4\pi\varepsilon_0(\rho^2 + b^2)} \frac{b}{(\rho^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}$$

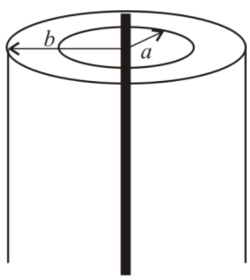
$$\Rightarrow \Phi_E = \frac{-Qz}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(\rho^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}\right]_0^a = \frac{-Qz}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{b}\right]$$

نکته:

هرگاه با عرقچینی از کره با شرط$(\theta = \text{const})$ روبه رو باشیم آنگاه شار گذرنده از آن به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\varphi_E = \frac{q}{2}(1 - \cos\theta)$$

مثال: چگالی بارالکتریکی حجمی یکنواخت ρ_0 در مختصات استوانه‌ای در فضای $a \le r \le b$ وجود دارد. چگالی بار خطی یکنواخت λ روی محور استوانه چقدر باشد، تا میدان الکتریکی در ناحیه‌ی $r > b$ صفر گردد؟



۱) $\lambda = \frac{-\rho_0}{2}(b^2 - a^2)\pi$

۲) $\lambda = -\rho_0(b^2 - a^2)\pi$

۳) $\lambda = -\frac{\rho_0}{2}(b^2 - a^2)$

۴) $\lambda = -\rho_0(b^2 - a^2)$

حل–گزینه «۲» صحیح است.

سطح گوی را استوانه‌ای به شعاع c که $b < c$ و هم‌محور با استوانه‌ی بار می‌گیریم. برای آن میدان الکتریکی به ازای هر مقدار c، روی سطح استوانه‌ی گوی صفر شود، باید بار کل درون استوانه‌ی گوی صفر باشد:

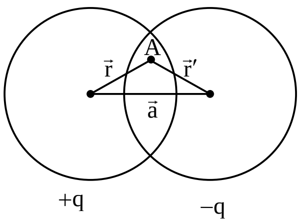
$\phi_1 = \lambda$: بار خطی یکنواخت در واحد طول میله

$\phi_2 = \pi(b^2 - a^2)\rho_0$: بار موجود در فضای $a \le r \le b$ در واحد طول

$\phi_1 = \phi_2 \Rightarrow \lambda = -\pi(b^2 - a^2)\rho_0$

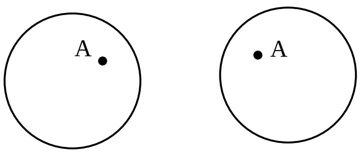
مثال: میدان الکتریکی در نقطه‌ی o اگر میدان الکتریکی درون کره‌ی توپر با چگالی ρ برابر با خط شود $E = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon}$ **باشد کدام است؟**

حل–



$E_T = E_1 + E_2 + \ldots$ بر هم نهی

بردار $\vec{a}$ فاصله از مرکز تا هر نقطه درون کره است و طبق بر هم نهی خواهیم داشت:



$E_1 = \dfrac{\rho \vec{r}}{3\varepsilon_0}$ $\qquad E_2 = \dfrac{-\rho \vec{r}}{3\varepsilon_0}$

$E_t = \rho/3\varepsilon_0 (r - r') = \boxed{\dfrac{\rho a}{3\varepsilon_0}}$

۳-۳- پتانسیل الکتریکی

استفاده از شدت میدان الکتریکی که میدان برداری است اغلب مشکل بوده و محاسبات پیچیده‌ای دارد. برای رفع ایـن مشـکل می‌توان کمیت اسکالری را موسوم به پتانسیل الکتریکی تعریف کرد.

در الکترواستاتیک اگر کرل میدان الکتریکی را محاسبه کنیم؛ مثلاً کرل رابطه صفر خواهد شد. به عبارت دیگر میدان الکتریکی را می‌توان به‌صورت گرادیان یک تابع اسکالر نوشت.

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$
$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

اگر از طرفین رابطه انتگرال بگیریم اختلاف پتانسیل بین دو نقطه بر حسب میدان الکتریکی به دست می‌آید:

$$\varphi(\mathbf{r}_b) - \varphi(\mathbf{r}_a) = -\int_a^b \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}$$

اگر a را مبدا پتانسیل یعنی جایی که پتانسیل الکتریکی صفر است اختیار کنیم، پتانسیل در هر نقطه بدست می‌آید.

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\int_{ref} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$$

با استفاده از این رابطه، پتانسیل الکتریکی برای بار نقطه‌ای:

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

و برای گروهی بار نقطه‌ای

$$\varphi(\mathbf{r})=\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i'|}$$

بوده و برای توزیع بار شکل عمومی زیر را دارد.

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\mathbf{r}')dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S\frac{\sigma(\mathbf{r}')da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

نکته

توجه داشته باشید که همواره در حالت تعادل درون یک رسانای خوب میدان الکتریکی صفر و پتانسیل الکتریکی ثابت است. روی سطح رسانا نیز میدان مؤلفه مماسی نداشته و فقط در صورت وجود مؤلفه عمود بر سطح وجود دارد.

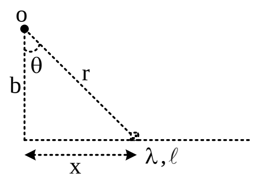
نکته

سطحی با پتانسیل ثابت را سطح هم‌پتانسیل می‌نامند. سطح هم‌پتانسیل همیشه عمود بر خطوط میدان الکتریکی است سطح رساناها، هم پتانسیل محسوب می‌شود.

نکته

هنگامی‌که به رسانا بار الکتریکی داده شود در الکترواستاتیک بارهای الکتریکی فقط روی سطوح رسانا جمع می‌شوند. توزیع بار به گونه‌ای است که شدت میدان الکتریکی درون رسانا صفر شود.

مثال: برای میله‌ای مطابق شکل زیر پتانسیل در نقطه‌ی o چقدر است؟



حل- با توجه به چگالی باری خطی داریم:

$$v=\int k\frac{dq}{r}$$

$$V=K\int\frac{\lambda dx}{(b^2+x^2)^{1/2}}=k\lambda\int\frac{1}{\cos\theta d\theta}$$

$$x=b\tan\theta\rightarrow du=b(1+\tan^2\theta)d\theta$$

$$=k\lambda\ell n|\tan\theta+\sec\theta|$$

$$\tan\theta=\frac{x}{b}\quad,\quad\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{b^2+x^2}}{b}$$

مثال: یک کمان به شعاع R و چگالی خطی $\lambda=\lambda_\circ y$ مطابق شکل در اختیار است. پتانسیل در مرکز کمان کدام است؟