طراحی سیستم‌های صنعتی

همراه با پاسخ تشریحی کنکور دکتری

سراسری، آزاد، پیام نور

از سری کتابهای مهندسی صنایع

مؤلفان:

مرتضی قمی اویلی

حسین رئوف‌پناه

دکتری

قمی اویلی مرتضی
طراحی سیستم‌های صنعتی رشته مهندسی صنایع/ مرتضی قمی اویلی ـ حسین رئوف‌پناه
مشاوران صعود ماهان: ۱٤۰۱
۳٤۹ص: جدول، نمودار (آمادگی آزمون دکتری صنایع)
ISBN: 978-600-458-675-7
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
فارسی ـ ویرایش اول ـ چاپ اول
طراحی سیستم‌های صنعتی ـ همراه با پاسخ کنکور دکتری سراسری، آزاد، پیام نور
قمی اویلی مرتضی ـ حسین رئوف‌پناه
ج ـ عنوان
رده بندی کنگره: LB ۲۳۵۳ /ق۸٦۳۷ ط٤ ۱۳۹۳
رده‌بندی دیویی ۳۷۸/۱٦٦٤
کتابخانه ملی ایران ۳٤۵۲۲۷۵

موسسه آموزش عالی آزاد ماهان
www.mahan.ac.ir

انتشارات مشاوران صعود ماهان

❑ نام کتاب: .... طراحی سیستم‌های صنعتی
❑ مدیران مسئول: .... هادی و مجید سیاری
❑ مولف: .... مرتضی قمی اویلی- حسین رئوف‌پناه
❑ برنامه‌ریزی محتوا: .... سمیه بیگی
❑ ناشر: .... مشاوران صعود ماهان
❑ نوبت و تاریخ چاپ: .... چاپ اول /۱۴۰۱
❑ تیراژ: .... ۱۰۰۰ نسخه
❑ قیمت: ۲/۵۹۰/۰۰۰ریال
❑ شابک: ISBN۹۷۸-۶۰۰-۴۵۸-۶۷۵-۷

انتشارات مشاوران صعود ماهان:تهران ـ خیابان ولیعصر، بالاتر از تقاطع ولیعصر مطهری، پلاک ۲۰۵۰
تلفن: ۸۸۱۰۰۱۱۳ و ۸۸۴۰۱۳۱۳

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به موسسه آموزش عالی آزاد ماهان می‌باشد. و هرگونه اقتباس و کپی‌برداری از این اثر بدون اخذ مجوز پیگرد قانونی دارد.

پیشگفتار ناشر

بنام خدا

ایمان دارم که هر تغییر و تحول بزرگی در مسیر زندگی بدون تحول معرفت و نگرش میسر نخواهد بود. پس بیایید با اندیشه توکل، تفکر، تلاش و تحمل در توسعه دنیای فکریمان برای نیل به آرامش و آسایش توأمان اولین گام را برداریم. چون همگی یقین داریم دانایی، توانایی می‌آورد.

شاد باشید و دلی را شاد کنید

برادران سیاری

بهار ۹۳

پیشگفتار مولفین

با یادش

با توجه به اهمیت درس طراحی سیستم‌های صنعتی در مقطع کارشناسی ارشد و همچنین کنکور دکتری مهندسی صنایع، تصمیم به آماده‌سازی کتابی جامع و کامل در این زمینه گرفتیم. به‌گونه‌ای که نیاز دانشجویان به خصوص برای کنکور دکتری مهندسی صنایع (سراسری ـ آزاد) به طور کامل برطرف گردد.

در تألیف کتاب سعی گردیده است با استفاده از تمامی مراجع مهم، مطالب درسی بطور کامل و صد البته ساده و روان بیان گردند. در بین توضیحات درسی و پایان هر فصل با ارائه مثال‌ها، تمرینها و تست‌های متنوع اعم از تست‌های کنکور و تألیفی تلاشی شده است تا مفاهیم گفته شده بطور کامل تثبیت گردند.

خوانندگان گرامی می‌توانند نظرات ارزشمند خود را در مورد این اثر با مولفان از طریق آدرس الکترونیکی مولفان که در پایان ذکر شده است در میان بگذارند. همچنین برای دسترسی به تست‌ها و تمرین‌های بیشتر به پایگاه اینترنتی www.mortezaghomi.ir مراجعه فرمایند.

ghomi@ind.iust.ac.ir

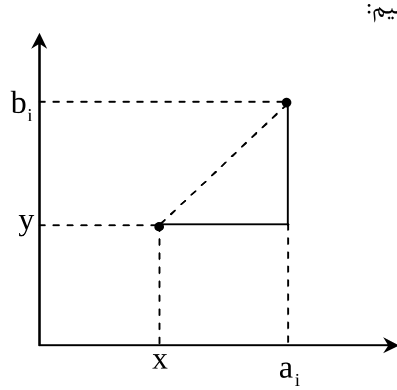
st_h_raoofpanah@azad.ac.ir

با احترام فراوان
مرتضی قمی
حسین رئوف‌پناه
بهار ۱۳۹۳

فصل اول

فاصله‌ها در مکان‌یابی

اگر مختصات وسیله جدید y, x و برای وسیله موجود i ، b_i, a_i باشند، به طوریکه $X=(x,y)$ و $P_i=(a_i,b_i)$ آنگاه فواصل زیر را می‌توانیم تعریف کنیم:



شکل 1-1- فاصله بین وسیله جدید x و وسیله موجود P_i

1-فاصله خط مستقیم یا اقلیدسی[1] یا مورب

فاصله اقلیدسی بین x و P_i به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_E(X,P_i)=\left[(x-a_i)^2+(y-b_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

فاصله اقلیدسی برای برخی از مسائل جایابی شبکه، شامل نقاله‌ها و سفر هوایی به کار می‌رود. برخی از مسائل سیم‌کشی الکتریکی و مسائل طراحی لوله‌کشی نیز نمونه‌هایی از مسائل فاصله اقلیدسی هستند.

[1] Euclidean

2-فاصله مجذور خط مستقیم یا مربع اقلیدسی[1]

در برخی مسائل جایابی تسهیلات، هزینه تابع خطی درجه اول از فاصله نیست. به عنوان مثال انتظار می‌رود هزینه مرتبط با عکس‌العمل یک ماشین آتش‌نشانی برای یک آتش با فاصله غیرخطی باشد. فرض کنید هزینه با مربع فاصله اقلیدسی بین P_i, X متناسب باشد. فاصله اقلیدسی بین P_i, X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_{SE}(X, P_i) = (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2$$

این نوع فاصله می‌تواند در جایابی مراکز اضطراری مثل احداث ایستگاه آتش‌نشانی یا جایابی آمبولانس یا مسائل خدمات اورژانس کاربرد داشته باشد.

3-فاصله متعامد [2]

در بیشتر مسائل جایابی ماشین، فاصله در مجموعه‌ای از راهروهایی پیموده می‌شود که در الگویی مستطیلی و موازی با دیوارهای ساختمان هستند. در چنین وضعیتی، فاصله متناسب به صورت متعامد (مستطیلی، خطی شکسته، مختصاتی، پله‌ای، هامیلتون، راهروهای عمود بر هم، کلان شهری یا منهتن) است. فاصله متعامد بین Xو P_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d_R(X, P_i) = |x - a_i| + |y - b_i|$$

فاصله متعامد برای برخی تحلیل‌های جایابی شهری مناسب است که در آن سفر در امتداد مجموعه محدبی از خیابان‌ها اتفاق می‌افتد. به علاوه، تعدادی از ادارات، مجموعه از راهروها و تالارهای متعامد را برای حرکت پرسنل به کار می‌برند.

4-فاصله چبی‌شف[3]

فاصله چبی‌شف بین دو نقطه $X = (x, y)$ و $P_i = (a_i, b_i)$ با علامت $t(X, P_i)$ یا $d_{ch}(X, P_i)$ نمایش داده می‌شود و به صورت $t(X, P_i) = Max\{|x - a_i|, |y - b_i|\}$ تعریف می‌گردد. در حالی که فاصله متعامد برابر مجموع فواصل افقی و عمودی دو نقطه است، فاصله چبی‌شف برابر ماکزیمم فواصل افقی و عمودی دو نقطه است. این روش در مسائل انتخاب سفارش[4] کاربرد دارد و از جمله کاربردهای دیگر این فاصله این است که حرکت مواد در کارخانه به کمک جرثقیل‌های مجهز به دو موتور یا سه موتور انجام می‌شود. برای جرثقیل‌های سه موتوره می‌توان فاصله چبی‌شف را به صورت زیر تعریف کرد که سه موتور مجزا برای حرکت در سه محور z,y,x دارد:

$$d_{ch}(X, P_i) = Max\{|x - a_i|, |y - b_i|, |z - c_i|\}$$

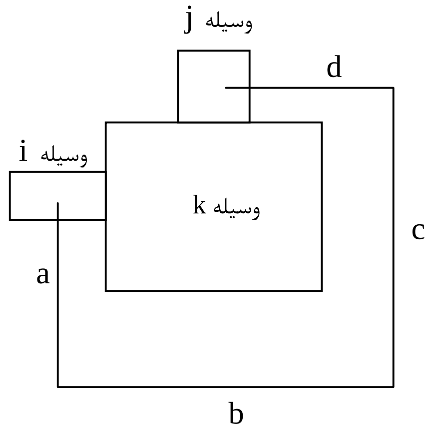
---

1 -Squared Euclidean
2 -Reclilinear
3 -tchebychev
4 -order picking

5- فاصله راهرویی

فاصله راهرویی با تمامی روش‌های دیگر متفاوت است؛ زیرا در این روش، فواصل واقعی که در طول راهروها به وسیله تجهیزات انتقال مواد طی می‌شود، محاسبه می‌گردد. در شکل 1-2، فاصله راهرویی بین تسهیلات j,i عبارت است از حاصل جمع فواصل d,c,b,a. در این مثال اگر از روش مستطیلی استفاده کنیم، ممکن است فاصله بدست آمده کمتر از حد واقعی خود برآورد شود. کاربرد اصلی این روش، در مسائل چیدمان بخش‌های تولیدی است. چون مسیر و تجهیزات انتقال مواد در مراحل اولیه طراحی هنوز مشخص نشده است.

این روش فقط در مراحل ارزیابی و برنامه‌ریزی مورد استفاده قرار می‌گیرد.



شکل 1-2- محاسبه فاصله به روش راهرویی و همسایگی

6-فاصله همسایگی یا مجاورت

از آنجا که این روش نشان دهنده همسایه بودن یا نبودن تسهیلات است به این نام شناخته می‌شود. اشکال عمده این روش آن است که میان تسهیلات غیرمجاور تفاوت قائل نمی‌شود. برای مثال اگر تسهیلات iو j از هم 5 فوت فاصله داشته باشند و همجوار نباشند، از طرفی دیگر تسهیلات iو k از هم 100 فوت فاصله داشته باشند و غیر همجوار باشند، از نظر این روش هیچ تفاوتی با هم ندارند و این روش، ارزش صفر را برای d_{ij} و d_{ik} در نظر می‌گیرد. در شکل 1-2، $d_{ij}=0, d_{ik}=d_{jk}=1$ می‌باشد زیرا جفت تسهیلات jk,ik همجوارند ولی جفت تسهیلات j,i همجوار نیستند. در حالت کلی داریم:

$$d_{ij}=\begin{cases}1 & \text{اگر j,i مجاور باشند.}\\0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

این نوع روش اندازه‌گیری برای محاسبه امتیاز هر چیدمان از طریق تکنیک برنامه‌ریزی جانمایی سیستماتیک (SLP)[1] مورد استفاده قرار می‌گیرد.

7-کوتاهترین مسیر

در مسائل مکان‌یابی شبکه‌ای، روش کوتاهترین مسیر برای تعیین فاصله بین دو گره مورد استفاده قرار می‌گیرد. یک شبکه، از گره‌ها و یال‌هایی تشکیل شده است که گره‌ها، تجهیزات و یال‌ها مسیر بین هر جفت از تسهیلات را نشان می‌دهد. معمولاً بر روی هر یال، وزنی نوشته شده است که نشان دهنده فاصله، زمان یا هزینه حرکت بین دو گره‌ای است که توسط این یال به هم وصل شده‌اند. چون معمولاً بیش از یک مسیر بین هر دو جفت گره وجود دارد، کوتاهترین مسیر مورد توجه قرار می‌گیرد. مسائل توزیع و مکان‌یابی را می‌توان به صورت شبکه نمایش داد و کوتاهترین مسیر در اینگونه مسائل استفاده می‌شود.

نکته1) اگر فاصله بین دو نقطه فرضی با چهار نوع مسافت متعامد، اقلیدوسی، مربع اقلیدسی و چبی‌شف با هم برابر باشند. باید دو نقطه فرضی اولاً در راستای افقی یا عمودی قرار گرفته باشند و ثانیاً فاصله دو نقطه با هم برابر یک باشند. یعنی اگر برای دو نقطه $b(x',y'),a(x,y)$ رابطه زیر برقرار باشد، دو حالت رخ می‌دهد.

$$d_{SE}=d_R=d_S=d_{Ch}=1$$

حالت اول) دو نقطه در راستای افقی باشند.

$$y=y' \quad , \quad |x-x'|=1$$

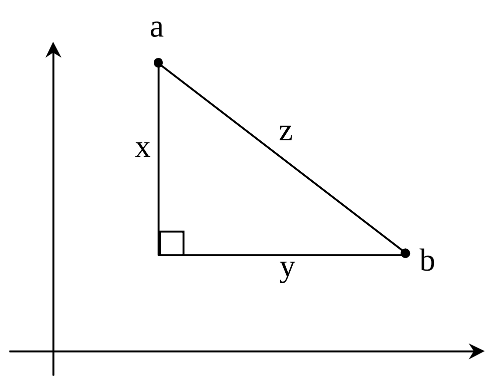
حالت دوم) دو نقطه در راستای عمودی باشند.

$$x=x' \ , \quad |y-y'|=1$$

نکته 2) اگر فاصله افقی و یا عمودی دو نقطه بزرگتر از یک باشد آنگاه همواره داریم:

$$d_{SE}\geq d_R\geq d_E\geq d_{Ch}$$

اثبات)



[1] -Systematic Layout Planning

با توجه به مثلث قائم الزاویه بالا می‌توان گفت وتر بزرگتر مساوی از اضلاع قائمه می‌باشد پس داریم:

$$\left.\begin{matrix} Z \geq x \\ Z \geq y \end{matrix}\right\} \to Z \geq Max(x,y) \to d_E(a,b) \geq d_{Ch}(a,b) \qquad I$$

و طبق نامساوی مثلث داریم:

$$x + y \geq z \to d_R(a,b) \geq d_E(a,b) \qquad II$$

و همچنین طبق قضیه فیثاغورث داریم:

$$z^2 = x^2 + y^2 \geq x + y \to d_{SE}(a,b) \geq d_R(a,b) \qquad III$$

از روابط III, II, I نتیجه گرفته می‌شود که:

$$d_{SE} \geq d_R \geq d_E \geq d_{Ch}$$

نکته3)فرمول کلی تابع فاصله بین دو نقطه X و Y با مختصات‌های $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$، به صورت زیر می‌باشد:

$$L_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{p} | x_i - y_i |^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

با توجه به فرمول کلی که در بالا آمده است، داریم:

1 – اگر $P = 1$ باشد، آنگاه نوع فاصله، به فاصله متعامد (منتهن) تبدیل خواهد شد.

2 – اگر $P = 2$ باشد، آنگاه نوع فاصله، به فاصله اقلیدسی (مورب) تبدیل خواهد شد.

3 - اگر $P \to \infty$ باشد، آنگاه نوع فاصله، به فاصله چبی‌شف (ماکزیمم فواصل افقی و عمودی دو نقطه) تبدیل خواهد شد.

نکته4) نحوه تبدیل فاصله متعامد (کلان شهری) به فاصله اقلیدسی (خط مستقیم) به صورت زیر می‌باشد:

فاصله متعامد بین دو نقطه $P = (a,b)$ و $X = (x,y)$ برابر است با مجموع فاصله اقلیدسی دو نقطه $(a,0),(x,0)$ و دو نقطه $(0,b),(0,y)$ که این موضوع را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$d_R(X, \mathrm{P}) = d_E\left\{(x,0),(a,0)\right\} + d_E\left\{(0,y),(0,b)\right\}$$

$$| x - a | + | y - b | = \left\{\sqrt{(x-a)^2 + (0-0)^2}\right\} + \left\{\sqrt{(0-0)^2 + (y-b)^2}\right\}$$

$$| x - a | + | y - b | = \sqrt{(x-a)^2} + \sqrt{(y-a)^2} \Rightarrow | x - a | + | y - b | = | x - a | + | y - b |$$

نکته 5) نحوه تبدیل فاصله متعامد (مستطیلی) به فاصله چبی شف به صورت زیر می‌باشد:

فاصله متعامد بین دو نقطه $X = (x,y), P = (a,b)$ برابر است با فاصله چبی‌شف دو نقطه تبدیل یافته نظیر $X' = (r,s), P' = (a',b')$ تحت تبدیل $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ که این موضوع را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

در تبدیل T، دو نقطه اولیه X و P حول مبدا 45 درجه جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌یابند و به دو نقطه ثانویه P', X' تبدیل می‌شوند.

$$X' = X.T \Rightarrow X' = (x, y)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (x+y, -x+y) \Rightarrow X' = (r, s) = (\mathrm{x+y}, -\mathrm{x+y})$$

$$P' = P.T \Rightarrow P' = (a, b)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (a+b, -a+b) \Rightarrow P' = (a', b') = (a+b, -a+b)$$

پس داریم:

فاصله چبی شف بین دو نقطه P', X' = فاصله متعامد بین دو نقطه X و P

$$\Rightarrow |x-a| + |y-b| = Max\{r-a', s-b'\}$$

نکته6) نحوه تبدیل فاصله چبی شف به فاصله متعامد (خطی شکسته) به صورت زیر می‌باشد:

با استفاده از تبدیل معکوس $T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ می‌توان نقاط تبدیل یافته P' و X' را به نقاط نظیر XوP تبدیل کرد

که این موضوع را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$X = X'.T^{-1} \Rightarrow X = (\mathrm{r}, \mathrm{s})\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\frac{r-s}{2}, \frac{r+s}{2})$$

$$P = P'.T^{-1} \Rightarrow X = (\mathrm{a'}, \mathrm{b'})\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\frac{a'-b'}{2}, \frac{a'+b'}{2})$$

سوالات چهارگزینه‌ای فصل اول

1- کدام یک از فواصل زیر در مسائل چیدمان بخش‌های تولیدی مورد استفاده قرار می‌گیرد؟

1)فاصله مختصاتی 2) فاصله مجاورت 3) فاصله راهرویی 4) فاصله چبی‌شف

2- کدام یک از فواصل زیر در جابجایی نقاله ها مورد استفاده قرار می‌گیرد؟

1) فاصله مجذور اقلیدسی 2) فاصله پله ای

3) فاصله همسایگی 4) فاصله خط مستقیم

3- بین دو نقطه به ترتیب چند مسیر برای فاصله اقلیدسی و فاصله متعامد وجود دارد؟

1) مسیرهای زیاد با تعداد متناهی ـ یک مسیر 2) یک مسیر ـ مسیرهای زیاد با تعداد متناهی

3) مسیرهای زیاد با تعداد نامتناهی ـ یک مسیر 4) یک مسیر ـ مسیرهای زیاد با تعداد نامتناهی

4- اگر فاصله افقی وعمودی بین دو نقطه b,a بزرگتر از یک باشد آنگاه کدام مقایسه برای اندازه فاصله بین دو نقطه b,a همواره صحیح است؟

1) $d_{SE} = d_R = d_E = d_{Ch}$ 2) $d_{SE} \le d_R \le d_E \le d_{Ch}$

3) $d_{SE} > d_R > d_E > d_{Ch}$ 4) $d_{SE} \ge d_R \ge d_E \ge d_{Ch}$

5-کدامیک از فواصل زیر در مسائل انتخاب سفارش (Order picking) کاربرد دارد؟

1) فاصله چبی‌شف 2) فاصله منهتن

3) فاصله مستقیم 4) فاصله مجذور مستقیم

6- فاصله چبی شف کدام است؟ (پیام نور – اردیبهشت 89)

1) $Max\left\{\sqrt{(x_1-x_2)^2}, \sqrt{(y_1-y_2)^2}\right\}$ 2) $Min\left\{\sqrt{(x_1-x_2)^2}, \sqrt{(y_1-y_2)^2}\right\}$

3) $Max\left\{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\right\}$ **4)** $Min\left\{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\right\}$

7- چنانچه نقاط دوران یافته تسهیلات موجود با زاویه 45 درجه حول مبدأ دارای مختصات $(r_1, s_1) = (12, 22)$ و $(r_2, s_2), (8,16)$ باشد. در این صورت فاصله متعامد دو نقطه اولیه چقدر بوده است؟ (دکتری 91 و پیام نور – آذر 91)

1)10 2)4

3) قابل محاسبه نیست (اطلاعات دیگری لازم است) 4) هیچکدام

پاسخ تشریحی سوالات چهارگزینه‌ای فصل اول

1-گزینه 3 صحیح است.

کاربرد اصلی فاصله راهرویی در مسائل چیدمان بخش‌های تولیدی است زیرا مسیر و تجهیزات انتقال مواد در مراحل اولیه طراحی هنوز مشخص نشده است.

2-گزینه 4 صحیح است.

3- گزینه 2 صحیح است.

بین هر دو نقطه یک مسیر یگانه برای فاصله اقلیدسی و چند مسیر مختلف برای فاصله متعامد وجود دارد البته تعداد این مسیرها، متناهی‌اند.

4- گزینه 4 صحیح است.

طبق **نکته** 2 همین فصل و اثبات آن، گزینه 4 صحیح می‌باشد.

5- گزینه 1 صحیح است.

فاصله چبی‌شف در مسائل انتخاب سفارش (order picking)، کاربرد دارد.

7- گزینه 4 صحیح است.

روش اول) فاصله متعامد دو نقطه اولیه برابر فاصله چبی‌شف دو نقطه دوران یافته می‌باشد:

$$d_{ch} = Max\{|r_1 - r_2|, |s_1 - s_2|\} = Max\{|12-6|, |22-16|\} = Max\{6,6\} = 6$$

که عدد 6 در هیچ یک از گزینه‌ها موجود نمی‌باشد.

روش دوم)

$$(a_1, b_1) = (r_1, s_1)T^{-1} = (12,22)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (-5,17)$$

$$(a_2, b_2) = (r_2, s_2)T^{-1} = (8,16)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (-4,12)$$

$$d_R = |-5-(-4)| + |17-12| = 1+5 = 6$$

فصل دوم

مسائل مکان‌یابی تک تسهیلاتی (SFLP)

2-1- مقدمه: مسائل جایابی تک تسهیلاتی[1] (SFLP)

در این فصل، مسأله تعیین مکان یک وسیله جدید نسبت به یک تعداد وسیله موجود، مورد بررسی قرار می‌گیرد. مکانی که به دنبال آن هستیم، جایی است که یک تابع هزینه کل تعریف شده را حداقل می‌کند و هزینه کل مذکور متناسب با فاصله در نظر گرفته می‌شود.

به طور عمده، طی این فصل، علاوه بر معرفی مسأله جایابی تک وسیله‌ای، فواصل متعامد، اقلیدسی و مربع اقلیدسی، مدلهای مربوط به آنها معرفی شده و روش‌های مختلف حل مسأله مذکور، ارائه می‌گردد. همچنین مفهوم منحنی همتراز و کاربرد آن در حل مسائل به همراه مفهوم هندسی مسأله مورد بحث قرار می‌گیرد.

فرضیات موجود:

جایابی به صورت تکی می‌باشد.

فضا پیوسته است یعنی وسیله جدید هر جایی می‌تواند قرار بگیرد.

پارامترها قطعی می‌باشند.

تابع هدف به صورت حداقل مجموع (Minisum) می‌باشد.

یک سری وسائل از قبل موجود است.

پارامترهای موجود:

M= تعداد وسایل موجود

$P_i(a_i, b_i) =$ مختصات وسیله موجود iام $\qquad i = 1, 2, \dots, m$

[1] -Single Fancility Location Problem

$X(x,y) =$ مختصات وسیله جدید

$d(X,P_i) =$ مسافت بین وسیله جدید و موجود iام

$w_i =$ هزینه حمل و نقل به ازای واحد مسافت بین وسیله جدید و موجود iام

$f(x,y) =$ کل هزینه حمل و نقل

هزینه کل حمل ونقل بین وسیله جدید و همه تسهیلات موجود به وسیله فرمول زیر بیان می‌شود:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} w_i d(X, p_i) \tag{1-2}$$

2-2-مسائل مکان‌یابی میانه تک وسیله‌ای، مسافت به صورت متعامد

مسأله جایابی با فاصله متعامد به صورت ریاضی می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\underset{x,y}{Min}\ f(x,y) = \sum_{i=1}^{m} w_i \left(|x-a_i| + |y-b_i|\right) \tag{2-2}$$

با استفاده از رابطه فوق مسأله می‌تواند به صورت زیر نیز بیان می‌گردد:

$$\underset{x,y}{Min}\ f(x,y) = \underset{x}{Min} \sum_{i=1}^{m} w_i |x-a_i| + \underset{y}{Min} \sum_{i=1}^{m} w_i |y-b_i| \tag{3-2}$$

هر کدام از مقادیر سمت راست را می‌توان به صورت مسائل بهینه‌سازی مجزا مورد بررسی قرار گیرد:

$$\underset{x}{Min} \sum_{i=1}^{m} f_1(x) = \sum_{i=1}^{m} w_i |x-a_i| \tag{4-2}$$

$$\underset{y}{Min} \sum_{i=1}^{m} f_2(y) = \sum_{i=1}^{m} w_i |y-b_i| \tag{5-2}$$

برخی از خاصیت‌های یک حل بهینه برای مسأله جایابی با فاصله متعامد به صورت زیر هستند:

خاصیت اول) خاصیت انطباق: مختصه x وسیله جدید با مختصه x برخی از تسهیلات موجود یکسان خواهد بود و به طور مشابه، مختصه y وسیله جدید بر مختصه y برخی از تسهیلات موجود منطبق خواهد شد. البته لزومی ندارد که هر دو مختصه مشابه یک وسیله موجود باشند.

خاصیت دوم) خاصیت میانی: مکان بهینه مختصه x (مختصه y) برای وسیله جدید یک مکان میانه[1] است. یک مکان میانه است اگر بیش‌تر از نیمی از گردش مواد در سمت چپ (زیر) آن و بیش‌تر از نیمی از گردش موارد در سمت راست (بالای) آن باشد.

نکته) خاصیت میانه، برای مسائل جایابی با فاصله پله‌ای برای نقطه بهینه شرط لازم و کافی می‌باشد.

[1] -Medion Location

روشهای حل بهینه مسائل جایابی تکی برای مسافت پله‌ای:

2-2-1- روش میانه (Median Method)

2-2-2-روش میانه وزنی (تجمع اوزان) (Cumulative weight Method)

2-2-3- روش برنامه‌ریزی خطی (Linear programming Method)

2-2-4- روش ترسیمی (Graphic Method)

2-2-5- روش خطوط تراز (کانتور / هم ارزش) (Contour Line Method)

2-2-1- روش میانه:

قدم اول) ابتدا اگر اوزان به صورت درصد حمل باشند باید به تواتر حمل تبدیل گردد یعنی اگر فرض شود w_3, w_2, w_1 به ترتیب برابر $\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ باشد برای تبدیل به تواتر حمل باید هر سه در عدد 6 ضرب شود پس تواتر حمل به ترتیب برابر 2 و 3 و 1 می‌شود.

قدم دوم) مختصات طول و عرض نقاط موجود را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم.

قدم سوم) هر وسیله به تعداد وزن‌هایش تکرار می‌کنیم.

قدم چهارم) میانه اعداد فوق را به عنوان جواب بهینه مشخص می‌کنیم.

مثال) فرض کنید مختصات سه وسیله موجود به صورت $P_1\begin{vmatrix}2\\3\end{vmatrix}$ و $P_2\begin{vmatrix}0\\4\end{vmatrix}$ و $P_3\begin{vmatrix}3\\6\end{vmatrix}$ باشند و وزن هر یک از این سه وسیله موجود به ترتیب برابر 3 و 4 و 3 باشند، مطلوبست مختصات نقطه بهینه وسیله جدید به روش میانه:

ابتدا xها را به ترتیب صعودی و به تعداد وزن‌هایشان مرتب می‌کنیم:

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \;\Rightarrow x^* = [2,2] = 2$$

چون تعداد اعداد زوج است دو عدد وسطی میانه اعداد می‌باشند.

حال برای yها به طور مشابه عمل می‌کنیم:

$$3 \quad 3 \quad 3 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \;\Rightarrow y^* = [4,4] = 4$$

توجه شود که ممکن است مختصات بهینه، نقطه یا خط یا سطح باشند.

نکته) در صورتی که تعداد اعداد مرتب شده، عددی فرد باشد، میانه این اعداد یک عدد منحصر به فرد است و اگر تعداد اعداد مرتب شده، عددی زوج باشد، میانه به صورت اعداد میانی می‌باشد که به صورت یک بازه نشان داده می‌شود.

نکته) نام دیگرمکان میانه، مکان نیم مجموع[1] می‌باشد.

---
[1] -half sum location

2-2-2- روش میانه وزنی (تجمع اوزان)

وزن تجمعی $(\sum W_i)$	وزن W_i	مختصه‌ها

قدم اول) مختصات طول(عرض) وسائل موجود را به صورت صعودی در ستونی مرتب می‌کنیم.

قدم دوم) w_i متناظر با هر وسیله را در ستون مجاورش می‌نویسیم.

قدم سوم) w_i مرحله به مرحله به صورت تجمعی را در ستونی در کنار ستون اوزان می‌نویسیم.

قدم چهارم) عدد نهایی ستون تجمع اوزان را بر دو تقسیم نموده کل مقدار خارج قسمت را در ستون تجمع اوزان پیدا می‌کنیم در این جا 2 حالت ممکن است پیش آید اگر مقدار خارج قسمت در بین دو ستون تجمع اوزان قرار گرفت مختصات عدد بعدی جواب بهینه خواهد بود و اگر مقدار خارج قسمت دقیقاً منطبق بر یکی از اعداد ستون تجمع اوزان باشد که در آن صورت مختصات وسیله فعلی و بعدی (بازه) جواب بهینه مسأله خواهد بود.

تست) فرض کنید 3 ماشین در یک کارگاه مستقر شده‌اند و قرار است ماشین جدیدی در این کارگاه مستقر شود اگر حرکت بارها در طول راهروهای عمود بر هم انجام شود با توجه به تابع هزینه زیر مکان بهینه برای استقرار ماشین جدید کدام گزینه می‌باشد.

$$f(x,y)=3|x-3|+4|x-0|+|x-2|+3|y-3|+4|y-1|+|y-3|$$

1) $x=[0,3],\ y=3$ 2) $x=[1,2],\ y=[1,3]$

3) $x=[0,2],\ y=1$ 4) $x=[0,2],\ y=[1,3]$

حل)

x	w_i	$\sum w_i$
0	4	4
2	1	5
3	3	8 $\rightarrow 8\div 2=4$

$\Rightarrow x=[0,2]$

y	w_i	$\sum w_i$
1	4	4
3	3	7
3	1	8

$\rightarrow 8\div 2=4$

$\Rightarrow y=[1,3]$

گزینه 4 صحیح است.

3-2-2- روش برنامه‌ریزی خطی

تابع هدف مسئله SFLP با فاصله متعامد به صورت زیر است که با توجه به وجود قدرمطلق یک برنامه‌ریزی خطی محسوب نمی‌شود.

$$\underset{x,y}{Min}\ f(x,y)=\sum_{i=1}^{m} w_i(|x-a_i|+|y-b_i|) \qquad (6\text{-}2)$$

برای اینکه بخواهیم عبارت غیرخطی $|x-a_i|$ را خطی کنیم باید 4 شرط زیر هم زمان برقرار باشد.

$$|x-a_i|=p_i+q_i \rightarrow \begin{cases} x-a_i=p_i-q_i \\ p_iq_i=0 \\ p_i\geq 0 \quad q_i\geq 0 \end{cases}$$

با توجه به مطالب فوق، تابع هدف مسأله SFLP با فاصله متعامد در راستای طول را می‌توان به صورت زیر به یک تابع هدف خطی تبدیل کرد:

$$\begin{aligned} &Min\ \ f(x)=\sum_{i=1}^{m} w_i(p_i+q_i) \\ &St: x-p_i+q_i=a_i \\ &p_iq_i=0 \\ &p_i,q_i\geq 0 \\ &\text{آزاد درعلامت } x \end{aligned} \qquad (7\text{-}2)$$

در مدل بالا محدودیت دوم یعنی $p_iq_i=0$ یک محدودیت زائد است و می‌توان آن را حذف کرد زیرا ستون‌های متناظر با q_i, p_i وابسته خطی هستند. پس داریم:

$$\begin{aligned} &\min\ f(x)=\sum_{i=1}^{m} w_{im}(p_i+q_i) \\ &St: x-p_i+q_i=a_i \\ &p_i,q_i\geq 0 \\ &\text{آزاد در علامت } x \end{aligned} \qquad (8\text{-}2)$$

نکته) اگر m تعداد وسایل موجود باشد تعداد محدودیت‌ها در راستای محور xها (yها) برابر m و تعداد متغیرها در راستای محور xها (yها) برابر $2m+1$ می‌باشد. پس در کل داریم:

تعداد محدودیت‌ها در کل $=2m$

تعداد متغیرها در کل $=4m+2$

نکته) برای مدل خطی مسأله SFLP با فاصله متعامد در راستای محور x می‌توان مدل دوگان را به این صورت نوشت:

$$Max\ f(z)=\sum_{j=1}^{m} z_i a_j$$
$$st: \sum z_j = 0$$
$$|z_j| \le w_j \qquad j=1,2,\dots,m$$
z_j آزاد در علامت

در واقع محدودیت دوم از دو محدودیت $z_j \le w_j$ و $-z_j \le w_j$ ناشی می‌شود.

2-2-4- روش ترسیمی

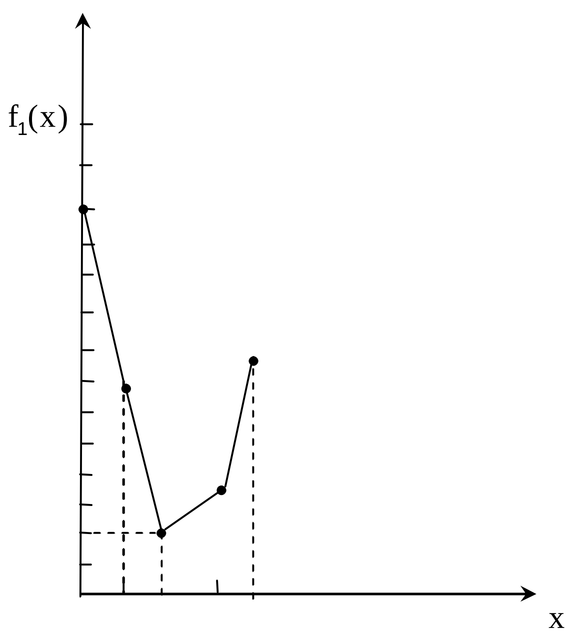
در این روش ابتدا نمودار مربوطه را رسم می‌کنیم و جائیکه شیب نمودار از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد نقطه بهینه با کمترین هزینه است. در واقع تابع هزینه را به دو تابع $f_2(y), f_1(x)$ تبدیل می‌کنیم و هر کدام را در نمودار مجزا رسم می‌کنیم. برای هر تابع، نقطه ای را روی محور افقی پیدا می‌کنیم که دارای کمترین مقدار روی محور عمودی باشد، این نقطه همان نقطه بهینه می‌باشد.

مثال) با توجه به تابع هزینه زیر و با استفاده از روش ترسیمی، نقطه بهینه را بدست آورید.

$$f(x,y)=3|x-2|+2|x-3|+3|y-2|+2|y-1|$$

حل)

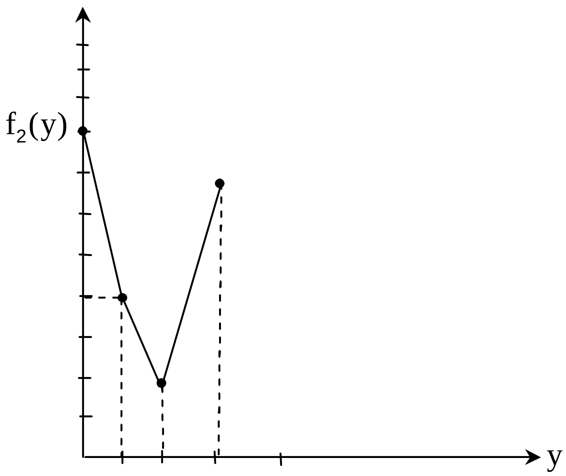
$$f_1(x)=3|x-2|+2|x-3|$$
$$f_2(y)=3|y-2|+2|y-1|$$



$x^*=2, f(x^*)=2$

x	۰	1	2	3
$f_1(x)$	12	7	2	8

y	۰	1	2	3
$f_1(y)$	8	3	2	7



$$y^* = 2, f(y^*) = 2$$

تعریف خط تراز : یک خط تراز، خطی است که دارای هزینه ثابتی در تمام نقاط متعلق به آن خط است لذا استقرار وسیله جدید در هر نقطه این خط هزینه کل یکسانی را نتیجه می‌دهد.

نکته) در مواقعی که نقطه بهینه قابل استقرار نباشد از این روش استفاده می‌کنیم.

موارد کاربرد خطوط تراز:

ـ بدست آوردن نقطه بهینه برای وسیله جدید

ـ در مواقعی که نقطه بهینه قابل استقرار واقعی نباشد بهترین جایگزین برای نقطه بهینه را مشخص می‌کند.

ـ بیان می‌دارد در صورت انتخاب محل‌های غیر بهینه چه میزان جریمه باید پرداخت کرد.

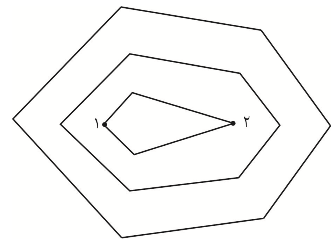
ـ منحنی هم تراز ایده خوبی به طراح کارخانه می‌دهد تا نقاط هم ارزش را بیابد.

نکته) هزینه خطوط تراز از هزینه نقطه بهینه بیشتر می‌باشد و هنگامی که از نقطه بهینه مورد نظر فاصله بگیریم یعنی شعاع منحنی تراز افزایش یابد، هزینه خط تراز (کانتور) افزایش می‌یابد.

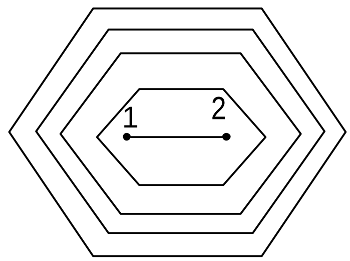
نکته) شکل خطوط تراز با فاصله متعامد (راهروهای عمود بر هم) به صورت چند ضلعی می‌باشند. در ضمن این چند ضلعی ها می‌توانند منتظم و یا غیر منتظم باشند.

نکته) خطوط تراز به صورت منحنی‌های بسته‌ای شکل هستند در واقع بدین معنی است که این خطوط را از هر نقطه ای شروع کنیم به همان نقطه باز می‌گردیم.

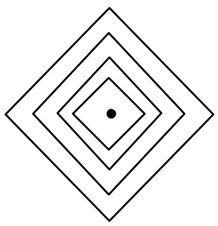
نکته) شکل خطوط تراز مسأله جایابی تک تسهیلاتی با فاصله متعامد (هامیلتون) بر حسب تعداد و وزن تسهیلات به سه صورت زیر قابل نمایش است:



دو وسیله موجود با $w_1 > w_2$ خطوط تراز به صورت یک چند ضلعی نامتقارن



دو وسیله موجود با $w_1 = w_2$ خطوط تراز به صورت یک چند ضلعی متقارن



یک وسیله موجود خطوط تراز به صورت لوزی

نکته) هیچ دلیلی وجود ندارد که خطوط تراز با یکدیگر موازی باشند اما می‌توان گفت خطوط تراز هیچ‌گاه همدیگر را قطع نمی‌کنند.

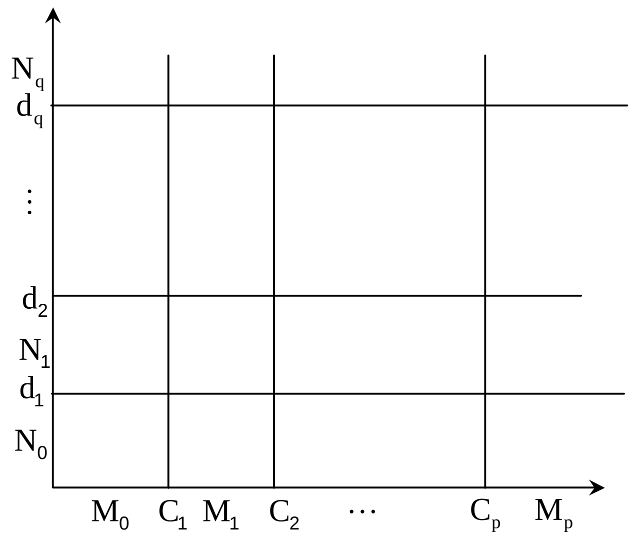
طریقه رسم خطوط تراز

قدم اول) مختصات وسایل موجود را روی دستگاه مختصات نشان می‌دهیم.

قدم دوم) از هر یک از وسایل موجود خطوط افقی و عمودی به موازات محورهای مختصات رسم می‌کنیم.
خطوط عمودی را از چپ به راست $j = 1, 2, \ldots, p$ نام‌گذاری می‌کنیم و خطوط افقی را از پائین به بالا $i = 1, 2, \ldots, q$ نامگذاری می‌کنیم.

قدم سوم) محل تلاقی خطوط عمودی با محور مختصات را با C_j و محل تلاقی خطوط افقی محور مختصات را با d_i نشان می‌دهیم. مقادیر w_i روی خطوط عمودی را با یکدیگر جمع کرده و مقادیر C_j بدست می‌آید و مقادیر w_i روی خطوط افقی را با یکدیگر جمع کرده و مقدار d_i بدست می‌آید.

قدم چهارم) مقادیر زیر را محاسبه کنید.



$$M_0 = -\sum_{i=1}^{m} w_i$$
$$M_1 = M_0 + 2c_1$$
$$M_2 = M_1 + 2c_2$$
$$\vdots$$
$$M_p = M_{p-1} + 2C_p = \sum_{i=1}^{m} w_i$$

$$N_0 = -\sum_{i=1}^{m} w_i$$
$$N_1 = N_0 + 2d_1$$
$$N_2 = N_1 + 2d_2$$
$$\vdots$$
$$N_q = N_{q-1} + 2d_p = \sum_{i=1}^{m} w_i$$

قدم پنجم) شیب هر سلول j,i به صورت زیر بدست می‌آید:

$$S_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{M_j}{N_i} & N_i \neq 0 \\ \text{عمود بر محور xها} & N_i = 0 \end{cases}$$

قدم ششم) برای بدست آوردن جواب بهینه یکی از 4 حالت زیر رخ می‌دهد.

حالت اول
$$\begin{cases} M_{p-1} < 0 \quad M_p > 0 \quad x^* = C_p \\ N_{q-1} < 0 \quad N_q > 0 \quad y^* = d_q \end{cases}$$

حالت دوم
$$\begin{cases} M_{p-1} < 0 \quad M_p = 0 \quad C_p \le x^* \le C_{p+1} \\ N_{q-1} < 0 \quad N_q > 0 \quad y^* = d_q \end{cases}$$

حالت سوم $\begin{cases} M_{p-1}<0 & M_p=0 & C_p \le x^* \le C_{p+1} \\ N_{q-1}<0 & N_q=0 & d_q \le y^* \le d_{q+1} \end{cases}$

حالت چهارم $\begin{cases} M_{p-1}<0 & M_p>0 & x^*=C_p \\ N_{q-1}<0 & N_q=0 & d_q \le y^* \le d_{q+1} \end{cases}$

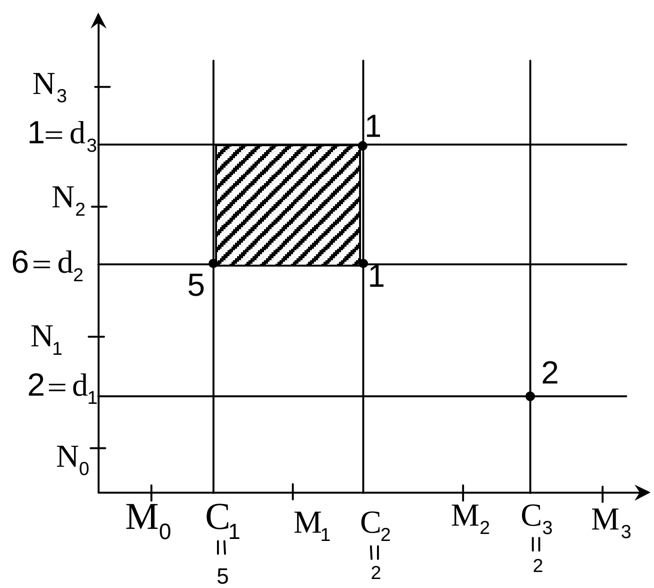
مثال) قرار است در کارگاهی یک ماشین جدید بین 4 ماشین موجود قرار گیرد. مسیرهای حمل و نقل عمود بر هم می‌باشند سایر اطلاعات در جدول زیر آمده است.

الف) شیب خط هم تراز که از ناحیه $y=[4,6],\ x=[2,4]$ میگذرد چقدر است.

ب) نقطه بهینه را بدست آورید.

ماشین موجود	1	2	3	4
حجم حمل و نقل	5	1	1	2
x	2	4	4	6
y	4	4	6	2

حل) الف



$$M_0=-\sum_{i=1}^{4} w_i=-9$$
$$M_1=M_0+2c_1=-9+2*5=1$$
$$M_2=M_1+2c_2=5$$
$$M_3=M_2+2c_3=9$$

$$N_0=-\sum_{i=1}^{4} w_i=-9$$
$$N_1=N_0+2d_1=-5$$
$$N_2=N_1+2d_2=7$$
$$N_3=N_2+2d_3=9$$

$$S_{21}=-\frac{M_1}{N_2}=-\frac{1}{7}$$

نکته) فضای ما بین $[j,j+1],[i,i+1]$ را فضای j,i می‌نامند.

حل ب)

$$M_0 < 0 , M_1 > 0 \Rightarrow x^* = c_1 = 5$$
$$N_1 < 0 \ , N_2 > 0 \Rightarrow y^* = d_2 = 6$$

2-3-مسائل مکان‌یابی میانه تک وسیله‌ای، مسافت به صورت مربع اقلیدسی

مسأله جایابی تک تسهیلی با در نظر گرفتن مجذور فاصله اقلیدسی به مسأله مرکز ثقل معروف است.

تابع هدف مسأله SFLP با فاصله مجذور اقلیدسی به صورت زیر است:

$$Min\ f(x,y) = \sum_{i=1}^{m} w_i \left[(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2 \right] \qquad (10\text{-}2)$$

روشهای حل مسأله مرکز ثقل:

2-3-1- روش مشتق‌گیری از تابع هدف

2-3-2- روش منحنی تراز

2-3-1- روش مشتق‌گیری از تابع هدف

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \to 2\sum_{i=1}^{m} w_i (x-a_i) = 0 \to x^* = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i a_i}{\sum_{i=1}^{m} w_i} \qquad (11\text{-}2)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \to 2\sum_{i=1}^{m} w_i (y-b_i) = 0 \to y^* = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i b_i}{\sum_{i=1}^{m} w_i} \qquad (12\text{-}2)$$

مختصه‌های (x^*, y^*) وسیله جدید می‌تواند به صورت میانگین وزن‌دهی شده مختصه‌های y,x و تسهیلات موجود تغییر شوند و مختصه‌هایی هستند که $f(x,y)$ را مینیمم می‌کنند. دو شرط فوق می‌توانند هم شرط لازم و هم شرط کافی برای یک مینیمم باشند.

نکته) در مسائل SFLP با مجذور فاصله مستقیم اگر نقطه بهینه در دسترس باشد جواب بهینه یک نقطه خواهد بود.

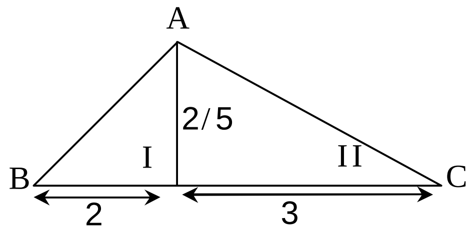
تست) سه وسیله بر سه رأس مثلث مقابل قرار دارند. قرار است وسیله جدیدی در میان این وسایل قرار گیرد. در صورتی که میزان حمل بین وسیله جدید با وسایل موجود C, B, A به ترتیب برابر $2w, w, 3w$ باشد و هزینه‌های حمل و نقل تابعی از مجذور فاصله مستقیم باشد محل بهینه وسیله جدید درکدام محل است؟

1) در ناحیه I

2)در ناحیه II

3) روی ارتفاع مثلث

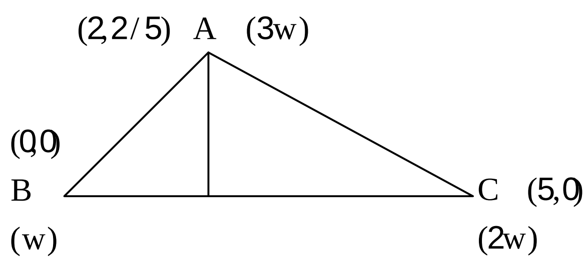
4) روی محل تلاقی ارتفاع با قاعده مثلث



حل) B را به عنوان مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم و داریم:

$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^{3} w_i a_i}{\sum_{i=1}^{3} w_i} = \frac{3w\times 2 + w\times 0 + 2w\times 5}{3w + w + 2w} = \frac{16w}{6w} = \frac{8}{3}$$

$$y^* = \frac{\sum_{i=1}^{3} w_i b_i}{\sum_{i=1}^{3} w_i} = \frac{3w\times 2/5 + w\times 0 + w\times 0}{3w + w + 2w} = \frac{7/5w}{6w} = \frac{7/5}{6}$$



این مختصه با توجه به اینکه B مبدأ مختصات است در ناحیه II واقع می‌شود پس گزینه (2) درست است.

نکته) اگر w_i ها یکسان باشند، محل بهینه وسیله جدید میانگین حسابی وسائل موجود می‌باشد.

اثبات)

$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i a_i}{\sum_{i=1}^{m} w_i} = \frac{w\sum_{i=1}^{m} a_i}{mw} = \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i}{m}$$

$$y^* = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i b_i}{\sum_{i=1}^{m} w_i} = \frac{w\sum_{i=1}^{m} b_i}{mw} = \frac{\sum_{i=1}^{m} b_i}{m}$$

نکته) اگر نقطه بهینه در دسترس نباشد و به مختصات طولی و عرضی نقطه بهینه مقادیر (x,y) اضافه شود میزان افزایش در تابع هزینه به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$\Delta f = (x^2 + y^2)\sum_{i=1}^{m} w_i$$

2-3-2- روش منحنی تراز

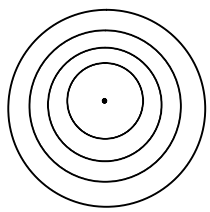
معادله منحنی تراز به صورت زیر می‌باشد:

$$(x-x^*)^2 + (y-y^*)^2 = R^2 \qquad (13\text{-}2)$$

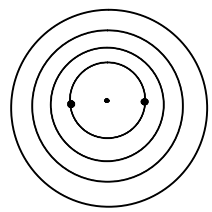
شعاع منحنی تراز متناسب با هزینه $f(x,y)$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$R = \sqrt{\frac{f(x,y)}{\sum w_i} + x^{*2} + y^{*2} - \frac{\sum w_i (a_i^2 + b_i^2)}{\sum w_i}} \qquad (14\text{-}2)$$

نکته) در روش مجذور فاصله مستقیم، منحنی‌های تراز همواره به صورت دوایر متحدالمرکزی با مرکزیت نقطه بهینه مسأله جایابی می‌باشد.



یک وسیله موجود



دو وسیله موجود

مثال) در یک کارگاه چهار ماشین که مختصات مکانی آنها به صورت زیر است مستقر شده است.

$P_1(8,4) \qquad P_2(5,2) \qquad P_3(4,8) \qquad P_4(3,2)$

می‌خواهیم ماشین جدیدی بین آنها استقرار دهیم ارتباط بین ماشین جدید با ماشین‌های موجود یکسان است با استفاده از فاصله به صورت مربع اقلیدسی الف) مشخص کنید در چه شعاعی از نقطه بهینه هزینه استقرار برابر 54 واحد خواهد بود ب) معادله منحنی تراز مربوطه به چه صورت می‌باشد (فرض $w_i = 1$)

حل)

$$x^* = \frac{8+5+4+3}{4} = 5 \qquad y^* = \frac{4+2+8+2}{4} = 4$$

$$R = \sqrt{\frac{54}{4} + 5^2 + 4^2 - \frac{1\times(64+16) + 1\times(25+4) + 1\times(16+64) + 1\times(9+4)}{4}}$$

$$R = 2$$

معادله منحنی تراز $\rightarrow (x-5)^2 + (y-4)^2 = 2^2 = 4$

2-4- مسائل جایابی تک تسهیلاتی در حالت فاصله اقلیدسی

مسأله با فاصله اقلیدسی به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\underset{x,y}{Min}\ f(x,y)=\sum_{i=1}^{m} w_i\left[(x-a_i)^2+(y-b_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (15\text{-}2)$$

نکته) به مسأله SFLP در حالت فاصله اقلیدسی، مسأله اشتاینر ـ وبر (weber steiner) و یا مسأله عمومی فرمات (Fermat) گفته می‌شود.

روشهای حل بهینه مسائل جایابی تکی برای مسافت به صورت اقلیدسی

3-1- روش مشتق‌گیری از تابع هدف

3-2- روش منحنی تراز

3-3- روش حل قیاسی[1] (روش آنالوگ)

3-4- روش ترسیمی

3-1- روش مشتق‌گیری از تابع هدف

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0 \rightarrow \frac{\sum w_i(x-a_i)}{\left[(x-a_i)^2+(y-b_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}}=0 \qquad (16\text{-}2)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0 \rightarrow \frac{\sum w_i(y-b_i)}{\left[(y-a_i)^2+(y-b_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}}=0 \qquad (17\text{-}2)$$

در مشتق‌های جزئی بالا این مشکل وجود دارد که اگر وسیله جدید روی وسایل موجود قرار گیرد تابع مشتق‌ناپذیر و در نتیجه پیوسته نمی‌باشد برای رفع این مشکل دو روش زیر وجود دارد:

3-1-1- روش حل کوهن

3-1-2- روش تقریب هذلولی[2] (HAP)

3-1-1- روش حل کوهن

اصلاحیه منسوب به کوهن بر مبنای $R(x,y)$ دو سویه است و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$R(x,y)=\begin{cases} \left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x},\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) & if\ \ X\neq P_i \ \ (\text{عدم انطباق}) \\[2ex] \begin{cases} \left(\dfrac{u_k-w_k}{u_k}S_k,\dfrac{u_k-w_k}{u_k}t_k\right) & u_k>w_k \\ (0,0) & u_k\leq w_k \end{cases} & if\ \ X=P_i \ \ (\text{انطباق}) \end{cases}$$

---

[1] -Analog Solution

[2] -Hyperboloid Approximation Procedure

$R(x,y)$ برای همه نقاط در صفحه تعریف می‌شوند، $kuhn$ اثبات کرد که یک شرط لازم و کافی برای اینکه (x^*,y^*) یک مکان با کمترین هزینه وسیله جدید باشد این است که $R(x^*,y^*)=0$

$$S_k=\sum_{i=1}^{m}\frac{w_i(a_k-a_i)}{\left[(a_i-a_k)^2+(b_i-b_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$t_k=\sum_{i=1}^{m}\frac{w_i(b_k-b_i)}{\left[(a_i-a_k)^2+(b_i-b_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$u_k=(s_k^2+t_k^2)^{\frac{1}{2}}$$

نکته) مکان برخی از تسهیلات موجود (a_k,b_k)، محل بهینه وسیله جدید خواهد بود اگر و تنها اگر $u_k\le w_k$ باشد.

نکته) روش حل کوهن شرط لازم و کافی برای جواب بهینه ارائه می‌کند و روشی برای بدست آوردن (x^*,y^*) به ما نمی‌دهد.

اگرچه ما شرایط لازم و کافی را برای یک حل بهینه مسأله فاصله اقلیدسی داریم، ولی هنوز روشی برای تعیین (x^*,y^*) ارائه نکرده‌ایم. $R(x,y)$ دو سویه که به عنوان مرکز ثقل اصلاح شده کوهن شناخته می‌شود را دستکاری کرده تا مبنای برای یک رویه محاسباتی جهت پیدا کردن مکانی (x^*,y^*) ایجاد کند.

اگر رابطه 2-16 را مساوی صفر قرار دهیم عبارت زیر بدست می‌آید:

$$x\sum_{i=1}^{m}\frac{w_i}{\left[(x-a_i)^2+(y-b_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}}=\sum_{i=1}^{m}\frac{w_ia_i}{\left[(x-a_i)^2+(y-b_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\qquad(18-2)$$

و اگر

$$g_i(x,y)=\frac{w_i}{\left[(x-a_i)^2+(y-b_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\qquad i=1,2,\dots,m$$

آنگاه رابطه (2-18) می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$x=\frac{\sum_{i=1}^{m}a_ig_i(x,y)}{\sum_{i=1}^{m}g_i(x,y)}$$

به همین ترتیب با استفاده از رابطه (2-17) داریم:

$$y=\frac{\sum_{i=1}^{m} b_i g_i(x,y)}{\sum_{i=1}^{m} g_i(x,y)}$$

قدم‌های رویه حل تکرار شونده:

قدم اول) یک جواب اولیه به صورت $x^{(0)}, y^{(0)}$ برای شروع حل مسئله پیدا می‌کنیم. معمولاً، حل مرکز ثقل به عنوان مقدار شروع کننده برای رویه تکرار شونده استفاده می‌شود.

قدوم دوم) با توجه به x,y اولیه x,y جدید را از روابط بدست آمده یافته و سپس x,y جدیدتر را با توجه به مقادیر بدست آمده محاسبه می‌کنیم.

$$x^{k+1}=\frac{\sum a_i g_i(x^{(k)},y^{(k)})}{\sum g_i(x^{(k)},y^{(k)})} \qquad (19\text{-}2)$$

$$y^{k+1}=\frac{\sum b_i g_i(x^{(k)},y^{(k)})}{\sum g_i(x^{(k)},y^{(k)})} \qquad (20\text{-}2)$$

قدم سوم) رویه تکرار شونده فوق ادامه پیدا می‌کند تا دیگر بهبودی در تابع هزینه ایجاد نشود و یا تا زمانی ادامه پیدا می‌کند. که مکانی پیدا شود که شرط مرکز ثقل اصلاح شده kuhn را ارضا کند.

نکته) رویه حل تکرار شونده تضمین می‌کند که جواب مسأله به یک جواب بهینه همگرا می‌شود.

نکته) می‌توان از روش حل کوهن بهینه بودن جواب بدست آمده را مورد بررسی قرار داد.

2-4-1-2- روش تقریب هذلولی (HAP)

یک رویه حل تکرار شونده دیگر نیز برای حل مسأله با فاصله اقلیدسی بدون به کار بردن رویه مرکز ثقل اصلاح شده کوهن می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. این رویه با آنچه که توسط رابطه (2-19) و (2-20) ارائه داده شده یکسان است به جز اینکه $g_i(x,g)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$g_i(x,y)=\frac{w_i}{\left[(x-a_i)^2+(y-b_i)^2+\xi\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad i=1,2,\ldots,m \qquad (21\text{-}2)$$

جاییکه ξ یک عدد ثابت اختیاری کوچک و مثبت است.

نکته) HAP می‌تواند برای حل مسائل با فاصله متعامد نیز استفاده شود زیرا یک مسأله جایابی با فاصله متعامد را می‌توان به صورت مجموع دو مسأله با فاصله اقلیدسی $f(0,y), f(x,0)$ بیان شود.

نکته) مقدار ξ هر چه قدر کوچک‌تر باشد دقت بیشتر اما رویه حل مسأله زمان برخواهد بود. به خاطر همین ابتدا از یک مقدار ξ بزرگ برای حل مسأله استفاده می‌شود و فرایند کاهشی ادامه می‌یابد تا میزان خطای محاسبه شده قابل چشم‌پوشی باشد.