به نام خداوند بخشنده مهربان

موسسه آموزش عالی آزاد ماهان
www.mahan.ac.ir

فیزیک عمومی(۱)

مکانیک

مجموعه: فیزیک

(نانوفیزیک – نانومواد –هواشناسی ـفیزیک پزشکی و فیزیک دریا)

مؤلف: احسان تنهایی

ماهان
مشاوران صعود

آمادگی آزمون دکتری

تنهایی، احسان
فیزیک عمومی (۱) مکانیک- مجموعه فیزیک (علوم و فناوری نانو- نانو فیزیک)/ احسان تنهایی
انتشارات مشاوران صعود ماهان: ۱٤۰۱
جدول، نمودار (آمادگی آزمون دکتری مجموعه فیزیک)
۲۵۵ص:
ISB/N: 978-600-458- 654-2
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
فارسی ـ چاپ اول
فیزیک عموی (۱) مکانیک
احسان تنهایی
ج ـ عنوان
کتابخانه ملی ایران: ٤۱۸۲٥۲٤

انتشارات مشاوران صعود ماهان

موسسه آموزش عالی آزاد ماهان
www.mahan.ac.ir

- **نام کتاب:** فیزیک عمومی (۱) مکانیک
- **مدیران مسئول:** هادی و مجید سیّاری
- **مؤلف:** احسان تنهایی
- **مدیر تولید محتوا:** سمیه بیگی
- **ناشر:** مشاوران صعود ماهان
- **نوبت و تاریخ چاپ:** اوّل /۱۴۰۱
- **تیراژ:** ۱۰۰۰ نسخه
- **قیمت:** ۳/۱۹۰/۰۰۰ ریال
- **شابک:** ISBN۹۷۸-۶۰۰-۴۵۸-۶۵۴ -۲

انتشارات مشاوران صعود ماهان: تهران ـ خیابان ولیعصر، بالاتر از تقاطع ولیعصر مطهری، پلاک ۲۰۵۰
تلفن: ۸۸۱۰۰۱۱۳ و ۸۸۴۰۱۳۱۳

به نام خدا

ایمان داریم که هر تغییر و تحول بزرگی در مسیر زندگی بدون تحول معرفت و نگرش میسر نخواهد بود. پس بیائید با اندیشه توکل، تفکر، تلاش و تحمل در توسعه دنیای فکریمان برای نیل به آرامش و آسایش توأمان اولین گام را برداریم. چون همگی یقین داریم دانایی، توانایی می‌آورد.

شاد باشید و دلی را شاد کنید

برادران سیّاری

مقدمه مؤلف

با توجه به منابع پراکنده موجود در این درس و تدریس آن در دانشگاه‌ها به صورت نادرست در هر رشته، اقدام به تألیف منبعی جامع که در برگیرنده‌ی تمامی مطالب موجود در فیزیک پایه است، نمودم که بتواند تا مقطع دکتری نانوفیزیک، فیزیک و فیزیک پزشکی مورد استفاده قرار گیرد.

به تمامی دانشجویان دوره‌ی کارشناسی و نیز دانشجویان کارشناسی ارشد توصیه می‌کنم که بعد از مطالعه‌ی منابع درس فیزیک عمومی در در لیست منابع پایانی آورده‌ام، به فهم تمامی مطالب این کتاب در کنار سوالات موجود در هر بخش بپردازند.

در این کتاب تمامی نکات و مفاهیم اساسی مربوط به مکانیک کلاسیک، الکترومغناطیس و ترمودینامیک با زبانی ساده ذکر شده و در پایان هر مبحث با بیان گروهی از مثال‌ها، پیرامون آن سعی بر درک بهتر مطالب شده است. لازم به ذکر است که تمامی مطالب و سوالات به نحوی طرح شده‌اند که مشکلات دانشجویان در این درس برطرف شود.

در بخش پایانی کتاب ترمودینامیک و الکترومغناطیس همین مجموعه، سؤالات بنیادی مربوط به این درس در گروه فیزیک و نیز گروه پزشکی آورده شده است و برای اینکه دانشجو در ریاضیات دچار مشکل نشود، توصیه می‌کنم از پیوست‌های موجود در انتهای کتاب استفاده شود.

با سپاس بیکران

احسان-تنهایی

(نانو فیزیک دانشگاه تهران)

فهرست مطالب

فصل اول

سیستماتیک حرکت

آنچه که در این فصل می‌خوانیم

- ☑ انواع دستگاه‌های مختصات
- ☑ حرکت‌شناسی و انواع حرکت
- ☑ پرتابه‌ها
- ☑ حرکت نسبی و نیروهای متغیر

فصل اوّل

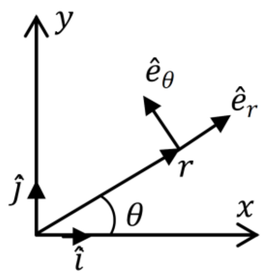
سیستماتیک حرکت

انواع دستگاه‌های مختصات

در ابتدای بحث مربوط به حرکت‌شناسی اجسام می‌توان دستگاه‌های مربوط به این تحلیل را به صورت زیر تحلیل نمود:

دستگاه مختصات قطبی

مطابق شکل زیر، در دستگاه قطبی مسطح مختصات هر نقطه را به وسیله دو مختصه r و θ مشخص می‌کنیم.



$\hat{e}_\theta, \hat{e}_r$ به ترتیب بردارهای یکه‌ای هستند در جهت افزایش θ, r است.

نکته

$\hat{k}, \hat{j}, \hat{i}$ با گذشت زمان در فضا ثابت می‌مانند ولی $\hat{e}_\theta, \hat{e}_r$ با تغییر θ تغییر می‌یابند؛ یعنی وابسته به زمان‌اند. می‌توان نشان داد:

$$\hat{e}_r = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta$$
$$\hat{e}_\theta = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta$$

$$r=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}} \quad , \quad \tan\theta=\frac{y}{x} \quad , \quad \begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt}=\hat{e}_\theta\frac{d\theta}{dt} \quad , \quad \frac{d\hat{e}_\theta}{dt}=-\hat{e}_r\frac{d\theta}{dt}$$

و بنابراین:

$$\frac{d\hat{e}_r}{d\theta}=\hat{e}_\theta \quad , \quad \frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta}=-\hat{e}_r$$

نکته

در دستگاه قطبی می‌توان رابطه‌ی شتاب و سرعت را به صورت زیر نوشت:

$$\vec{r}=r\hat{e}_r$$

$$\vec{V}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{r}\hat{e}_r+r\frac{d\hat{e}_r}{dt}=\dot{r}\hat{e}_r+r\dot{\theta}\hat{e}_\theta=V_r\hat{e}_r+V_\theta\hat{e}_\theta$$

V_r را سرعت شعاعی و V_θ را سرعت مماسی گویند و برای شتاب این دستگاه داریم:

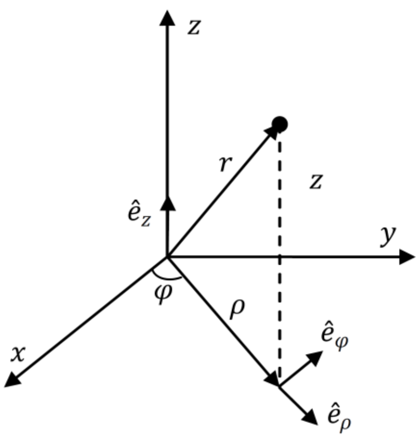
$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d^{۲}\vec{r}}{dt^{۲}}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^{۲})\hat{e}_r+(r\ddot{\theta}+۲\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta=a_r\hat{e}_r+a_\theta\hat{e}_\theta$$

نکته

اگر $\dot{r}=\ddot{r}=۰$ باشد آنگاه فاصله ذره تا مبدأ همواره ثابت است و این یعنی مسیر حرکت ذره یک دایره است.

دستگاه مختصات استوانه‌ای

مطابق شکل زیر برای بررسی حرکت سه بعدی ذرات می‌توان از دستگاه مختصات استوانه‌ای استفاده کرد:



حرکت سیستم در این دستگاه توسط سه بردار یکه $\hat{e}_z$, $\hat{e}_\varphi$, $\hat{e}_\rho$ توصیف می‌شود؛ یعنی می‌توان نوشت:

$$\vec{r}=\rho\hat{e}_\rho+z\hat{e}_z$$

$$x=\rho\cos\phi \quad , \quad y=\rho\sin\phi$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad \tan\phi=\frac{y}{x}$$

$$\hat{e}_\rho=\hat{i}\cos\varphi+\hat{j}\sin\varphi$$

$$\hat{e}_\varphi=-\hat{i}\sin\varphi+\hat{j}\cos\varphi$$

نکته

تغییرات زمانی بردارهای یکه به صورت زیر است:

$$\frac{d\hat{e}_\rho}{d\varphi}=\hat{e}_\varphi\,, \quad \frac{d\hat{e}_\varphi}{d\rho}=-\hat{e}_\rho$$

$$\frac{d\hat{e}_\rho}{dt}=\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi\,, \quad \frac{d\hat{e}_\varphi}{dt}=-\dot{\varphi}\hat{e}_\rho$$

نکته

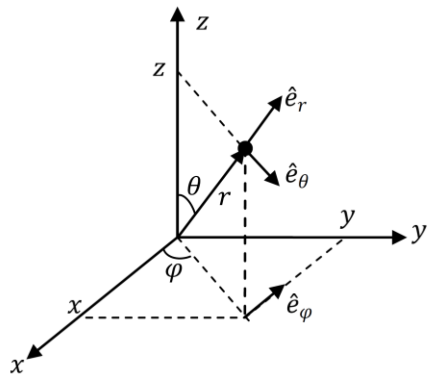
سرعت و شتاب در این دستگاه با توجه به تغییرات زمانی بردارهای یکه به صورت زیر به‌دست می‌آید که به خاطر سپاری آن ضروری است:

$$\vec{V}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{\rho}\,\hat{e}_\rho+\rho\dot{\phi}\,\hat{e}_\varphi+\dot{z}\hat{e}_z$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=(\ddot{\rho}-\rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho+(2\dot{\rho}\dot{\phi}+\rho\ddot{\phi})\hat{e}_\phi+\ddot{z}\hat{e}_z$$

دستگاه مختصات کروی

گاهی با توجه به تقارن موجود در سؤال، می‌توان برای تحلیل سیستم از دستگاه کروی بهره جست. در این حالت، سه بردار یکه $\hat{e}_r,\hat{e}_\theta,\hat{e}_\phi$ حرکت ذره را به طور کامل توصیف می‌کنند.



$$\vec{r}=r\,\hat{e}_r$$

$$x=r\sin\theta\cos\phi \quad , \quad y=r\sin\theta\,\sin\phi \quad , \quad z=r\cos\theta$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad , \quad \tan\theta=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \quad , \quad \tan\phi={}^{y}\!/_{x}$$

نکته: از آنجا که بردارهای یکه $\hat{e}_r,\hat{e}_\theta,\hat{e}_\varphi$ در فضا ثابت نیستند، با داشتن $\hat{e}_r,\hat{e}_\theta,\hat{e}_\varphi$ بر حسب $\hat{k},\hat{j},\hat{i}$ می‌توان مشتق زمانی آنها را نیز محاسبه نمود:

$$\hat{e}_r=\hat{i}\sin\theta\,\sin\phi+\hat{j}\,\sin\theta\,\sin\phi+\hat{k}\,\cos\theta$$

$$\hat{e}_\theta=\hat{i}\,\cos\theta\,\cos\phi+\hat{j}\,\cos\theta\,\sin\phi-\hat{k}\sin\theta$$

$$\hat{e}_\varphi=-\hat{i}\sin\phi+\hat{j}\cos\phi$$

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt}=\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi \sin\theta+\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$$
$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}=-\dot{\theta}\,\hat{e}_r+\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi\cos\theta$$
$$\frac{d\hat{e}_\varphi}{dt}=-\dot{\varphi}\,\hat{e}_r\sin\theta-\dot{\varphi}\,\hat{e}_\theta\cos\theta$$

مثال: **ثابت کنید که $\vec{V}\cdot\vec{a}=V\dot{V}$؛ سپس ثابت کنید که اگر بزرگی سرعت V ثابت باشد، در مورد یک ذره متحرک $\vec{V}$ و $\vec{a}$ بر هم عمودند.**

$$\frac{d}{dt}(\vec{V}\cdot\vec{V})=\frac{d}{dt}(V^{۲})\Rightarrow ۲\vec{V}\cdot\frac{d\vec{V}}{dt}=۲V\frac{dV}{dt}$$

$$\Rightarrow\vec{V}\cdot\vec{a}=V\dot{V}$$

نکته:

شعاع انحنای مسیر برای متحرک به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\rho=\frac{\left|\vec{V}\right|^{۳}}{\left|\vec{V}\times\vec{a}\right|}$$

نکته:

برای تحلیل سرعت و شتاب مربوط به این دستگاه می‌توان نوشت:

$$\vec{V}=\dot{r}\hat{e}_r+r\dot{\varphi}\sin\theta\ \hat{e}_\phi+r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$
$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^{۲}-r\dot{\varphi}^{۲}\sin^{۲}\theta)\hat{e}_r+(r\ddot{\theta}+۲\dot{r}\dot{\varphi}-r\dot{\varphi}^{۲}\sin\varphi\cos\varphi)\hat{e}_\theta+$$

$$(r\ddot{\varphi}\sin\theta+۲\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta+۲r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\hat{e}_\varphi$$

سینماتیک اجسام

در این بحث همواره به دنبال یافتن معادلات حرکت در یک یا چند بعد خواهیم بود. لازم است در ابتدا مفاهیمی چون شتاب، سرعت و... را بشناسیم.

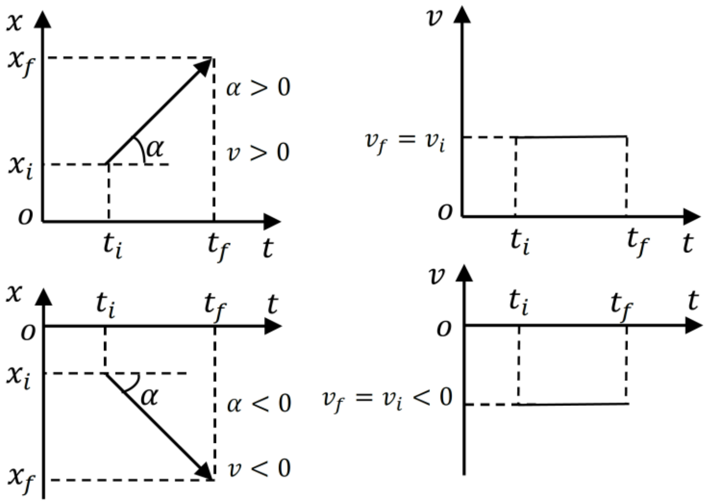
بردار مکان و جابجایی در یک بعد

منظور از یافتن مکان یک جسم عبارتست از یافتن مکان آن جسم نسبت به نقطه مرجعی که مبدأ نامیده می‌شود، برداری که از مبدأ به مکان جسم متصل می‌شود بردار مکان نامیده می‌شود. تغییری از مکان $\vec{r_i}$ به $\vec{r_f}$، جابجایی نامیده شده و با $\Delta\vec{r}=\vec{r_f}-\vec{r_i}$ نمایش داده می‌شود و برابر است با برداری که از مکان اولیه جسم خارج شده و به مکان نهایی جسم متصل می‌شود. ذره می‌تواند قبل از رسیدن به نقطه نهایی جابجایی‌های مختلفی در جهات دیگر داشته باشد. امّا جابجایی اصلی فاصله بین نقطه ابتدایی و انتهایی است.

سرعت متوسط: سرعت متوسط یک ذره به صورت حاصل تقسیم جابجایی ذره به مدت زمان انجام جابجایی بیان می‌شود. برای حرکت یک بعدی داریم :

$\Delta x = x_f - x_i$ و $V_x=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ $\qquad$ $\bar{V}_x=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

$x_f < x_i \Rightarrow V_x < \circ$ $\qquad$ $x_f > x_i \Rightarrow V_x > \circ$



سرعت لحظه‌ای

سرعت لحظه‌ای، آهنگ تغییر موضع، ***x***، ذره نسبت به زمان، در لحظه موردنظر است. در نمودار مکان -زمان، سرعت لحظه‌ای شیب منحنی تغییر مکان برحسب زمان در هر لحظه از زمان است.

$$V_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow V_x = \frac{dx}{dt}$$

شتاب متوسط

وقتی سرعت ذره تغییر می‌کند، می‌گویند بر ذره شتاب وارد می‌آید (ذره شتاب می‌گیرد) شتاب متوسط، $\bar{a}$ در بازه زمانی Δt به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\bar{a} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

توجه شود که در نمودار سرعت - زمان، شیب خط واصل بین دو نقطه شتاب متوسط خواهد بود.

شتاب لحظه‌ای

شتاب در هر لحظه از زمان را شتاب لحظه‌ای می‌نامند، در واقع شتاب به صورت مشتق سرعت نسبت به زمان تعریف می‌شود.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

در نمودار سرعت – زمان، شتاب در هر لحظه، با شیب منحنی $V(t)$ در آن نقطه برابر است ودر نمودار مکان – زمان، شیب خط واصل بین هر دو نقطه سرعت متوسط را می‌دهد.

حرکت تند شونده و کند شونده

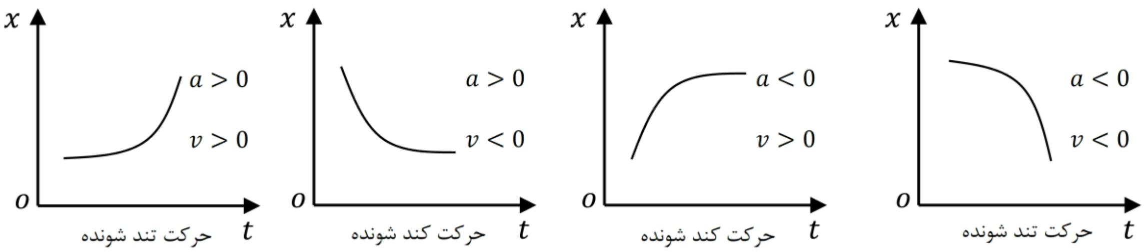
اگر حاصلضرب علامت‌های سرعت و شتاب مثبت بود حرکت تند شونده است و اگر منفی بود حرکت کند شونده خواهد بود.

نکته

۱–تعقر نمودار مکان – زمان به سمت پائین یعنی شتاب منفی و تعقر بالا یعنی شتاب مثبت.

۲– اگر نمودار مکان – زمان یک جسم به صورت یک منحنی شود دو احتمال وجود دارد:

اگر نمودار حاصل برای سرعت – زمان در بازه‌های زمانی مختلف به صورت خطوط صاف باشد آنگاه در آن بازه‌ها شتاب ثابت است. امّا اگر نمودار سرعت – زمان منحنی باشد به معنای این است که معادلهٔ حرکت ذره از درجه دو نبوده و شتاب متغیر می‌باشد.



سقوط آزاد اجسام-تحلیل معادلات سقوط

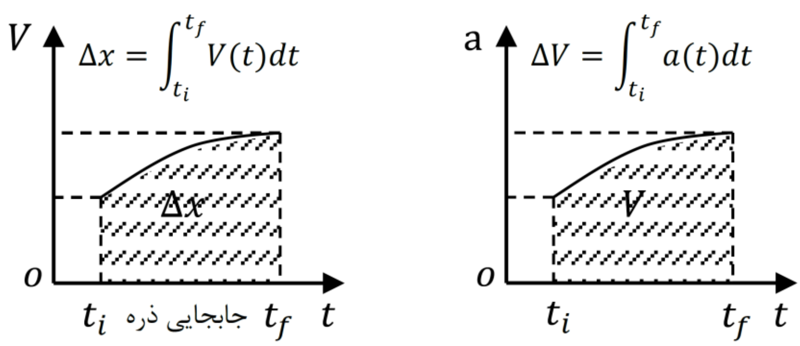
اگر جسمی را به بالا یا پایین پرتاب کنیم، و به نوعی از تأثیرات هوا بر حرکتش چشم بپوشیم در خواهیم یافت که جسم با آهنگ ثابت و معینی به سمت پایین شتاب می‌گیرد، شتاب یاد شده را شتاب سقوط آزاد می‌نامند، که از مشخصه‌های جسم، نظیر جرم، چگالی یا شکل آن مستقل و برای تمامی‌اجسام یکسان است. شتاب سقوط آزاد در نزدیکی سطح زمین عبارتست از:

$$a = g = ۹.۸\, m/s^{۲}$$

برای بدست آوردن معادلات سقوط تغییرات زیر را اعمال می‌کنیم:

۱)جهت حرکت در این حالت بجای امتداد x ، در امتداد محور yها و جهت y به طرف بالاست.

۲)شتاب سقوط آزاد منفی یعنی بطرف پایین محور yهاست.



اگر هر کدام از عبارت‌های شتاب و سرعت وابستگی صریح به زمان داشته باشند از زیر انتگرال نمی‌توانند خارج شوند. در رابطه محاسبه سرعت اگر شرایط مرزی درون انتگرال قرار داده شود به معنای این است رفتار ما بین این دو زمان مهم نبوده و به سرعت متوسط نیازمندیم. امّا اگر انتگرال به صورت نامعین حل شود، آنگاه می‌توان سرعت لحظه‌ای ذره را در هر زمانی بدست آورد.

معادلات حرکت در حرکت شتابدار

با فرض اینکه شتاب ثابت است داریم:

$$V_{x_f} = V_{x_i} + a_x t$$

$$x_f - x_i = \frac{1}{2}(V_{x_i} + V_{x_f})t$$

$$x_f - x_i = V_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$V_{x_f}^2 - V_{x_i}^2 = 2a_x\left(x_f - x_i\right)$$

در این معادلات سرعت و شتاب عبارت‌های جبری هستند و بنابراین دارای علامتمند و به معنای جهت افزایش یا کاهش آنها نسبت به دستگاه مختصات انتخابی می‌باشد.

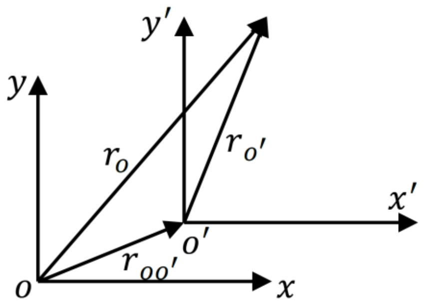
در فرآیند حل مسئله یک بار مجاز به انتخاب دستگاه و جهت آن می‌باشیم و در ادامه حل مسئله به هیچ وجه نباید آنرا تغییر دهیم.

حرکت نسبی در چارچوب‌ها

حرکت یک جسم را می‌توان در چارچوب مرجع‌های مختلفی بررسی کرد. در ادامه حرکت یک جسم را از دید دو چارچوب مرجع که نسبت به یکدیگر با سرعت ثابت $\vec{V}_{O'O}$ حرکت می‌کنند، بررسی می‌کنیم. فرض کنیم که یک ناظر در چارچوب مرجع O و یک ناظر دیگر در چارچوب مرجع O' که با سرعت $\vec{V}_{O'O}$ نسبت به O از آن دور می‌شود وجود دارند.

از مثلث برداری نمایش داده شده در شکل، معادله برداری زیر را می‌توان نوشت

$$\vec{r}_O = \vec{r}_{O'O} + \vec{r}_{O'} = \vec{V}_{O'O}\, t + \vec{r}_{O'}$$



با گرفتن مشتق زمانی، به رابطه‌ای خواهیم رسید که بیانگر ارتباط بین سرعت‌های اندازه‌گیری شده برای ذره از سوی دو مشاهده‌گر است.

$$\vec{V}_O = \vec{V}_{O'O} + \vec{V}_{O'}$$

اگر از معادله فوق مشتق زمانی گرفته شود، رابطه برای شتاب‌ها در دو چارچوب بدست خواهد آمد.

$$\vec{a}_O = \vec{a}_{O'}$$

حرکت در بیش از یک بعد

حرکت در بیش از یک بعد را می‌توان با تجزیه حرکت و با همان تحلیل‌های حرکت یک بعد انجام داد. به عنوان مثال اگر حرکت مارپیچی که به سمت بالا را در نظر بگیریم، می‌توان آنرا به حرکت دایره‌ای در صفحه xy و حرکت یک بعدی در راستای z تقسیم کرد. انتخاب مناسب دستگاه مختصات در ساده‌تر شدن مسئله کمک خواهد کرد.

برای بدست آوردن معادلات کلی حرکت در این قسمت از معادلات حرکت یک بعدی استفاده می‌کنیم. در این صورت بردار جابجایی $\vec{r} = (x,y,z)$ خواهد بود و بردار سرعت و شتاب بصورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k} \qquad \text{و} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

اگراندازهٔ سرعت ثابت بماند، تغییر جهت بردار سرعت نیز می‌تواند شتاب ایجاد کند که در حرکت دایره‌ای به آن خواهیم پرداخت. بردار جابجایی و سرعت متوسط به‌صورت زیر است.

$$\vec{V} \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

حرکت در دو بعد

مکان شروع حرکت را با $\vec{r}_0$ و مکان پایان حرکت را با $\vec{r}$ نمایش می‌دهیم. معادلات حرکت چنین خواهد بود:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \qquad \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

$$a_x = \frac{d^۲x}{dt^۲} \Rightarrow x - x_۰ = V_{۰x}t + \frac{۱}{۲}a_x t^۲$$

$$a_y = \frac{d^۲y}{dt^۲} \Rightarrow y - y_۰ = V_۰ t + \frac{۱}{۲}a_y t^۲$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \left(x_۰\hat{i} + y_۰\hat{j}\right) + \left(V_{۰x}\hat{i} + V_{۰y}\vec{j}\right)t + \frac{۱}{۲}\left(a_x\hat{i} + a_y\vec{j}\right)t^۲$$

$$\vec{r} = \vec{r}_۰ + \vec{V}_۰ t + \frac{۱}{۲}\vec{a}\,t^۲$$

حرکت پرتابه-برد و ارتفاع اوج

با صرف‌نظر از اصطکاک و با در نظر گرفتن شتاب مرکزگرای g زمین که به ذره در راستای شعاعی زمین وارد می‌شود، یک حرکت یکنواخت با سرعت ثابت در راستای سطح زمین و یک حرکت شتاب‌دار سقوط آزاد در راستای شعاع زمین برای هر ذره می‌توان متصور بود. فرض کنید یک پرتابه با زاویه θ نسبت به سطح افق (سطح زمین) با سرعت اولیه V_0 پرتاب می‌شود. روابط حرکت به‌صورت زیر خواهند بود.

$$V_{۰x} = V_۰\cos\theta$$

$$V_{۰y} = V_۰\sin\theta$$

$$y = y_۰ + V_۰ t\sin\theta - \frac{۱}{۲}gt^۲$$

$$x = x_۰ + V_۰ t\cos\theta$$

$$\Delta x = V_۰ t\cos\theta \Rightarrow t = \frac{\Delta x}{V_۰\cos\theta}$$

$$\Rightarrow y = V_۰\frac{\Delta x\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{۱}{۲}g\frac{\Delta x^۲}{V_۰^۲\cos^۲\theta} + y_۰$$

$$\Delta y = V_0\Delta x\tan\theta - \frac{g(\Delta x)^2}{2V_0^2\cos^2\theta}$$

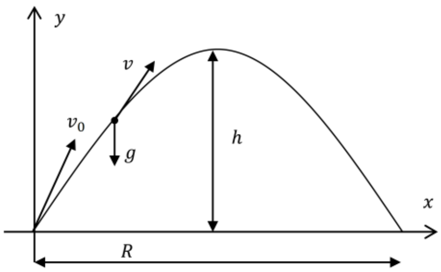
معادله فوق، معادله مسیر حرکت پرتابه می‌باشد که به صورت معادله یک سهمی است.

$$V_y^۲ - V_{۰y}^۲ = -۲g\Delta y \Rightarrow ۰ - V_۰^۲\sin^۲\theta = -۲g\Delta y \Rightarrow h = \Delta y = \frac{V_۰^۲\sin^۲\theta}{۲g}$$ ارتفاع اوج

برد پرتابه‌ی دوبعدی در شرایط ایده‌آل

R برد افقی‌ای است که پرتابه هنگام رسیدن به ارتفاع اولیه (پرتاب) طی کرده است. برای دستیابی به برد در معادلات به ترتیب مقادیر $x-x_۰=R$ و $y-y_۰=۰$ را جایگذاری کرده و خواهیم داشت.

$$R=\frac{V_۰^۲\sin^۲\theta}{g}$$



نکته:

در حرکت دو بعدی پرتابه، بردار مکان آن $\vec{r}$ و بردار سرعتش $\vec{V}$ پیوسته تغییر می‌کند امّا بردار شتاب $\vec{a}$ ثابت می‌ماند.

مثال: جسمی‌از حال سکون رها شده و نیمی از مسیر را در ثانیه آخر می‌پیماید. ارتفاع رها شده چقدر است؟

t زمان کل حرکت است

$$y_۰=+\frac{۱}{۲}gt^۲$$

چون جسم نیمی از مسیر خود را در ثانیه آخر می‌پیماید ، بنابراین $\frac{y_0}{2}$ را در $(t-۱)$ ثانیه می‌پیماید.

$$\frac{y_۰}{۲}=+\frac{۱}{۲}g(t-۱)^۲\Rightarrow+\frac{۱}{۲}gt^۲=+g(t-۱)^۲\Rightarrow t^۲-۴t+۲=۰\Rightarrow t=\frac{+۴\pm\sqrt{۸}}{۲}=\left\langle\begin{array}{l}t_۱=۳.۴S\\t_۲=۰.۷S\end{array}\right.$$

$t_۲$ غیر قابل قبول است ، زیرا نیمی‌از مسیر را در یک ثانیه آخر، می‌پیماید.

$$y_۰=+\frac{۱}{۲}gt_۱^۲=۵(۳.۴)^۲=۵۷.۸m$$

نکته

با صرف نظر کردن از اصطکاک می‌توان به این نتایج رسید:

پرتابه از یک نقطه روی محور y (ارتفاع) دوبار عبور می‌کند. در این نقطه سرعت پرتابه در رفت و برگشت از لحاظ اندازه برابر ولی از لحاظ جهت عکس هم است. مدت زمان لازم برای طی کردن ادامه مسیر از هر نقطه تا به نقطه اوج برابر همین مقدار زمان برای برگشت از نقطه اوج به آن نقطه اولیه می‌باشد.

حرکت دایره‌ای یکنواخت و شتاب‌دار

با توجه به دستگاه مختصات قطبی برای حرکت دایره‌ای می‌توان نوشت:

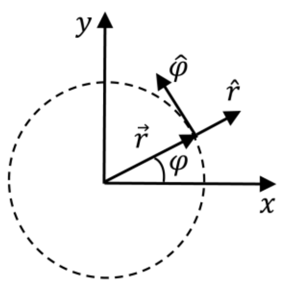
$$a = r\dot{\theta}^{2} = r\omega^{2} = \frac{V^{2}}{r} \qquad \left|\vec{V}\right| = \left|\vec{r}\right|\dot{\theta} = r\omega$$

$$\theta = \theta_{0} + \omega_{0}t + \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^{2} \qquad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$s = r\theta$$

ذره‌ای که با (اندازه) سرعت ثابت روی قوسی از دایره حرکت می‌کند، شتاب مرکزگرا خواهد داشت. اگر اندازهٔ سرعت در طی حرکت ثابت نباشد ذره علاوه بر شتاب مرکزگرا، شتاب مماسی نیز خواهد داشت که موجب تغییر سرعت مماسی آن می‌شود. با استفاده از روش‌های برداری می‌توانیم ارتباط میان سرعت، شتاب و جهت شتاب را تعیین کنیم. شکل زیر ذره‌ای را نشان می‌دهد که حول مبدأ O یک دستگاه مرجع، حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد. برای این نوع حرکت، مختصات قطبی r و φ مفیدتر از مختصات دکارتی x و y است. چرا که r در طی حرکت ثابت باقی مانده و φ با زمان بصورت خطی افزایش می‌یابد.

بردار یکه $\hat{r}$ در جهت افزایش r در آن نقطه است. این بردار در راستای شعاع و به طرف خارج از مرکز است. بردار یکه $\hat{\varphi}$ در جهت افزایش φ در آن نقطه است.



$$\hat{r} = \sin\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j}$$

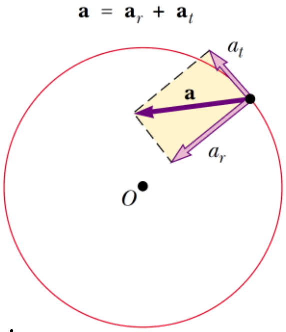
$$\hat{\varphi} = -\cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j}$$

$$\vec{r} = r\hat{r} \Rightarrow \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r\frac{d\hat{r}}{dt} = r[\dot{\varphi}\cos\varphi\,\hat{i} - \dot{\varphi}\sin\varphi\,\hat{j}] = -r\dot{\varphi}\hat{\varphi}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(-r\dot{\varphi}\hat{\varphi}) = -r\ddot{\varphi}\hat{\varphi} - r\dot{\varphi}^{2}\hat{r}$$

عبارت اول معادله فوق، مولفه مماسی شتاب ذره بوده و ناشی از تغییر اندازه سرعت حرکت دایره‌ای است. و عبارت دوم شتاب شعاعی ذره است که ناشی از تغییر جهت سرعت حرکت دایره‌ای است. اندازه شتاب لحظه‌ای برابر است با

$a=\sqrt{a_r^۲+a_\varphi^۲} \qquad a_\varphi\equiv a_t$

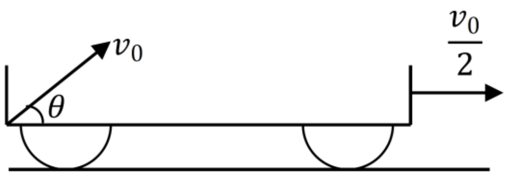


نکته

برای ذره‌ای که با اندازه سرعت V ثابت بر $\dot{\varphi}$ روی دایره‌ای حرکت می‌کند، را می‌توان به صورت نسبت زاویه طی شده در یک دور به زمان پیموده شدن آن دور تعریف کرد.

$$\dot{\varphi}=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{۲\pi}{\frac{۲\pi r}{V}}=\frac{V}{r}$$

مثال: از روی واگنی با تندی ثابت $\frac{V_\circ}{\sqrt{۲}}$ در جاده مستقیمی در حرکت است. گلوله‌ای با سرعت اولیه $V_\circ$ و زاویه $\theta_\circ$ نسبت به ناظر ساکن در واگن پرتاب می‌شود. زاویه $\theta_\circ$ چقدر باشد تا از دید ناظر ساکن برروی زمین، برد گلوله بیشینه باشد؟



حل: از دید ناظر ساکن، سرعت گلوله عبارتست از:

$$\vec{v}=v_\circ\cos\theta_\circ\hat{i}+\frac{v_\circ}{\sqrt{۲}}\hat{i}+v_\circ\sin\theta_\circ\hat{j}$$

$$\vec{V}=(V_\circ\text{Cos}\theta_\circ+\frac{V_\circ}{\sqrt{۲}})\hat{i}+V_\circ\text{Sin}\theta_\circ\hat{j}$$

برد یک پرتاب، زمانی ماکزیمم است که زاویه پرتاب از دید ناظر زمینی $\frac{\pi}{۴}$ باشد.

$$\text{tg}\frac{\pi}{۴}=\frac{V_\circ\text{Sin}\theta_\circ}{V_\circ\text{Cos}\theta_\circ+\frac{V_\circ}{\sqrt{۲}}}\Rightarrow \text{Sin}\theta_\circ-\text{Cos}\theta_\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

مثال: معادله حرکت نوسانی ذره‌ای در صفحه $x-y$ به صورت $\begin{cases} x = ۵\cos\omega t \\ y = ۵\cos(\omega t + \frac{\pi}{۲}) \end{cases}$ است.

شکل مسیر حرکت ذره را بیابید؟

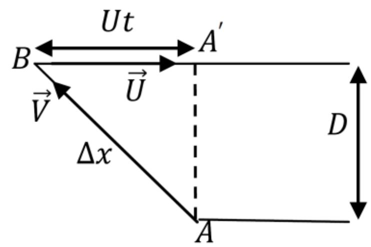
حل:

برای اینکه معادله مسیر را به دست آوریم، باید زمان را بین این دو معادله حذف کنیم. بنابراین داریم:

$$x^۲ + y^۲ = ۲۵\cos^۲\omega t + ۲۵\sin^۲\omega t = ۲۵(\cos^۲\omega t + \sin^۲\omega t) = ۲۵$$

مسیر حرکت دایره‌ای است به شعاع ۵ و به مرکز مبدأ است.

مثال- آب رودخانه‌ای به عرض D با تندی U جریان دارد. قایق‌رانی با تندی V می‌تواند پارو بزند. قایق‌ران از یک ساحل رودخانه چنان پارو می‌زند که به درست به نقطه‌ای روبه‌روی نقطه شروع در ساحل مقابل برسد و دوباره به نقطه اولیه باز می‌گردد. زمان این حرکت رفت و برگشت چقدر است؟



حل:

طبق رابطه فیثاغورس برای مثلث $A'AB$ داریم:

$$(\Delta x)^۲ = D^۲ + U^۲t^۲ \Rightarrow V^۲t^۲ - U^۲t^۲ = D^۲$$

بنابراین، زمان رفت عبارت است از:

$$t = \frac{D}{\sqrt{V^۲ - u^۲}}$$

برای برگشت هم همین زمان لازم است:

$$t = \frac{۲D}{\sqrt{V^۲ - u^۲}}$$

مثال: جسمی در مسیری مارپیچ، حرکتی را شروع می‌کند. معادله مسیر در مختصات قطبی عبارت است از:

$$r = be^{kt}, \quad \theta = ct$$

b، k و c ثابت‌های مثبت‌اند. نشان دهید درحالی‌که سوی حرکت به خارج است، زاویه میان بردار سرعت و شتاب ثابت باقی می‌ماند.

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

$$\vec{V} = bke^{kt}\hat{e}_r + bce^{kt}\hat{e}_\theta$$

$$\vec{d} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta = a_1\hat{e}_r + a_\theta\hat{e}_\theta$$

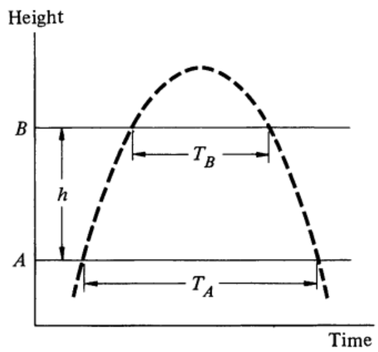
$$\vec{a} = (bk^2e^{kt} - be^{kt}c^2)\hat{e}_r + 2bcke^{kt}\hat{e}\theta$$

$$\mathrm{Cos}\theta = \frac{\vec{V}\cdot\vec{a}}{|\vec{V}||\vec{a}|} = \frac{bke^{kt}(bk^2e^{kt} - bc^2e^{kt}) + 2b^2c^2ke^{2kt}}{be^{kt}[k^2+c^2]^{\frac{1}{2}}be^{kt}[(k^2-c^2)^2+2ck]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\mathrm{Cos}\theta = \frac{k(k^2-c^2) + 2c^2k}{[k^2+c^2]^{\frac{1}{2}}[k^2+c^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{k(k^2+c^2)}{(k^2+c^2)} = k$$

$$\theta = \mathrm{Cos}^{-1}(k)$$

مثال: پرتابه‌ای را مطابق شکل به بالا پرتاب کرده‌ایم. چنانچه T_A و T_B زمان عبور پرتابه از دو نقطه‌ی مفروض بر خطوط افقی باشند. مقدار شتاب گرانشی g کدام است؟



حل:

زمان طی شدن مسیر از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی اوج، نصف مدت زمانی است که طول می‌کشد تا جسم مسیر A نقطه‌ی اوج ــA را طی کند این مطلب در مورد نقطه‌ی B هم صدق می‌کند. با توجه به این که سرعت پرتابه در نقطه‌ی اوج صفر است داریم:

$$V=-gt+V_\circ\begin{cases}\circ=-g(\frac{T_A}{۲})+V_A\Rightarrow V_A=\frac{gT_A}{۲}\\ \circ=-g(\frac{T_B}{۲})+V_B\Rightarrow V_B=\frac{gT_B}{۲}\end{cases}\quad V_B^۲-V_A^۲=-۲gy$$

$$\Rightarrow\frac{g^۲}{۴}\left(T_B^۲-T_A^۲\right)=-۲gh\Rightarrow g=\frac{۸h}{T_B^۲-T_A^۲}$$

مثال: معادلات حرکت ذره‌ای در صفحه در مختصات قطبی به شکل $r=ke^{at}$ **و** $\theta=bt$ **است. به ازای چه نسبتی از** $\frac{b}{a}$ **زاویه‌ی بین سرعت و شتاب همواره** 60° **است؟(** k,b,a **ثابت‌های مثبت هستند)**

حل:

$$r=ke^{at}\quad,\theta=bt\quad \vec{v}=\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{a}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\hat{r}+\left(r\ddot{\theta}+۲\dot{r}\dot{\theta}^2\right)\Rightarrow\vec{V}=ake^{at}\hat{r}+ke^{at}b\theta=ke^{at}\left(a\hat{r}+b\hat{\theta}\right)$$

$$\vec{a}=\left(a^۲ke^{at}-ke^{at}b^۲\right)\hat{r}+\left(\circ+۲kae^{at}b\right)\hat{\theta}=ke^{at}\left(a^۲-b^۲\right)\hat{r}+۲abke^{at}\hat{\theta}$$

$$\cos\alpha=\frac{\vec{V}.\vec{a}}{|\vec{V}||\vec{a}|}=\frac{k^۲a^۳e^{۲at}-k^۲ab^۲e^{۲at}+۲k^۲ab^۲e^{۲at}}{ke^{at}\left(a^۲+b^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}\left(ke^{at}\left(a^۲+b^۲\right)\right)}=\frac{a}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\Rightarrow\frac{a}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{b}{a}=\sqrt{۳},\cos۶\circ^\circ=\frac{۱}{۲}$$

مثال: معادله‌ی حرکت ذره‌ای در صفحه‌ی x-y به صورت $y=\frac{e^{kt}+e^{-kt}}{a},x=\frac{e^{kt}-e^{-kt}}{a}$ **است. شکل مسیر حرکت ذره کدام است؟**

حل:

$$ax=۲\sinh\ kt,ya=۲\cosh kt$$

می‌دانیم:

$$\cosh^۲kt-\sinh^۲kt=۱$$

$$\frac{y^۲a^۲}{۴}-\frac{x^۲a^۲}{۴}=۱\Rightarrow$$

با توجه به معادله مسیر، شکل مسیر هذلولی است.

تذکر

معادله‌های مقاطع مخروطی در مختصات دکارتی

دایره $x^۲+y^۲=a^۲$

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$$

بیضی $y=ax^۲+b$

مثال: توپی را از بالایی ساختمانی به ارتفاع H به طور افقی طوری پرتاب می‌کنیم که وارد پنجره‌ای به ارتفاع h از سطح زمین می‌شود اگر بلندی پنجره d و فاصله افقی دو ساختمان x باشد حداکثر سرعت اولیه عبارت است از:

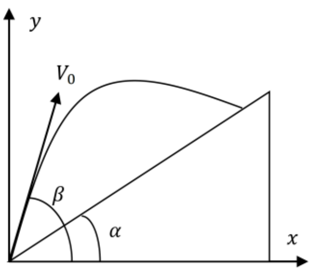
حل:

اندازه سرعت باید طوری انتخاب شود که پرتابه به لبه بالایی پنجره، برخورد کند یعنی در هنگام برخورد به دیوار روبرو، $d+h$ فاصله از زمین و در این حالت میزان سقوط در راستای قائم $(H\text{-}d\text{-}h)$ باشد. ($\theta_\circ = \circ$ پرتابه افقی)

$$-(H-d-h) = v_\circ \sin\theta_\circ t - \frac{۱}{۲}gt^۲ = \circ - \frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow t = \sqrt{۲\frac{(H-d-h)}{g}}$$

دراین زمان پرتابه از نظر افقی باید فاصله x را طی کرده باشد.

$$x = v_\circ \cos\theta_\circ t = v_\circ t = v_\circ \sqrt{\frac{۲(H-d-h)}{g}} \Rightarrow v_\circ = \sqrt{\frac{x^۲ g}{۲(H-d-h)}}$$



مثال: پرتابه‌ای را با سرعت اولیه $v_\circ$ تحت زاویه β به بالای تپه‌ای با شیب α پرتاب می‌کنیم،

الف) نشان دهید که برد پرتابه روی سطح شیب‌دار عبارتست از:

$$R = \frac{۲v_\circ^۲ \mathrm{Cos}\beta \mathrm{Sin}(\beta-\alpha)}{g\mathrm{Cos}^۲\alpha}$$

همچنین نشان دهید که مقدار بیشینه برد عبارتست از:

$$\frac{V_\circ^۲}{g(۱+\mathrm{Sin}\alpha)}$$

حل:

با توجه به شکل، x و y را برحسب R بر روی تپه می‌نویسیم:

$$(۱)\; x = R\mathrm{Cos}\alpha,\;\; x = V_\circ \mathrm{Vosgbt} \Rightarrow R\mathrm{Cos}\alpha = V_\circ \mathrm{Cos}\beta t \Rightarrow t = \frac{E\mathrm{Cos}\alpha}{V_\circ \mathrm{Cos}\beta}$$

$$(۲)\; y = R\mathrm{Sin}\alpha,\;\; y = V_\circ \mathrm{Sin}\beta t - \frac{۱}{۲}gt^۲$$

با قرار دادن رابطه (۱) در رابطه (۲) داریم:

$$R = \frac{۲V_\circ^۲ \mathrm{Cos}\beta \sin(\beta-\alpha)}{g\mathrm{Cos}^۲\alpha}$$

در اینجا R به β وابسته است و در صورتی بیشینه می‌شود که:

$$\frac{dR}{d\beta} = \circ \Rightarrow \frac{dR}{d\beta} = \frac{۲V_\circ^۲}{g\mathrm{Cos}^۲\alpha}\left[\mathrm{Cos}(۲\beta-\alpha)\right] = \circ \Rightarrow ۲\beta - \alpha = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{۲} + \frac{\pi}{۴}$$

پرسش‌های تالیفی

۱- ذره‌ای در صفحه xy در حرکت است و معادله آن $\ddot{x}=a\dot{y}$, $\ddot{y}=-b\dot{x}+c$ است که a,b,c اعداد ثابت مثبت‌اند. اگر در لحظه $t=0$ ذره در مبدأ مختصات و در حال سکون باشد، کدام‌یک از روابط زیر در هر لحظه دلخواه $t>0$ برقرار است؟

۱) $\left(1-\frac{b}{c}\dot{x}\right)^2+\frac{ab}{c^2}\dot{y}^2=1$

۲) $b^2\dot{x}^2+\frac{b}{a}\dot{y}^2=c^2$

۳) $\left(1-\frac{ab}{c}y\right)^2+\frac{ab^3}{c^2}x^2=1$

۴) $abx^2+a^2y^2=\frac{c^2}{b^2}\frac{1}{2}$

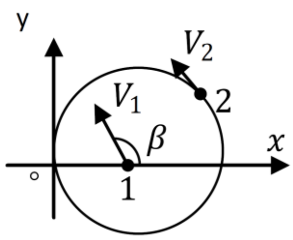
۲- ذره‌ای روی صفحه xy طوری حرکت می‌کند که همواره مختصات آن توسط دو معادله $\begin{cases}x(t)=R(\omega t-\sin\omega t)\\ y(t)=R(1-\cos\omega t)\end{cases}$ که در آن R,ω مقادیر ثابتی هستند بیان می‌شود. زاویه بین بردار سرعت و شتاب در لحظه $t=4s$ کدام است؟

۳- دو بردار $\vec{A}=2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{B}=-3\hat{j}+2\hat{k}$ مفروض است. بردار عمود بر صفحه مشترک این دو بردار کدام است؟

۴- معادلات حرکت ذره‌ای در صفحه در مختصات قطبی به شکل $r=ke^{at}$, $\theta=bt$ است. به ازای چه نسبتی از $\frac{b}{a}$ زاویه بین سرعت و شتاب ذره همواره 60° است؟(k,a,b ثابت‌های مثبت هستند.)

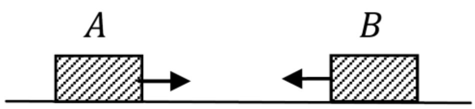
۵- معادله مسیر حرکت زنبور عسلی در مختصات قطبی به شکل $\theta=ct$, $r=be^{kt}$ که k,b,c اعداد ثابت مثبتی هستند. در لحظه t، زاویه بردار مکان و سرعت لحظه‌ای کدام است؟

۶- شکل زیر دوگلوله کوچک را در لحظه $t=0$ نشان می‌دهد. گلوله شماره ۱ با سرعت ثابت $\vec{V}_1$ در راستایی که با محور x زاویه $\beta=27\,rad$ می‌سازد، حرکت می‌کند و گلوله شماره ۲ در جهت مثلثاتی روی محیط دایره حرکت می‌چرخد؛ به طوری‌که $|\vec{V}|=\alpha t$, $\alpha=4\frac{m}{s^2}$. اگر پس از ۲ ثانیه گلوله‌ها با هم برخورد کنند، اندازه $\vec{V}_1$ چند متر بر ثانیه است؟

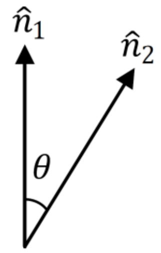


۷- دو متحرک B و A روی یک خط مستقیم به سمت یکدیگر در حرکت‌اند. تندی متحرک A، $16\frac{m}{s}$ و تندی متحرک B $8\frac{m}{s}$ است. لحظه‌ای که فاصله دو متحرک از هم 45m است، هر دو ترمز می‌کنند. متحرک A با شتاب

ثابت ۲ $\frac{m}{s^2}$ و متحرک B با شتاب ۴ $\frac{m}{s^2}$ ترمز می‌کنند. پس از چند ثانیه از شروع ترمز، دو متحرک به یکدیگر برخورد می‌کنند. تندی متحرک B در لحظه برخورد تقریباً کدام است؟



۸- $\hat{n}_1, \hat{n}_2$ دو بردار یکه‌اند که با هم زاویه θ می‌سازند. کدام گزینه یک مجموعه بردارهای یکه و دوبه‌دو متعامد را مشخص می‌کند؟



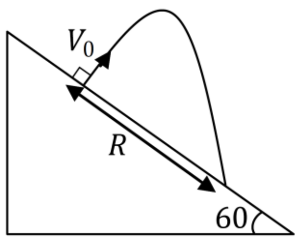
۱) $\frac{\hat{n}_1(\hat{n}_1\cdot\hat{n}_2)-\hat{n}_2}{\sin\theta}, \frac{\hat{n}_1\times\hat{n}_2}{\sin\theta}, \hat{n}_1$

۲) $\frac{\hat{n}_1(\hat{n}_1\cdot\hat{n}_2)-\hat{n}_2}{\sin^2\theta}, \frac{\hat{n}_1\times\hat{n}_2}{\sin\theta}, \hat{n}_1$

۳) $\frac{\hat{n}_1(\hat{n}_1\cdot\hat{n}_2)-\hat{n}_2}{\sin\theta}, \frac{\hat{n}_2\times\hat{n}_1}{\sin\theta}, \hat{n}_2$

۴) $\frac{\hat{n}_1(\hat{n}_1\cdot\hat{n}_2)-\hat{n}_2}{\sin^2\theta}, \frac{\hat{n}_2\times\hat{n}_1}{\sin\theta}, \hat{n}_2$

۹- گلوله‌ای با سرعت V_0 با زاویه قائم نسبت به سطح تپه از روی تپه‌ای که شیب آن نسبت بـه افـق 60° اسـت شلیک می‌شود. برد پرتابه، R، برابر چه مقداری است؟



۱۰- ذره‌ای با تندی V در صفحه xy روی یک مسیر دایره‌ای به شعاع R و به مرکز مبدأ مختصات حرکت می‌کند. در مورد حرکت این ذره صحیح چه می توان گفت؟ $\left((x,y),(V_x,V_y),(a_x,a_y)\right)$ به ترتیب مؤلفه‌های شـتاب، سرعت و مکان ذره در لحظه دلخواه t هستند.

۱۱- پرتابه‌ای از ارتفاعی بالاتر از سطح زمین، در غیاب مقاومت هوا، در لحظه $t=0$ با سرعت اولیه V_0 به صـورت افقی (موازی سطح زمین) پرتاب می‌شود. شعاع انحنای مسیر در لحظه دلخواه t قبل از برخورد به زمـین چقـدر است؟

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

-۱

$$\ddot{y}=b\dot{x}+c \Rightarrow \dot{y}=-bx+ct+A' \qquad \dot{y}(0)=0 \Rightarrow A'=0$$

با جایگذاری $\dot{y}$ در رابطه $\ddot{x}=a\dot{y}$ به‌دست می‌آوریم:

$$\ddot{x}=-abx+act$$

$$x=A\sin\sqrt{ab}\,t+B\cos\sqrt{ab}\,t+\frac{c}{b}t$$

$$x(0)=B=0\ ,\ \dot{x}(0)=A\sqrt{ab}+\frac{c}{b}=0 \qquad \Rightarrow \qquad A=-\frac{c}{b\sqrt{ab}} \Rightarrow x=-\frac{c}{b\sqrt{ab}}\sin\sqrt{ab}\,t+\frac{c}{b}t$$

$$\Rightarrow \dot{x}=-\frac{c}{b}\cos\sqrt{ab}\,t+\frac{c}{b} \Rightarrow 1-\frac{b}{c}\dot{x}=\cos\sqrt{ab}t \qquad (1)$$

$$\ddot{x}=\frac{c\sqrt{ab}}{b}\sin\sqrt{ab}\,t \Rightarrow \dot{y}=\frac{\ddot{x}}{a}=\frac{c}{\sqrt{ab}}\sin\sqrt{ab}\,t \Rightarrow \frac{\sqrt{ab}}{c}\dot{y}=\sin\sqrt{ab}t \quad (2)$$

$$\left(1-\frac{b}{c}\dot{x}\right)^2+\frac{ab}{c^2}\dot{y}^2=1$$

-۲

$$V_x=\dot{x}(t)=R\omega(1-\cos\omega t)\ ,\ V_y=\dot{y}(t)=R\omega\sin\omega t$$

$$a_x=\dot{V}_x=R\omega^2\sin\omega t \quad , \quad a_y=\dot{V}_y=R\omega^2\cos\omega t$$

اگر زاویه $\vec{V},\vec{a}$ را α باشد:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{V}}{aV}=\frac{a_xV_x+a_yV_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}\sqrt{V_x^2+V_y^2}}=\frac{R^2\omega^3\sin\omega t}{(R\omega^2)\left(2R\omega\sin\frac{\omega t}{2}\right)}=\cos\frac{\omega t}{2}$$

-۳

اگر بردار موردنظر را $\vec{C}$ بنامیم؛ با توجه به آنکه بردار $\vec{A}\times\vec{B}$ بر صفحه $\vec{B},\vec{A}$ عمود است، بردار $\vec{C}$ باید با بردار $\vec{A}\times\vec{B}$ موازی باشد.

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & -3 & 1\\ 0 & -3 & 2\end{vmatrix} \Rightarrow \vec{A}\times\vec{B}=-3\hat{i}-4\hat{j}-6\hat{k}=-\left(3\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}\right)$$

-۴

$$r=ke^{at} \qquad , \qquad \theta=bt \qquad (1)$$

$$\vec{V}=\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta} \qquad (2) \qquad \vec{a}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\hat{r}+\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta} \qquad (3)$$

$$1,2 \ \Rightarrow \vec{V}=ke^{at}\left(a\hat{r}+b\hat{\theta}\right) \qquad 1,3 \ \Rightarrow \vec{a}=ke^{at}\left(a^2-b^2\right)\hat{r}+2abke^{at}\hat{\theta}$$

$$\cos\alpha=\frac{\vec{V}.\vec{a}}{|\vec{V}||\vec{a}|}=\frac{k^2a^3e^{2at}-k^2ab^2e^{2at}+2k^2ab^2e^{2at}}{ke^{at}\left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(ke^{at}\left(a^2+b^2\right)\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (4)$$

$$\alpha = ۶۰^\circ \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^۲}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{۳}$$

-۵

$$\vec{r}\cdot\vec{V} = |\vec{r}|\ |\vec{V}|\ \cos\theta \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{\vec{r}.\vec{V}}{|\vec{r}|\ |\vec{v}|}$$

$$\vec{r} = be^{kt}\hat{r} \quad \Rightarrow \vec{V} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} = bke^{kt}\hat{r} + cbe^{kt}\hat{\theta}$$

$$\theta = \cos^{-۱}\frac{b^۲ke^{۲kt}}{b^۲e^{۲kt}\left(k^۲+c^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}} = \cos^{-۱}\left[\frac{k}{\left(k^۲+c^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}}\right]$$

-۶.

$$\begin{cases} s = \frac{۱}{۲}\alpha t^۲ = ۲t^۲ \\ s = \beta R = ۲R \end{cases} \rightarrow ۲R = ۲t^۲ \Rightarrow R=t^۲ \qquad , \quad t = \frac{R}{V_1} \Rightarrow t = \frac{t^۲}{V_۱} \rightarrow V_۱ = ۲$$

-۷

$$V_B = V_{\circ B} + a_B t \rightarrow ۰ = ۸ - ۴t \rightarrow t = ۲(s)$$

$$V_B{}^۲ - V_{\circ B}{}^۲ = ۲a_B\Delta x_B \rightarrow \Delta x_B = \frac{۸^۲}{۴\times۲} = ۸(m)$$

$$\begin{cases} x_A = \frac{۱}{۲}a_B t^۲ + V_{\circ A}t \\ x_B = \frac{۱}{۲}a_B t^۲ + V_{\circ B}t \end{cases} \Rightarrow x_A + x_B = \frac{۱}{۲}(a_B + a_B)t^۲ + (V_{\circ A} + V_{\circ B})t$$

$$۴۵ = \frac{۱}{۲}(-۲-۴)t^۲ + (۱۶+۸)t \Rightarrow ۳t^۲ - ۲۴t + ۴۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۳s \\ t = ۵s \end{cases}$$

$$V_A^2 - V_{\circ A}^۲ = ۲a_A\Delta x_A \Rightarrow V_A^۲ - (۱۶)^۲ = -۲(۲)(۴۵-۸) \Rightarrow V_A = \sqrt{۱۰۸}\left(\frac{m}{s}\right)$$

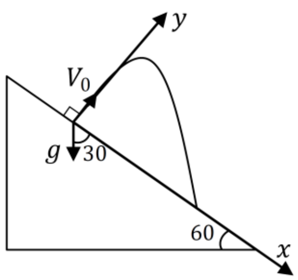
$$V_A = V_{\circ A} + a_A t \rightarrow \sqrt{۱۰۸} = ۱۶ - ۲t \rightarrow t = ۲/۸(s)$$

-۸

می توان بررسی کرد که:

$\frac{\hat{n}_۱\times\hat{n}_۲}{\sin\theta}$ و $\hat{n}_۱$ دو بردار یکه عمود بر هم هستند. برای بردار سوم می‌توان گزینه‌های ۳ و ۴ را حذف کرد؛ چون باید این مجموعه دوبه‌دو بر هم عمود باشند. یعنی اگر $\hat{n}_۲$ در بردار سومی که در گزینه‌های ۳ یا ۴ آمده است ضرب داخلی شود، باید حاصل صفر شود تا شرط عمود بودن را ارضا کند.

-۹



$$\begin{cases} a_x = g\cos ۳۰^\circ = \dfrac{\sqrt{۳}}{۲}g \\ a_y = g\sin ۳۰^\circ = \dfrac{-۱}{۲}g \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{۰x} = ۰ \\ v_{۰y} = v_۰ \end{cases}$$

$$x = \frac{۱}{۲}a_x t^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}gt^۲ \Rightarrow gt^۲\,\frac{۴x}{\sqrt{۳}} \Rightarrow t = \left(\frac{۴x}{\sqrt{۳}g}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

$$y = \frac{۱}{۲}a_y t^۲ + v_{۰y}t \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}a_y t^۲ + v_۰ t \Rightarrow y = -\frac{۴x}{۴\sqrt{۳}} + v_۰\left(\frac{۴x}{\sqrt{۳}g}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\frac{-x}{\sqrt{۳}} + v_۰\left(\frac{۴x}{\sqrt{۳}g}\right)^{\frac{۱}{۲}} = ۰ \Rightarrow x = ۴\sqrt{۳}\,\frac{v_۰^۲}{g}$$

-۱۰

$$\vec{r} = R\cos\omega t\hat{i} + R\sin\omega t\hat{j}$$

$$\vec{V} = -R\omega\sin\omega t\hat{i} + R\omega\cos\omega t\hat{j}$$

$$\vec{a} = -R\omega^۲\cos\omega\hat{i} - R\omega^۲\sin\omega t\hat{j}$$

$$x\left|\frac{V_x a_y - V_y a_x}{V_y}\right| = \frac{R\cos\omega t}{R\omega\cos\omega t}(R^۲\omega^۲\sin^۲\omega t + R^۲\omega^۲\cos^۲\omega t) = R^۲\omega^۲ = v^۲$$

-۱۱

$$\vec{V}\times\vec{a} = \frac{V^۳}{\rho}\hat{e}_r\times\hat{e}_n \rightarrow \left|\vec{V}\times\vec{a}\right| = \frac{V^۳}{\rho} \rightarrow \rho = \frac{V^۳}{\left|\vec{V}\times\vec{a}\right|}$$

$$\vec{V} = V_{۰x}\hat{i} + V_{۰y}\hat{j} = V_۰\hat{i} - gt\,\hat{j} \qquad , \qquad \vec{a} = -g\hat{j} \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{\left(V_۰^۲ + g^۲t^۲\right)^{\frac{۳}{۲}}}{V_۰ g}$$

فصل دوم

دینامیک نیوتنی

آنچه که در این فصل می‌خوانیم

- ☑ قوانین نیوتون
- ☑ نیروهای متغیر در فیزیک
- ☑ قانون بقای انرژی-جرم متغیر
- ☑ حرکت نوسانی و تحلیل حرکت

فصل دوم

دینامیک نیوتونی

قوانین نیوتن

برای بررسی حرکت سیستم می‌توان با توجه به وجود نیروهای موجود در سیستم به تحلیل برهم‌کنش‌ها و حرکت آنها پرداخت:

۱- قانون لختی در سیستم‌ها(قانون اول): اگر برآیند نیروهای وارد بر جسمی صفر باشد، آنگاه اگر جسم مورد نظر ساکن باشد در همان حالت می‌ماند و اگر در حال حرکت باشد با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد.

۲- اگر $\vec{F}$ برآیند تمامی نیروهای وارد شده بر جسم باشد آنگاه می‌توان نوشت:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

۳- هر کنش (عمل) را واکنشی (عکس العمل) است مساوی با آن ولی در خلاف جهت آن.

نکته

امکان برآیندگیری از نیروها طبق تعریف قانون سوم نیوتون وجود ندارد؛ چرا که به دو جسم مختلف اعمال می‌شود.

تذکر

برای حل مسائل دینامیک در نظر گرفتن چند نکته ضروری است:

۱- یک دستگاه مرجع لخت انتخاب می‌کنیم و جهت‌مندی مربوط به آن.

۲- محیط و سیستم را از هم جدا کنیم.

۳- همه نیروهای وارد شده از طرف محیط به سیستم موردنظر را در دیاگرام آزاد نیروها رسم می‌کنیم و شروع به برآیندگیری طبق قانون دوم نیوتون می‌کنیم.