

## ریاضیات مهندسی

مجموعه مهندسی برق، مکانیک، هوافضا، مواد،  
مهندسی پزشکی و شیمی، معماری کشتی سازی،  
داروسازی، نانو مواد و مجموعه دکتری مکانیک و  
هوافضا

مؤلف:

حمید رادمش

عضو هیئت علمی دانشگاه

آمادگی آزمون دکتری

رادمنش، حمید  
ریاضیات مهندسی رشته / حمید رادمنش  
مشاوران صعود ماهان: ۱۴۰۰  
۵۰۹ ص: جدول، نمودار (آمادگی آزمون دکتری مجموعه مهندسی)  
ISBN: 978-600-458-676 -4

فهرست نویسی بر اساس اطلاعات فیبا.

فارسی - چاپ اول

ریاضیات مهندسی

حمید رادمنش

ج - عنوان

رده بندی کنگره:

رده بندی دیویی

کتابخانه ملی ایران

۱۳۹۳ ر ۹ / ۲۱۴ ر / ۲۳۵۳ LB

۳۷۸/۱۶۶۴

۳۴۶۸۴۱۱



انتشارات مشاوران صعود ماهان



- نام کتاب: ریاضیات مهندسی
- مدیران مسئول: هادی و مجید سیاری
- مولف: حمید رادمنش
- برنامهریزی تولید و محتوا: سمیه بیگی
- ناشر: مشاوران صعود ماهان
- نوبت و تاریخ چاپ: اول / ۱۴۰۰
- تیراژ: ۱۰۰۰ نسخه
- قیمت: ۱/۶۶۰/۰۰۰ ریال
- شابک: ISBN ۹۷۸-۶۰۰-۴۵۸-۶۷۶-۴

انتشارات مشاوران صعود ماهان: تهران - خیابان ولیعصر، بالاتر از تقاطع ولیعصر مطهری، پلاک ۲۰۵۰

تلفن: ۸۸۱۰۰۱۱۳ و ۸۸۴۰۱۳۱۳

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به موسسه آموزش عالی آزاد ماهان می باشد. و هرگونه اقتباس و کپی برداری از این اثر بدون اخذ مجوز پیگرد قانونی دارد.

## بنام خدا

ایمان داریم که هر تغییر و تحول بزرگی در مسیر زندگی بدون تحول معرفت و نگرش میسر نخواهد بود. پس بیایید با اندیشه توکل، تفکر، تلاش و تحمل در توسعه دنیای فکریمان برای نیل به آرامش و آسایش توأمان اولین گام را برداریم. چون همگی یقین داریم دانایی، توانایی می آورد.

**شاد باشید و دلی را شاد کنید**

*برادران سیاری*

---

## سخن مولف

---

خدا را شکر می‌کنم که توانستم مسئولیتی را که بر عهده‌ام نهاده شده بود به سرانجام برسانم. تلاش چندین ساله‌ام و حاصل تدریس ریاضیات مهندسی به دانشجویان، در کتاب حاضر به ثمر نشست است. امیدوارم که نتیجه این زحمات برای دانشجویان مقطع کارشناسی رشته‌های مهندسی برق، مکانیک، هوافضا، مواد، نفت، شیمی و مهندسی پزشکی، سایر دانشجویان علاقمند و همچنین داوطلبان آزمون کارشناسی ارشد و دکتری تخصصی مفید باشد.

شیوه نگارش و جمع‌آوری موضوعات کتاب به نحوی است که با تاکید بر یادگیری مفاهیم، داوطلبان را از مراجعه به منابع دیگر بی‌نیاز می‌کند. کتاب حاضر حاوی بیش از ۱۵۰۰ تست کنکور آزمون‌های سراسری و دانشگاه آزاد کارشناسی ارشد رشته‌های مختلف مهندسی در سال‌های اخیر است و می‌تواند مرجع خوبی برای تدریس در دوره کارشناسی باشد. در تالیف و گردآوری مطالب این کتاب از منابع مختلفی استفاده شده است تا بهترین موضوعات ارائه شوند.

هر چند سعی شده است تا نگارش این کتاب با دقت کافی انجام شود، اما به دلیل حجم زیاد مطالب ممکن است اشکالاتی وجود داشته باشد، لذا از تمام دانشجویان گرامی صمیمانه تقاضا داریم با ارائه نظرات خود ما را در ارتقای کیفی و کمی این کتاب در چاپ‌های بعدی یاری کنند.

خداوندا به ما توفیق تلاش در شکست، صبر در نومییدی، رفتن بی همراه، جهاد بی سلاح، کار بی پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی دنیا، مذهب بی عوام، عظمت بی نام، خدمت بی نان، ایمان بی ریا، خوبی بی نمود، گستاخی بی خامی، مناعت بی غرور، عشق بی هوس، تنهایی در انبوه جمعیت و دوست داشتن بی آنکه دوست بدانند، را عنایت فرما. جان ما را صفای خود ده و دل ما را هوای خود ده، و چشم ما را ضیای خود ده، و ما را از فضل و کرم خود آن ده که آن به.

حمید رادمنش

دکتری تخصصی مهندسی برق

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

Hamid.Radmanesh@aut.ac.ir

## تقدیم بابوسه بردستان پدرم:

که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی را تجربه نمایم. به او که نمی دانم از بزرگی اش بگویم یا مردانگی سخاوت، سکوت، مهربانی و .....  
پدرم راه تمام زندگی است.  
پدرم دلخوشی همیشگی است.

## تقدیم به مادر عزیزتر از جانم:

دریای بیکران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش برایم همه مهر، مادرم هستی من ز هستی توست تا هستم و هستی دارم دوست

## وبه، همسرم به صمیمیت باران:

اسطوره زندگی، پناه خستگیم و امید بودنم

## فهرست مطالب

|    |  |
|----|--|
| ۱۳ | فصل اول: اعداد و توابع مختلط .....                           |
| ۱۳ | ۱-۱ اعداد مختلط .....  |
| ۱۶ | ۲-۱ بیان منحنی در فرم پارامتری .....                         |
| ۱۷ | ۳-۱ فرم قطبی اعداد مختلط مختلط .....                         |
| ۲۷ | ۴-۱ نواحی در صفحه اعداد مختلط .....                          |
| ۲۹ | ۵-۱ نمونه تستهای حل شده اعداد مختلط .....                    |
| ۳۱ | ۱-۶ حل نمونه تستها .....                                     |
| ۳۳ | ۱-۷ تستهای اعداد مختلط .....                                 |
| ۳۵ | ۱-۷-۱ پاسخنانه تستهای اعداد مختلط .....                      |
| ۳۵ | ۸-۱ توابع مختلط .....  |
| ۳۵ | ۱-۸-۱ حد و پیوستگی در توابع مختلط .....                      |
| ۳۷ | ۲-۸-۱ مشتق تابع مختلط .....                                  |
| ۳۸ | ۱-۲-۸-۱ قضایای کوشی-ریمان .....                              |
| ۳۸ | ۲-۲-۸-۱ قضیه دوم کوشی-ریمان .....                            |
| ۴۱ | ۳-۲-۸-۱ معادلات کوشی ریمان در مختصات قطبی .....              |
| ۴۲ | ۳-۸-۱ تمرینات .....  |
| ۴۳ | ۱-۹ برخی توابع مقدماتی .....                                 |
| ۴۳ | ۱-۹-۱ تابع همانی .....                                       |
| ۴۴ | ۱۰-۱ تستهای حد و پیوستگی و مشتق اعداد مختلط .....            |
| ۴۵ | ۱-۱۰-۱ پاسخنانه تستهای حد و پیوستگی و مشتق اعداد مختلط ..... |
| ۴۵ | ۱-۱۱ توابع تحلیلی .....                                      |
| ۴۵ | ۱-۱۱-۱ تعاریف: .....   |
| ۴۶ | ۲-۱۱-۱ تابع چند جمله‌ای .....                                |
| ۴۶ | ۳-۱۱-۱ تابع نمایی $e^z$ .....                                |
| ۴۶ | ۴-۱۱-۱ توابع مثلثاتی مختلط .....                             |
| ۴۶ | ۵-۱۱-۱ توابع مثلثاتی معکوس: .....                            |
| ۴۷ | ۶-۱۱-۱ توابع هذلولی مختلط .....                              |
| ۴۷ | ۷-۱۱-۱ لگاریتم یک عدد مختلط .....                            |
| ۴۸ | ۸-۱۱-۱ مقدار اصلی لگاریتم .....                              |
| ۴۸ | ۹-۱۱-۱ اصل بازتاب .....                                      |
| ۴۸ | ۱۰-۱۱-۱ توابع همساز .....                                    |
| ۴۸ | ۱۱-۱۱-۱ مزدوج همساز .....                                    |
| ۵۳ | ۱۲-۱۱-۱ نقطه تکین .....                                      |
| ۵۵ | ۱۲-۱ تستهای توابع تحلیلی .....                               |
| ۵۶ | ۱۳-۱ پاسخ تستهای توابع تحلیلی .....                          |
| ۵۷ | ۱-۲ نگاهت‌های مختلط .....                                    |

|     |   |        |
|-----|---|--------|
| ۵۹  | .....نگاشت همدیس  | ۱-۱-۲  |
| ۵۹  | ..... $w = f(z) = z$ نگاشت همانی                          | ۲-۱-۲  |
| ۵۹  | ..... $w = f(z) = z + b$ نگاشت                            | ۳-۱-۲  |
| ۵۹  | ..... $w = az$ نگاشت                                      | ۴-۱-۲  |
| ۵۹  | ..... $w = az + b$ نگاشت خطی                              | ۵-۱-۲  |
| ۶۰  | ..... $w = z^2$ نگاشت                                     | ۶-۱-۲  |
| ۶۰  | ..... $w = z^n$ نگاشت                                     | ۷-۱-۲  |
| ۶۰  | ..... $\sqrt[n]{z}$ نگاشت                                 | ۸-۱-۲  |
| ۶۰  | ..... $w = \frac{1}{z}$ نگاشت                             | ۹-۱-۲  |
| ۶۰  | ..... $w = e^z$ نگاشت                                     | ۱۰-۱-۲ |
| ۶۱  | ..... $w = Lnz$ نگاشت                                     | ۱۱-۱-۲ |
| ۶۱  | ..... $w = \sin z$ نگاشت                                  | ۱۲-۱-۲ |
| ۶۱  | ..... $w = \cos z$ نگاشت                                  | ۱۳-۱-۲ |
| ۶۱  | ..... $w = \sinh z$ نگاشت                                 | ۱۴-۱-۲ |
| ۶۲  | ..... $w = z + \frac{1}{z}$ نگاشت                         | ۱۵-۱-۲ |
| ۶۲  | ..... $w = \frac{az + b}{cz + d}$ (نگاشت دوخطی یا موبیوس) | ۱۶-۱-۲ |
| ۶۳  | ..... تبدیل سه نقطه توسط نگاشت کسری                       | ۱۷-۱-۲ |
| ۶۳  | ..... نگاشت یک نقطه ثابت                                  | ۱۸-۱-۲ |
| ۶۳  | ..... نگاشت شوارتز کریستوفل                               | ۱۹-۱-۲ |
| ۸۶  | ..... تستهای نگاشت  | ۲-۲    |
| ۹۰  | ..... حل تستهای نگاشت                                     | ۳-۲    |
| ۹۱  | ..... ۱-۳-۲ مهندسی برق                                    |        |
| ۹۱  | ..... ۲-۳-۲ مهندسی مواد                                   |        |
| ۹۲  | ..... ۳-۳-۲ مهندسی هوا فضا                                |        |
| ۹۴  | ..... ۴-۲ تستهای نگاشت                                    |        |
| ۹۷  | ..... ۲-۴-۲ پاسخنانه تستهای نگاشت                         |        |
| ۹۹  | ..... ۳ سریها، بسط تیلور و محاسبه مانده                   |        |
| ۹۹  | ..... ۳-۱ دنباله های مختلط                                |        |
| ۹۹  | ..... ۳-۲ سریهای مختلط                                    |        |
| ۱۰۰ | ..... ۳-۳ تعریف همگرایی مطلق و مشروط                      |        |
| ۱۰۰ | ..... ۳-۴ سریهای توانی و بهدست آوردن شعاع همگرایی آنها    |        |
| ۱۰۰ | ..... ۵-۳ سریهای تابعی و بهدست آوردن ناحیه همگرایی آنها   |        |
| ۱۰۱ | ..... ۶-۳ نظریه حساب مانده ها                             |        |
| ۱۰۱ | ..... ۱-۶-۳ صفرهای توابع و مرتبه آنها                     |        |
| ۱۰۲ | ..... ۲-۶-۳ نقاط منفرد توابع و انواع آنها                 |        |
| ۱۰۳ | ..... ۱-۲-۶-۳ تعریف نقطه تکین                             |        |
| ۱۰۳ | ..... ۲-۲-۶-۳ تکین برداشتنی                               |        |

|     |       |   |
|-----|-------|---|
| ۱۰۳ | ..... | ۳-۲-۶-۳ تکین اساسی  |
| ۱۰۳ | ..... | ۴-۲-۶-۳ تحلیلی بودن یا تکین در بینهایت                                |
| ۱۰۳ | ..... | ۵-۲-۶-۳ مانده در بینهایت  |
| ۱۰۵ | ..... | ۶-۲-۶-۳ قضیه حساب مانده ها  |
| ۱۰۷ | ..... | ۳-۶-۳ انواع نقاط تکین تابع مختلط                                      |
| ۱۰۷ | ..... | ۷-۳ انواع نقاط تکین   |
| ۱۱۳ | ..... | ۱-۷-۳ نوشتن بسط لوران معتبر در نواحی مختلف                            |
| ۱۱۵ | ..... | ۲-۷-۳ سری های مختلف   |
| ۱۱۵ | ..... | ۱-۲-۷-۳ ناحیه همگرایی یک سری مختلط                                    |
| ۱۱۷ | ..... | ۳-۷-۳ بسط تیلور یک تابع مختلط   |
| ۱۱۸ | ..... | ۴-۷-۳ بسط لوران   |
| ۱۲۰ | ..... | ۳-۸-۱ تستهای حل شده   |
| ۱۲۷ | ..... | ۳-۱۱-۱ تستهای محاسبه ماندهها  |
| ۱۲۹ | ..... | ۳-۱۱-۲ پاسخ تستهای محاسبه ماندهها                                     |
| ۱۳۰ | ..... | ۴ انتگرال گیری از توابع مختلط   |
| ۱۳۰ | ..... | ۱-۴ قضیه موررا  |
| ۱۳۰ | ..... | ۲-۴ فرمول انتگرال کوشی  |
| ۱۳۱ | ..... | ۳-۴ کران بالای قدر مطلق یک انتگرال مختلط                              |
| ۱۳۲ | ..... | ۴-۴ نامساوی کوشی  |
| ۱۳۳ | ..... | ۵-۴ اصل آوند  |
| ۱۳۷ | ..... | ۲-۵-۴ تعاریف  |
| ۱۳۷ | ..... | ۳-۵-۴ قضیه انتگرال کوشی - گورسا                                       |
| ۱۳۹ | ..... | ۴-۵-۴ انتگرال گیری به روش مانده ها                                    |
| ۱۴۴ | ..... | ۵-۵-۴ محاسبه برخی از انتگرال های خاص                                  |
| ۱۵۲ | ..... | ۶-۵-۴ کاربرد انتگرال های مختلط در محاسبه انتگرال های حقیقی            |
| ۱۵۶ | ..... | ۷-۵-۴ مثال های گوناگون  |
| ۱۶۱ | ..... | ۸-۵-۴ تستهای حل شده   |
| ۱۶۱ | ..... | ۱-۸-۵-۴ مهندسی برق  |
| ۱۶۱ | ..... | ۲-۸-۵-۴ مهندسی مکانیک   |
| ۱۶۲ | ..... | ۳-۸-۵-۴ مهندسی مواد   |
| ۱۶۲ | ..... | ۴-۸-۵-۴ مهندسی هوا فضا  |
| ۱۷۶ | ..... | ۹-۵-۴ محاسبه ی برخی انتگرال های حقیقی با استفاده از انتگرال های مختلط |
| ۱۸۱ | ..... | ۶-۴ تستهای انتگرال های مختلط  |
| ۱۸۳ | ..... | ۷-۴ حل تستهای انتگرال های مختلط                                       |
| ۱۸۶ | ..... | ۱-۷-۴ تست های انتگرال مختلط   |
| ۱۸۷ | ..... | 4-7-2 پاسخنامه تستهای انتگرال مختلط                                   |
| ۱۸۹ | ..... | ۱-۵ سری فوریه   |
| ۱۹۳ | ..... | ۲-۱-۵ قضیه دیریکله و بحث همگرایی سری های فوریه                        |
| ۱۹۵ | ..... | ۳-۱-۵ سری فوریه سینوسی و کسینوسی                                      |



|     |  |
|-----|--|
| ۱۹۶ | ۴-۱-۵ مشتقگیری و انتگرالگیری از سری فوریه.....                     |
| ۱۹۸ | ۵-۱-۵ تساوی پارسوال در سری های فوریه.....                          |
| ۲۱۴ | 5-1-6 شکل سری تابع: .....  |
| ۲۱۶ | ۲-۵ سری فوریه مختلط.....   |
| ۲۱۷ | ۱-۲-۵ تستهای برق.....  |
| ۲۱۸ | ۳-۵ مسائل و تست های تکمیلی.....                                    |
| ۲۲۶ | ۵-۳-۲ شکل سری فوریه تابع: .....                                    |
| ۲۳۴ | ۵-۴ انتگرال از سری فوریه.....                                      |
| ۲۳۴ | ۱-۴-۵ مشتق گیری از سری فوریه.....                                  |
| ۲۴۲ | ۵-۵ کاربرد سری فوریه در محاسبه سریها.....                          |
| ۲۴۲ | 5-5-1 استفاده از رابطه پارسوال در مورد سری فوریه $f(x)$ .....      |
| ۲۴۴ | ۲-۵-۵ تقریب زدن با چند جمله‌ایهای مثلثاتی.....                     |
| ۲۵۱ | ۶-۵ تمرینات سری.....   |
| ۲۵۵ | ۷-۵ تمرینات متفرقه.....  |
| ۲۵۶ | ۸-۵ شرایط وجود سری فوریه یک تابع.....                              |
| ۲۵۶ | ۱-۸-۵ چند مثال برای شرایط فوق.....                                 |
| ۲۵۷ | ۲-۸-۵ بسط نیم دامنه.....   |
| ۲۵۹ | ۹-۵ شکل سری فوریه تابع.....  |
| ۲۶۵ | ۲-۹-۵ تستهای سری فوریه.....  |
| ۲۶۸ | ۱۰-۵ حل تستهای سری فوریه.....                                      |
| ۲۷۰ | ۵-۱۱ تستهای سری فوریه.....   |
| ۲۷۴ | ۵-۱۱-۱ پاسخنامه تستهای سری فوریه.....                              |
| ۲۷۵ | ۶ انتگرال فوریه.....   |
| ۲۷۵ | ۱-۶ قضیه دیریکله و بحث همگرایی انتگرالهای فوریه.....               |
| ۲۷۵ | ۲-۶ شرایط دیریکله.....   |
| ۲۷۵ | ۳-۶ رابطه پارسوال در انتگرال فوریه.....                            |
| ۲۷۹ | ۴-۶ انتگرال فوریه کسینوسی و سینوسی.....                            |
| ۲۸۰ | ۵-۶ انتگرال فوریه مختلط.....                                       |
| ۲۸۵ | ۶-۶ تمرینات انتگرال.....   |
| ۲۸۷ | ۲-۶-۶ تستهای انتگرال فوریه.....                                    |
| ۲۸۹ | ۶-۶-۳ پاسخنامه تستهای انتگرال فوریه.....                           |
| ۲۹۰ | ۷ تبدیل فوریه.....   |
| ۲۹۰ | ۱-۷ تبدیل فریه سینوسی و کسینوسی نامتناهی: .....                    |
| ۲۹۰ | ۲-۷ تبدیل فوریه کسینوسی و سینوسی متناهی.....                       |
| ۲۹۳ | ۳-۷ استفاده از تبدیل لاپلاس در حل مسائل انتگرال و تبدیل فوریه..... |
| ۲۹۴ | ۴-۷ برخی از خواص تبدیل فوریه.....                                  |
| ۲۹۷ | ۵-۷ تمرینات تبدیل فوریه.....                                       |
| ۲۹۸ | ۶-۷ تمرینات متفرقه.....  |
| ۲۹۹ | ۱-۶-۷ تستهای تبدیل فوریه.....                                      |

|     |   |
|-----|---|
| ۳۰۰ | ..... پاسخ تستهای تبدیل فوریه   |
| ۳۰۱ | ..... معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی  |
| ۳۰۲ | ..... ۸-۱-۱ فرم کانونی معادلات در حالت‌های مختلف  |
| ۳۰۳ | ..... ۸-۱-۲ به دست آوردن تغییر متغیرهای لازم برای رسیدن به فرم کانونیک                        |
| ۳۰۴ | ..... ۸-۱-۳ روش‌های تشکیل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی                                    |
| ۳۰۴ | ..... ۸-۱-۳-۱ حذف پارامتر ثابت  |
| ۳۰۵ | ..... ۸-۱-۳-۲ حذف توابع دلخواه  |
| ۳۱۰ | ..... ۴-۱-۸ معادلات مرتبه اول با ضرایب ثابت   |
| ۳۱۲ | ..... ۵-۱-۸ روشهای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی  |
| ۳۱۳ | ..... ۱-۵-۱-۸ استفاده از روشهای معادلات دیفرانسیل معمولی و انتگرالگیری                        |
| ۳۱۴ | ..... ۲-۵-۱-۸ حل معادلاتی به فرم کلی $au_x + bu_y + cu = 0$                                   |
| ۳۱۴ | ..... ۳-۵-۱-۸ حل معادلاتی به فرم کلی $Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0$                        |
| ۳۱۶ | ..... ۴-۵-۱-۸ حل معادلات خطی مرتبه اول با استفاده از دستگاه لاگرانژ                           |
| ۳۲۳ | ..... ۶-۱-۸ تستهای معادلات با مشتقات جزئی مرتبه اول   |
| ۳۲۷ | ..... ۷-۱-۸ کلید تست‌های معادله‌ی مرتبه اول   |
| ۳۲۷ | ..... ۸-۱-۸ تستهای تشکیل معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی                                    |
| ۳۲۹ | ..... ۹-۱-۸ پاسخ تستهای تشکیل معادله دیفرانسیل  |
| ۳۲۹ | ..... ۱۰-۱-۸ مسائل مقدار مرزی   |
| ۳۳۰ | ..... ۱۱-۱-۸ حل معادلات با مشتقات جزئی به روش تفکیک متغیرها                                   |
| ۳۳۲ | ..... روش سه گام در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم با استفاده از تفکیک متغیرها |
| ۳۳۶ | ..... ۱۲-۱-۸ مسائل اشتزم لیوویل   |
| ۳۳۸ | ..... ۲-۸ یادآوری از مسائل مقدار ویژه   |
| ۳۳۹ | ..... ۳-۸ معادلات فیزیکی موج - حرارت و لاپلاس از نوع همگن همراه با شرایط مرزی همگن            |
| ۳۴۰ | ..... ۲-۳-۸ معادله موج (یک بعدی و متناهی)   |
| ۳۴۲ | ..... ۱-۲-۳-۸ حل دالامبر معادله موج   |
| ۳۴۴ | ..... ۲-۲-۳-۸ جواب دالامبر معادله موج   |
| ۳۵۰ | ..... ۳-۲-۳-۸ خلاصه حل دالامبر معادله موج   |
| ۳۵۱ | ..... ۳-۳-۸ معادله گرما (یک بعدی و متناهی)  |
| ۳۵۱ | ..... ۴-۳-۸ مساله گرما برای یک میله نامتناهی  |
| ۳۵۲ | ..... ۵-۳-۸ مساله گرما برای یک میله نیمه نامتناهی   |
| ۳۵۹ | ..... ۱-۵-۳-۸ مسئله انتقال گرما در طول یک میله نازک   |
| ۳۶۴ | ..... ۶-۳-۸ معادله لاپلاس   |
| ۳۷۱ | ..... ۱-۶-۳-۸ حل معادله لاپلاس ( $\nabla^2 u = 0$ ) در دو هندسه خاص با شرایط مرزی ثابت        |
| ۳۷۲ | ..... ۷-۳-۸ معادله پواسون   |
| ۳۸۱ | ..... ۸-۳-۸ سری لژاندر-فوریه  |
| ۳۸۱ | ..... ۱-۸-۳-۸ معادله لژاندر   |
| ۳۸۳ | ..... ۲-۸-۳-۸ فرمول رودریگز: چند جمله‌ایهای لژاندر را میتوان به صورت زیر معرفی کرد:           |
| ۳۸۳ | ..... ۳-۸-۳-۸ سری لژاندر- فوریه   |
| ۳۸۳ | ..... ۴-۸ خلاصه ای مهم برای حل مسائل موج، گرما و لاپلاس                                       |

|     |  |
|-----|--|
| ۳۸۴ | .....حل معادلات با مشتق جزئی با استفاده از تبدیل لاپلاس          |
| ۳۸۹ | .....۲-۴-۸ استفاده از تبدیل فوریه در حل معادلات با مشتق های جزئی |
| ۳۹۲ | .....۳-۴-۸ تبدیل فوریه سینوسی و کسینوسی نامتناهی                 |
| ۳۹۴ | .....۵-۸ معادله پتانسیل داخل مکعب مستطیل                         |
| ۳۹۵ | .....۶-۸ معادله پتانسیل داخل استوانه                             |
| ۳۹۷ | .....۷-۸ معادله پتانسیل داخل کره                                 |
| ۳۹۹ | .....۲-۷-۸ معادله هلمهلتز در مختصات دکارتی                       |
| ۳۹۹ | .....۳-۷-۸ معادله هلمهلتز در مختصات استوانه‌ای                   |
| ۴۰۰ | .....۴-۷-۸ معادله هلمهلتز در مختصات کروی                         |
| ۴۰۲ | .....۸-۸ معادلات ناهمگن  |
| ۴۰۴ | .....۱-۸-۸ پیدا کردن جواب حالت ماندگار یک معادله با مشتقات جزئی  |
| ۴۰۵ | .....۹-۸ همگن کردن یک مسئله غیر ممکن:                            |
| ۴۰۷ | .....۱۰-۸ تبدیل فوریه سینوسی و کسینوسی متناهی                    |
| ۴۰۸ | .....۱۱-۸ معادلات گرما و موج سه بعدی                             |
| ۴۰۸ | .....۱۲-۸ تعریف انواع شرایط مرزی                                 |
| ۴۱۰ | .....۲-۱۲-۸ حل معادله لاپلاس با استفاده از جدول                  |
| ۴۱۰ | .....۳-۱۲-۸ حل معادله گرما (انتقال حرارت) با استفاده از جدول     |
| ۴۱۱ | .....۴-۱۲-۸ حل معادله موج با استفاده از جدول                     |
| ۴۱۱ | .....۱۳-۸ مثالهای تکمیلی   |
| ۴۱۸ | .....۳-۱۴-۸ تستهای هوا فضا                                       |
| ۴۱۸ | .....۴-۱۴-۸ پاسخ تستهای هوا فضا                                  |
| ۴۱۹ | .....۵-۱۴-۸ مسائل نمونه  |
| ۴۲۱ | .....۱۵-۸ حل مسائل نمونه   |
| ۴۲۱ | .....۱-۱۵-۸ مسائل نمونه  |
| ۴۲۲ | .....۲-۱۵-۸ حل مسائل نمونه                                       |
| ۴۲۳ | .....۳-۱۵-۸ مسائل نمونه  |
| ۴۲۴ | .....۴-۱۵-۸ حل مسائل نمونه                                       |
| ۴۲۵ | .....۲۰-۸ تستهای تکمیلی معادلات با مشتقات جزئی                   |
| ۴۲۹ | .....۲-۲۰-۸ پاسخ تستهای تکمیلی معادلات با مشتقات جزئی            |
| ۴۳۱ | .....مجموعه سوالات به همراه پاسخ                                 |



## اعداد و توابع مختلط

### ۱-۱ اعداد مختلط

هر عدد مختلط به صورت  $z = x + iy$  نوشته می‌شود که در آن،  $x, y$  اعداد حقیقی بوده و  $i = \sqrt{-1}$  به عدد موهومی محض، موسوم است.

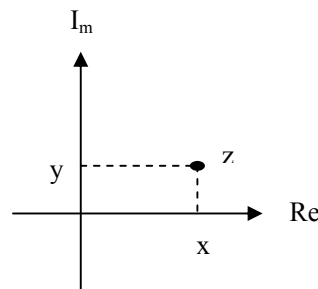
$$\operatorname{Re} z = x \quad \text{و} \quad \operatorname{Im} z = y \quad \text{و} \quad i^2 = -1 \quad \text{و} \quad -i^2 = 1$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\bar{z} = x - iy$$

$\bar{z}$ ، مزدوج  $z$  می‌باشد که در واقع، قرینه نقطه  $z$  نسبت به محور  $x$ ها می‌باشد.

نکته: از نقطه نظر هندسی، هر عدد مختلط مانند  $z = x + iy$  را می‌توان به منزله یک نقطه با مختصات  $(x, y)$  در صفحه دکارتی در نظر گرفت که طبیعی است در این دستگاه مختصات، محور  $x$ ها، محور حقیقی و محور  $y$ ها، محور موهومی می‌باشد.



شکل ۱-۱ صفحه اعداد مختلط

نکته: حاصل ضرب هر عدد مختلط در مزدوج آن، حاصلی صرفاً حقیقی دارد؛ زیرا اگر  $z = a + ib$  فرض شود، ملاحظه می‌شود که:

$$z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$$

بنابراین با توجه به حقیقت فوق، برای محاسبه حاصل تقسیم دو عدد مختلط، کافی است صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب کنیم و مسئله را ادامه دهیم.  $(z_1 = a + ib, z_2 = c + id)$



$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{a+ib}{c+id} \times \frac{c-id}{c-id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

مثال: فرض کنید  $n$  یک عدد حقیقی باشد. مقدار  $n$  چند انتخاب شود تا عدد مختلط  $z = (n+1) + in$  بر روی دایره واحد  $|z| = 1$  واقع شود؟

حل: از آنجا که تمام نقاط  $z$  باید روی دایره  $|z| = 1$  واقع شوند، داریم:

$$|z| = 1 \rightarrow |(n+1) + in| \Rightarrow \sqrt{(n+1)^2 + n^2} = 1 \Rightarrow n^2 + 2n + 1 + n^2 = 1 \Rightarrow 2n^2 + 2n = 0 \\ \Rightarrow n = 0, -1$$

مثال: روابط  $\begin{cases} \operatorname{Re} z = 0 \\ \operatorname{Im} z \geq 0 \end{cases}$  بیان گر چه شکلی در صفحه مختلط می باشد؟

حل: از آنجایی که  $\operatorname{Re} z = 0$  بیان گر محور  $y$ ها و  $\operatorname{Im} z \geq 0$  شرط  $y \geq 0$  را بیان می کند. لذا روابط مذکور، توأمأ نیم محور بالایی محور  $y$ ها را توصیف می کند.

مثال: روابط  $|z-1| = \operatorname{Re} z$ ،  $|z-1| = \operatorname{Im} z$ ، چه اشکالی را در صفحه مختلط معرفی می کنند؟  
از طرفی چون  $|z-1| \geq 0$  است، لذا یک نیم خط به صورت  $y \geq 0$  و  $x = 1$  مورد نظر می باشد.  
برای قسمت دوم داریم:

$$|z-1| = \operatorname{Re} z \rightarrow |x-1+iy| = x \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = x \\ x^2 + 1 - 2x + y^2 = x^2$$

پس داریم؛  $x = \frac{1+y^2}{2}$  که بیان گر یک سهمی می باشد.

مثال: اگر  $z$  توصیف کننده یک متغیر مختلط باشد، ناحیه ای که با رابطه  $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) > 1$  توصیف می شود را مشخص کنید؟

کنید؟

حل:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} \\ \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) > 1 \Rightarrow \frac{-y}{x^2+y^2} > 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + y < 0 \Rightarrow x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{4}$$

مرز ناحیه مورد نظر  $x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$  می باشد و همان طور که می دانیم، دایره ای است به مرکز  $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$  و شعاع

$$: R = \frac{1}{2}$$

با مشخص کردن مرز، کافی است وضعیت یک نقطه را مشخص کنیم؛ به عنوان مثال  $(0, 1)$  در خارج دایره قرار دارد و شرط

$\frac{-y}{x^2+y^2} > 1$  را ارضا نمی کند. بنابراین، نقاط داخل دایره ای به مرکز  $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$  و شعاع  $R = \frac{1}{2}$  ناحیه مورد نظر است.

مثال: مکان هندسی نقاطی از صفحه با رابطه  $\operatorname{Re}\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = 1$  را مشخص کنید؟

حل:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)} \cdot \frac{x-i(y+1)}{x-i(y+1)}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{x^2+(y^2-1)+i(\dots)}{x^2+(y+1)^2}\right)$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$\frac{x^2+(y^2-1)}{x^2+(y+1)^2} = 1 \Rightarrow x^2+y^2-1 = x^2+y^2+2y+1 \Rightarrow y = -1$$

پس مکان هندسی این نقاط خط  $y = -1$  است.

مثال: چنانچه  $z$  یک متغیر مختلط باشد ( $z = x + iy$ )، رابطه زیر توصیف کننده چه اشکال یا نواحی خواهد بود؟

حل:

$$z\bar{z} = \operatorname{Im}(z^2)$$

$$z\bar{z} = x^2 + y^2$$

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \rightarrow \operatorname{Im}(z^2) = 2xy$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 2xy = x^2 - 2xy + y^2 = 0 \Rightarrow (x - y)^2 = 0 \Rightarrow x - y = 0$$

به صورت خط  $x = y$  خواهد بود.

نکته:

اگر  $z = x + iy$  فرض شود و  $z_1 = x_1 + iy_1$  یک عدد مختلط معین باشد، به سادگی می توان نشان داد مکان هندسی نقاطی از صفحه که با رابطه  $|z - z_1| = R$  مشخص می شود، دایره  $R^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$  می باشد، یعنی دایره ای به مرکز  $z_1$  و شعاع  $R$ . بنابراین می توان رابطه  $|z - z_1| = R$  را به منزله مکان هندسی نقاطی از صفحه دانست که فاصله شان تا نقطه  $z_0$  عدد ثابت  $R$  می باشد و بنابراین به سادگی می توان نتیجه گرفت که اگر  $z_1, z_2$  دو عدد مختلط معین باشند آن گاه:

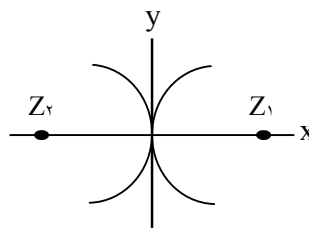
الف) مکان هندسی نقاطی که با رابطه  $|z - z_2| = |z - z_1| = R$  توصیف می شود، یک بیضی به کانون های  $z_1, z_2$  است، با شرط:

$$|z_2 - z_1| < R$$

ب) مکان هندسی نقاطی که با رابطه  $|z - z_2| = |z - z_1| = R$  توصیف می شود یک هذلولی به کانون های  $z_1, z_2$  است، با شرط:

$$|z_2 - z_1| > R$$

ج) مکان هندسی نقاطی که با رابطه  $|z - z_2| = |z - z_1|$  توصیف می شود، عمود منصف پاره خطی است که  $z_1, z_2$  را به هم متصل می کند.



شکل ۱-۲ عمود منصف پاره خط واصل بین  $z_1$  و  $z_2$



نکته: خواص زیر در مجموعه اعداد مختلط برقرار است:

$$\begin{aligned} \overline{(z_1 \pm z_2)} &= \overline{z_1} \pm \overline{z_2} \quad \text{و} \quad |z| = |\overline{z}| \\ \overline{(z_1 z_2)} &= \overline{z_1} \overline{z_2} \quad \text{و} \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad \text{و} \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \end{aligned}$$

مثال: هرگاه  $z = a + ib$  فرض شود حاصل  $\left|\frac{iz}{z}\right|$  چه مقدار است؟

حل: با استفاده از خواص بالا داریم:

$$\left|\frac{iz}{z}\right| = \frac{|iz|}{|z|} = \frac{|i||z|}{|z|} = \frac{|i||a+ib|}{|a-ib|} = \frac{1 \times \sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1$$

مثال: اگر  $z_1$  و  $z_2$  جواب‌های معادله  $z^2 + z + 1 = i$  باشد حاصل  $|z_1 - z_2|$  چقدر است؟

حل: همان‌طور که ملاحظه می‌شود معادله فوق، یک معادله درجه دوم است بنابراین داریم:

$$|z_1 - z_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{(1)^2 - (4)(1)(1-i)}}{1} = \left| \sqrt{4i-3} \right| = \sqrt{|4i-3|} = \sqrt{5}$$

## ۲-۱ بیان منحنی در فرم پارامتری

یک منحنی در صفحه مختلط می‌تواند توسط یک رابطه، پارامتری نظیر  $z(t) = x(t) + iy(t)$  معرفی شود و برای مشخص کردن آن باید پارامتر  $t$  را بین  $x$  و  $y$  حذف کرد.

مثال: منحنی تعریف شده با رابطه  $z(t) = \sin^2 t + i \cos^2 t$ :

(الف) دایره‌ای با محیط  $2\pi$  است. (ب) دایره‌ای با محیط  $\pi$  است.

(ج) پاره خطی به طول  $\sqrt{2}$  است. (د) پاره خطی به طول ۱ است.

حل:

$$z(t) = \sin^2 t + i \cos^2 t \Rightarrow \begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$$

لذا داریم:  $x + y = 1$  که بیان‌گر یک خط راست است و چون  $x = \sin^2 t \geq 0$  و  $y = \cos^2 t \geq 0$  پس قسمتی از این خط (پاره خط) که در ربع اول قرار گرفته مدنظر است و به سادگی می‌توان ملاحظه نمود که طول این پاره خط  $\sqrt{2}$  است.

مثال: منحنی  $z(t) = \cosh t + i \sinh t$  بیان‌گر چه منحنی‌ای می‌باشد؟

(الف) قسمتی از یک بیضی (ب) یک بیضی

(ج) قسمتی از یک هذلولی (د) یک هذلولی

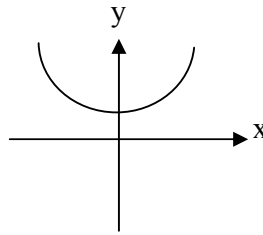
حل:

$$z(t) = \cosh t + i \sinh t \Rightarrow \begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sinh t \end{cases}$$

لذا طبق رابطه  $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$  داریم:



$x^2 - y^2 = 1$  که بیانگر یک هذلولی است و از آنجا که  $x \cosh t \geq 1$  لذا یکی از شاخه‌های این هذلولی مدنظر است.



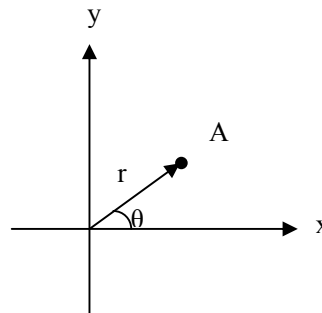
شکل ۳-۱ هذلولی مرتبط با مثال

### ۳-۱ فرم قطبی اعداد مختلط مختلط

همان‌طوری که می‌دانیم، برای مشخص کردن یک نقطه در صفحه، نیاز به دو مختصه داریم که در مختصات دکارتی این دو مختصه طول و عرض نقطه  $(x, y)$  می‌باشد، در دستگاه مختصات قطبی از دو مختصه  $r, \theta$  مطابق شکل زیر استفاده می‌شود:

$OA = r$ : طول شعاع حامل نقطه A

$\theta$ : زاویه شعاع حامل نقطه A با جهت مثبت محور Xها



شکل ۴-۱ نمایش قطبی اعداد مختلط

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{cases} \quad (1)$$

بنابراین، نقطه A در مختصات قطبی به صورت  $A(r, \theta)$  نشان داده می‌شود. در محاسبه  $\theta$  از رابطه (۱) باید به این نکته توجه داشته باشیم که تمامی زاوایی که در  $\pi$  با هم اختلاف دارند تانژانت یکسانی دارند، لذا باید به موقعیت نقطه و این که در کدام ربع دستگاه مختصات قرار می‌گیرد، توجه داشته باشیم. حال با استفاده از دستگاه مختصات قطبی می‌توان نوشت:

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) \xrightarrow{\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}} z = r.e^{i\theta}$$



توجه:

به خاطر داشته باشید کار کردن با اعداد مختلط وقتی آن‌ها را به صورت قطبی نوشته‌ایم در برخی موارد با سهولت بیشتری انجام می‌گیرد. به عنوان مثال اگر  $z_1 = \rho e^{i\theta}$  و  $z_2 = \rho e^{i\varphi}$  توصیف کننده دو عدد مختلط معین باشند داریم:

$$z_1 z_2 = (\rho e^{i\theta})(\rho e^{i\varphi}) = \rho^2 e^{i(\theta+\varphi)} = \rho^2 (\cos(\theta+\varphi) + i \sin(\theta+\varphi))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho e^{i\varphi}} = e^{i(\theta-\varphi)} = \cos(\theta-\varphi) + i \sin(\theta-\varphi)$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad z_1^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta} = \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

نکته: رابطه  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$  به رابطه دمووار معروف است.

مثال: مطلوب است محاسبه مقدار A:

$$A = \left( \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i} \right)^{17}$$

حل: نخست اعداد مختلط صورت و مخرج را در فرم قطبی می‌نویسیم:

می‌دانیم نقطه در ربع چهارم واقع است.

$$\sqrt{3}i = \begin{cases} r = \sqrt{1+3} = 2 \\ \theta = \tan^{-1} \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\tan^{-1} \sqrt{3} = \begin{cases} -\frac{\pi}{3} \\ \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow 1 - \sqrt{3}i = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

می‌دانیم نقطه در ربع اول واقع است.

$$\sqrt{3}i = \begin{cases} r = \sqrt{1+3} = 2 \\ \theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{1} = \begin{cases} \frac{\pi}{3} \\ \pi + \frac{\pi}{3} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow 1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left( \frac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} \right)^{17} = \left( e^{-i\pi} \right)^{17} = e^{-17i\pi} = \cos(-17\pi) + i \sin(-17\pi) = 1$$

مثال: اگر  $z$  یک عدد مختلط باشد و  $|z| = 5$  مطلوب است محاسبه عبارت  $\left| ze^{\frac{\pi}{3}i} - z \right|$

حل:

$$\left| ze^{\frac{\pi}{3}i} - z \right| = \left| z \left( e^{\frac{\pi}{3}i} - 1 \right) \right| = |z| \left| e^{\frac{\pi}{3}i} - 1 \right| = |z| \left| \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} - 1 \right| = |z| \left| \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = 5$$

$$\times \sqrt{\left( \frac{-1}{2} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} = 5$$

مثال: فرض کنید داشته باشیم  $z_n = \cos \frac{\pi}{3^n} + i \sin \frac{\pi}{3^n}$  مطلوب است محاسبه  $\prod_{m=1}^{\infty} z_m$

حل: با نوشتن  $z_m$  به فرم قطبی داریم:

$$z_n = \cos \frac{\pi}{3^n} + i \sin \frac{\pi}{3^n} = e^{i \frac{\pi}{3^n}}$$

$$= z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_n \dots = e^{i \frac{\pi}{3}} \cdot e^{i \frac{\pi}{3^2}} \cdot e^{i \frac{\pi}{3^3}} \dots = e^{i \pi \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \right)}$$

ملاحظه می‌شود  $\left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \right)$  یک تصاعد هندسی است. با استفاده از رابطه  $s_{\infty} = \frac{t_1}{1-q}$  که در آن  $t_1$ : جمله اول،  $q$  قدر نسبت تصاعد (با فرض  $|q| < 1$ ) و  $s_{\infty}$ : مجموع بی‌نهایت جمله می‌باشد، داریم:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \sim \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1$$

$$= e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

نکته: با توجه به روابط می‌توان نشان داد:

$$\left. \begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta \\ e^{-i\theta} &= \cos \theta - i \sin \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\ \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \end{cases}$$

نیز داریم:

$$\cosh x = \cos ix$$

$$i \sinh x = \sin ix$$

مثال: اگر  $A = \sin(2 + 3i)$  باشد، قسمت موهومی  $A$  را به دست آورید؟

حل:

$$\sin(2 + 3i) = \sin 2 \cdot \cos 3i + \cos 2 \cdot \sin 3i = \sin 2 \cdot \cosh 3 + i \cos 2 \cdot \sinh 3$$

که ملاحظه می‌شود قسمت موهومی عدد  $A$  برابر است با:

$$\text{Im}(A) = (\cos 2) \cdot (\sinh 3)$$

مثال: مطلوب است قسمت حقیقی عدد  $A = (\cos 30 + i \sin 30)^\lambda$

حل: طبق رابطه دموآور داریم:

$$A = (\cos 30 + i \sin 30)^\lambda = \cos(\lambda \times 30) + i \sin(\lambda \times 30) = \cos(240) + i \sin 240 = \frac{-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Re}(A) = \frac{-1}{2}$$

پس داریم

نکته در رابطه با اعداد مختلط

الف) محاسبه ریشه‌های  $n$  ام یک عدد مختلط:

هر عدد مختلط، دارای  $n$  ریشه  $n$  ام می‌باشد و چنانچه داشته باشیم  $z = re^{i\theta}$  می‌توان نشان داد:



$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

یعنی برای مثال:

ریشه هفتم یک عدد مختلط، هفت ریشه (اعم از موهومی و حقیقی) دارد.

(ب) محاسبه لگاریتم نپرین یک عدد مختلط  $Lnz$ :

در صورتی که  $z = re^{i\theta}$  یک عدد مختلط معین باشد، می توان نشان داد:

$$Lnz = Lnr + i(\theta + 2k\pi)$$

که در آن،  $k$  یک عدد صحیح نسبی دلخواه است و لذا لگاریتم نپرین، یک عدد مختلط دارای بی شمار جواب است.

مثال: مطلوب است عبارت  $\sqrt{-i}$ .

حل: ابتدا نقطه  $-i$  را به فرم قطبی می نویسیم:

$$(-i) = \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{-\pi}{2} \end{cases}$$

می دانیم که عبارت  $\sqrt{-i}$  دارای دو ریشه می باشد:

$$\sqrt{-i} = \sqrt[2]{1} \left\{ \cos \frac{-\pi + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi + 2k\pi}{2} \right\}, k = 0, 1$$

$$k = 0 \Rightarrow w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k = 1 \Rightarrow w_1 = \frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال: عدد مختلط زیر، مفروض است:

$$z = \frac{1+i}{1+i+(1-i)^2}$$

مطلوب است محاسبه ریشه های دوم این عدد مختلط.

حل:

$$z = \frac{1+i}{1+i+1-1-2i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+2i-1}{1+1} = i$$

$$(-i) = \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{i} = \sqrt[2]{1} \left( \cos \frac{\pi + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{2} \right), k = 0, 1$$



$$k = 0 \Rightarrow \text{جواب اول} : \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k = 1 \Rightarrow \text{جواب دوم} : \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال: حاصل  $Ln(-1)$  را به دست آورید.

حل: نقطه  $(-1)$  را به فرم قطبی می نویسیم:

$$(-1) = \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \pi \end{cases}$$

لذا خواهیم داشت:

$$Ln(-1) = Ln(1) + i(\pi + 2k\pi) = i(\pi + 2k\pi)$$

لذا  $Ln(-1)$  دارای بی نهایت مقدار موهومی می باشد.

مثال: حاصل عدد مختلط  $z = i^i$  را به دست آورید.

حل: نقطه  $i$  را به فرم قطبی می نویسیم:

$$(i) = \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\ln z = i \ln i = i \left\{ \ln(1) + i \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \right\} = - \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)$$

$$z = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$$

مثال: مقدار  $\overline{\exp z}$  (مزدوج  $e^z$ ) کدام است؟

الف)  $\exp z$       ب)  $\exp \bar{z}$       ج)  $(\exp z)^{-1}$       د)  $\exp z^{-1}$

حل:

$$\overline{(e^z)} = \overline{(e^{x+iy})} = \overline{(e^x e^{iy})} = e^x e^{-iy} = e^{x-iy} = \exp(\bar{z})$$

مثال: حاصل عبارت  $\left(\frac{i - \tan \alpha}{i + \tan \alpha}\right)^n$  کدام است؟

الف)  $\left(\frac{i + \tan \alpha}{i - \tan \alpha}\right)$       ب)  $\left(\frac{1-i \tan \alpha}{i+i \tan \alpha}\right)$       ج)  $\left(\frac{i+i \tan \alpha}{1+i \cot n \alpha}\right)$       د)  $\left(\frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan n \alpha}\right)$

حل:

$$\left(\frac{i - \tan \alpha}{i + \tan \alpha}\right)^n = \left(\frac{i - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{i + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}\right)^n$$

$$\left(\frac{i \cos \alpha - \sin \alpha}{i \cos \alpha + \sin \alpha}\right)^n = \left(\frac{i(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{i(\cos \alpha - i \sin \alpha)}\right)^n$$



طبق رابطه دموآور داریم:

$$\frac{\cos n\alpha + i \sin n\alpha}{\cos n\alpha - i \sin n\alpha} = \left( \frac{1 + \tan n\alpha}{1 - i \tan n\alpha} \right)$$

مثال: کدام یک از گزینه های زیر، یکی از ریشه های معادله  $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$  می باشد؟

- (الف)  $i$       (ب)  $-i$       (ج)  $\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$       (د) هیچکدام

حل: با ضرب طرفین معادله  $z - 1$  بدست می آید:

$$(z - 1)(z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0 \Rightarrow z^6 - 1 = 0 \Rightarrow z^6 = 1$$

لذا ریشه های معادله مذکور؛  $z = \sqrt[6]{1}$  (به جز  $z = 1$ ) خواهد بود.

$$1 = \begin{cases} r = 1 \\ \theta = 0 \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$z = \sqrt[6]{1} \left\{ \cos \frac{+2k\pi}{6} + i \sin \frac{+2k\pi}{6} \right\}, k = 0, 1, 2, 3, \dots, 5$$

به ازای  $k = 1$  به دست می آید:

$$z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

لذا ملاحظه می شود که گزینه ج صحیح است.

مثال: مطلوب است محاسبه عبارت های زیر:

$$A = \ln(-1)$$

حل:

دارای بی شمار مقدار می باشد:

$$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = +\pi \end{cases} \Rightarrow \ln(-1) = \ln(1) + i(\pi + 2k\pi) = 0 + i\pi(2k + 1)$$

$$B = (1-i)^{2i}$$

از دو طرف  $\ln$  می گیریم.

$$\ln(B) = \ln(1-i)^{2i} = 2i \ln(1-i)$$

$$(1-i) = \begin{cases} r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \theta = -\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \ln(1-i) = \ln \sqrt{2} + i \left( -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right)$$

$$\ln(B) = 2i \left[ \ln \sqrt{2} + i \left( 2k\pi - \frac{\pi}{4} \right) \right] = 2i \ln \sqrt{2} - 2 \left( -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right)$$

$$B = \exp \left( -2i \ln \sqrt{2} - 2 \left( -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) \right)$$



مثال: فرض کنید  $0 \leq \theta < 2\pi$  و  $z = re^{i\theta}$  روی درستی هر یک از روابط زیر بحث کنید.

$$۱) \overline{e^z} = e^{\bar{z}} \quad ۲) \overline{\sin z} = \sin \bar{z} \quad ۳) \overline{\cos z} = \cos \bar{z}$$

حل: روابط مربوط به گزینه‌های ۱، ۲، و ۳ اتحادهایی شناخته شده در بحث توابع مختلط هستند، به عنوان مثال:

$$(e^z) = (e^{x+iy}) = (e^x e^{iy})$$

و از آن جا که هرگاه  $z = re^{i\theta}$  آنگاه  $\bar{z} = re^{-i\theta}$  خواهیم داشت:

$$(\overline{e^z}) = (\overline{e^x e^{iy}}) = e^x e^{-iy} = e^{\bar{z}}$$

یا:

$$\overline{\sin z} = \overline{(\sin(x+iy))} = \overline{(\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y)} = (\sin x \cosh y - i \cos x \sinh y)$$

و از طرفی:

$$\sin \bar{z} = \sin(x-iy) = (\sin x \cosh y - i \cos x \sinh y)$$

مثال: بخش‌های حقیقی و موهومی تابع  $f(z) = z^\gamma$  را به دست آورید.

حل: با استفاده از شکل دکارتی  $z$  داریم:

$$f(z) = z^\gamma = (x+iy)^\gamma = x^\gamma - y^\gamma + \gamma xy$$

$$v = \text{Im}(f(z)) = \gamma xy, u = \text{Re}(f(z)) = x^\gamma - y^\gamma$$

بنابراین،

همچنین شکل قطبی  $z$  نتیجه می‌دهد:

$$f(z) = (re^{i\theta})^\gamma = r^\gamma e^{i\gamma\theta} = r^\gamma \cos \gamma\theta + ir^\gamma \sin \gamma\theta$$

پس  $u = r^\gamma \cos \gamma\theta$ ,  $v = r^\gamma \sin \gamma\theta$  می‌باشند که همان  $u, v$  مختصات دکارتی است.

مثال: بخش‌های حقیقی و موهومی تابع  $f(z) = \frac{1}{z}$  را نتیجه بگیرید.

حل: شکل دکارتی  $Z$  نتیجه می‌دهد:

$$f(x+iy) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

پس

$$v = \text{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}, u = \text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

استفاده از شکل دکارتی  $u = \frac{\cos \theta}{r}, v = -\frac{\sin \theta}{r}$  را نتیجه می‌دهد.

مثال: بخش‌های حقیقی و موهومی تابع  $f(z) = e^z$  را نتیجه بگیرید.

حل: با استفاده از شکل دکارتی داریم:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x + e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

بنابراین؛

$$v = \text{Im}(e^z) = e^x \sin y, u = \text{Re}(e^z) = e^x \cos y$$

در اینجا شکل قطبی  $x$  برای تعیین  $u, v$  مناسب نیست.



مثال: بخش‌های حقیقی و موهومی تابع  $\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$  را تعیین کنید.

حل:

$$\begin{aligned}\cosh z &= \frac{1}{2}(e^{x+iy} + e^{-x-iy}) = \frac{1}{2}e^x(\cos y + i \sin y) + \frac{1}{2}e^{-x}(\cos y - i \sin y) \\ &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\cos y + i\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\sin y = \cosh x \cdot \cos y + i \sinh x \cdot \sin y\end{aligned}$$

بنابراین

$$v(xy) = \sinh x \cdot \sin y, u(xy) = \cosh x \cdot \cos y$$

مثال: بخش‌های حقیقی و موهومی تابع  $f(z) = \sqrt{z}$  را تعیین کنید؟

حل: در این جا نمی‌توان از شکل دکارتی  $z$  استفاده کرد پس از شکل قطبی آن استفاده می‌کنیم. در استفاده از شکل قطبی باید حساسیت  $u(r, \theta), v(r, \theta)$  را نسبت به تغییر آرگومان سنجید. بدین دلیل همواره  $z = re^{i(\theta+2k\pi)}$  در نظر می‌گیریم که در آن  $\theta$  آرگومان اصلی  $z$  است، پس داریم:

$$f(z) = \sqrt{re^{i(\theta+2k\pi)}} = \sqrt{r}e^{i(\frac{\theta}{2}+k\pi)} = \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2} + k\pi\right) + i\sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2} + k\pi\right)$$

بنابراین برای  $k$  های زوج  $f(z) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$  است. لذا

$$(1) \quad v(r, \theta) = \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, u(r, \theta) = \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}$$

برای  $k$  های فرد  $f(z) = \sqrt{r}e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$  است، لذا

$$(2) \quad v(r, \theta) = -\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, u(r, \theta) = -\sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}$$

یعنی تابع  $\sqrt{z}$  دارای دو مجموعه  $u, v$  است که قرینه‌ی یک دیگر نسبت به مبدا مختصات هستند. پس این تابع برای هر مقدار  $x$  دو مقدار، یکی برای  $u, v$  روابط (۲)، نتیجه می‌دهد. به همین نحو می‌توان نشان داد که تابع که تابع  $f(z) = \sqrt{z}$  برای هر  $n$  طبیعی دارای  $n$  مجموع متمایز  $u, v$  است.

مثال: معادله  $e^z + 2 = 0$  را حل کنید (یعنی صفرهای تابع  $e^z + 2$  را بیابید)

حل:

$$(1) \quad \operatorname{Re}(e^z + 2) = e^x \cos y + 2 = 0$$

$$(2) \quad \operatorname{Im}(e^z + 2) = e^x \sin y = 0$$

از رابطه‌ی (۲) نتیجه می‌گیریم  $\sin y = 0$ ، پس از رابطه‌ی (۱) نتیجه می‌گیریم:  $\cos y = -1$  (حالت  $\cos y = 1$  معادله‌ی ممتنع  $e^x = -2$  را نتیجه می‌دهد)، پس  $e^x = 2$ .

بنابراین  $x = \ln 2, y = (2k+1)\pi$  و جواب‌های معادله برای کلیه  $k$  های صحیح به صورت زیر است:

$$z = x + iy = \ln 2 + (2k+1)\pi i \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

مثال: مسیر متعامد خانواده منحنی  $2xy + 2x = c$  را تعیین کنید.

حل: اگر  $u = 2xy + 2x$ ، آن‌گاه مزدوج هارمونیک آن برابر  $v = y^2 - x^2 + c$  نتیجه می‌گردد. پس مسیر متعامد خانواده منحنی  $y^2 - x^2 = c$  است.



مثال: یک مزدوج هم‌ساز برای تابع  $x^2 - 3xy^2$  کدام است؟

$$(1) \quad y^2 - 3x^2y \quad (2) \quad 3x^2y - y^2 \quad (3) \quad 3x^2y + y^2 \quad (4) \quad 3x^2y + 3y^2x$$

حل: گزینه (۲) صحیح است. چون باید  $v$  هارمونیک باشد، فقط تابع گزینه (۲) در معادله  $u_{xx} + v_{yy} = 0$  صدق می‌کند.

مثال: فرض کنیم  $Z_1$  و  $Z_2$  دو عدد مختلط غیر صفر باشند به قسمتی که  $\frac{|Z_1 - \bar{Z}_2|}{|Z_1 + \bar{Z}_2|} = 1$  در این صورت:

$$(1) \quad \operatorname{Re}(z_1 z_2) = 0 \quad (\text{قسمت حقیقی}) \quad (2) \quad \operatorname{Re}(z_1 z_2) < 0$$

$$(3) \quad \operatorname{Im}(z_1 z_2) = 0 \quad (\text{قسمت موهومی}) \quad (4) \quad \operatorname{Re}(z_1 z_2) > 0$$

حل: گزینه (۱) صحیح است. اگر  $z_1 = i$  و  $z_2 = 1$  در نظر بگیریم، آن‌گاه  $|z_1 - \bar{z}_2| = |z_1 + \bar{z}_2|$  از طرفی چون  $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = 0, z_1 z_2 = i$ ، لذا گزینه (۱) صحیح است.

مثال: مجموعه جواب‌های معادله  $\sin z = 2i$  ( $z = x + iy$  مختلط) کدام‌اند؟ ( $Z$  مجموعه اعداد صحیح است)

$$(1) \quad \text{تهی است.} \quad (2) \quad z_k = k\pi + i \ln(\sqrt{5} - 2), k \in Z$$

$$(3) \quad z_k = k\pi + i \ln(\sqrt{5} + 2), k \in Z \quad (4) \quad z_k = k\pi + i \ln(\sqrt{5} + 2(-1)^k), k \in Z$$

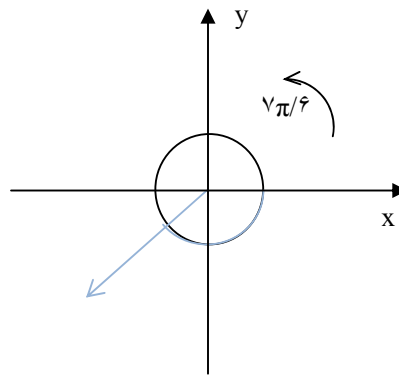
حل: گزینه (۳) صحیح است.

مثال: اگر  $Z$  یک عدد مختلط ناصفر،  $\ln z = \ln r + i\theta$  و  $-\frac{5\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{7\pi}{6}$  باشد، آنگاه  $\ln\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$  برابر

است با:

$$(1) \quad \frac{i\pi}{3} \quad (2) \quad \frac{-2i\pi}{3} \quad (3) \quad \frac{-i\pi}{3} \quad (4) \quad \ln\sqrt{3} + \frac{i\pi}{3}$$

حل:



شکل ۵-۱ ناحیه داده شده جهت انتگرال‌گیری

$$\ln\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) = \ln\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) + i\arg\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) = \ln\left|\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right| + i\left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = i\left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

چون برای  $k = 0$ ، نقطه در فرجه داده شده واقع می‌شود پس جواب  $\frac{-2i\pi}{3}$  صحیح است.



مثال: فرض کنید  $z = re^{i\theta}$  و  $0 \leq \theta < 2\pi$ ، کدامیک از روابط زیر نادرست است؟

(۱)  $\cos \bar{z} = \overline{\cos z}$  (۲)  $\sin \bar{z} = \overline{\sin z}$  (۳)  $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$  (۴)  $\ln \bar{z} = \overline{\ln z}$

حل: رابطه (۴) نادرست است؛ زیرا مثلاً اگر  $z = e^{\pi i/2}$  در نظر گرفته شود آن‌گاه در فاصله داده شده  $z = e^{\pi i/2}$  خواهد بود

و

$\ln z = \ln e^{\pi i/2} = -\pi i / 2 \neq \overline{\ln z} = \overline{\ln e^{\pi i/2}} = \pi i / 2$

مثال: اگر  $z = \rho e^{i\theta}$  و  $0 \leq \theta < 2\pi$ ، مقدار  $|e^{iz}|$  کدام است؟

(۱)  $e^{\sqrt{\rho}}$  (۲)  $e^{i\sqrt{\rho}}$  (۳)  $e^{-\sqrt{\rho}}$  (۴)  $e^{-i\sqrt{\rho}}$

حل: چون

$z = \rho e^{i\theta} = \rho \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = e^{-\sqrt{\rho}}$

لذا

$|e^{iz}| = \left| e^{\rho(i-\sqrt{\rho})} \right| = \left| e^{\rho i} \right| \left| e^{-\rho\sqrt{\rho}} \right| = e^{-\rho\sqrt{\rho}}$

مثال: مقدار  $|\tanh z|$  برای  $z = \pi(1+i)/4$  کدام است؟

(۱)  $\tanh \pi$  (۲)  $\sinh \pi$  (۳)  $\cosh \pi$

حل: چون

$$\tanh \left[ \frac{\pi(1+i)}{4} \right] = \frac{\sinh \left[ \frac{\pi}{4} + i \frac{\pi}{4} \right]}{\cosh \left[ \frac{\pi}{4} + i \frac{\pi}{4} \right]} = \frac{\sinh \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} + i \cosh \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4}}{\cosh \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} + i \sinh \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\sinh \frac{\pi}{4} + i \cosh \frac{\pi}{4}}{\cosh \frac{\pi}{4} + i \sinh \frac{\pi}{4}}$$

پس

$$\left| \tanh \left[ \frac{\pi(1+i)}{4} \right] \right| = \frac{\left| \sinh \frac{\pi}{4} + i \cosh \frac{\pi}{4} \right|}{\left| \cosh \frac{\pi}{4} + i \sinh \frac{\pi}{4} \right|} = 1$$

مثال: جواب‌های نامعادله  $|e^{z^2}| \leq 1$  برابر است با

(۱)  $|y| \leq |x|$  (۲)  $|y| \geq |x|$  (۳)  $xy \geq 0$  (۴)  $xy \leq 0$

حل:  $|e^{z^2}| = \left| e^{x^2 - y^2 + 2ixy} \right| = \left| e^{x^2 - y^2} \right| \left| e^{2ixy} \right| = e^{x^2 - y^2}$

نامعادله  $e^{x^2 - y^2} \leq 1$  نتیجه می‌دهد که  $x^2 y^2 \leq 0$  و یا  $|x| \geq |y|$

مثال: مقدار اصلی  $\ln(-4)$  کدام است؟

(۱)  $2 \ln 2$  (۲)  $2 \ln 2 - i\pi$  (۳)  $2 \ln 2 + i\pi$  (۴)  $2 \ln 2 - i \frac{\pi}{2}$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

$\ln(-4) = \ln + i \text{Arg}(-4) = 2 \ln 2 + i\pi$

## ۴-۱ نواحی در صفحه اعداد مختلط

نقطه  $Z$  را یک نقطه داخلی  $R$  نامیم اگر یک  $\varepsilon$  همسایگی از  $Z$  در  $R$  باشد و آنرا نقطه خارجی  $R$  نامیم اگر یک  $\varepsilon$  همسایگی در  $R'$  باشد. نقطه را نقطه مرزی نامیم اگر در همسایگی از آن شامل نقاطی از  $R$  و  $R'$  باشد. مجموعه  $R$  باز باشد اگر همه نقاط آن باشد. متمم یک مجموعه باز را یک مجموعه بسته نامیم. مثلاً مجموعه نقاط  $|z| < 1$  باز و مجموعه نقاط  $|z| \geq 1$  بسته است.

مجموعه  $R$  را کران دار نامیم اگر تمام  $Z$ های متعلق به  $R$  در شرط  $|z| < 1$  صدق کند، در اینجا  $M$  یک عدد حقیقی مثبت است. اگر این شرایط برقرار نباشد مجموعه را بی کران نامیم.

مجموعه  $R$  را همبند نامیم اگر بتوان هر دو نقطه  $R$  را با مجموعه ای از خطوط شکسته واقع در  $R$  بهم وصل کرد در این غیر این صورت  $R$  نا همبند است. یک مجموعه همبند باز را حوزه یا دامنه می نامیم حوزه  $R$  را ساده می نامیم اگر متمم آن همبند باشد. به بیان دیگر  $R$  شامل هیچ حفره ای نباشد.

مجموعه  $1 < |z| < 4$  یک حوزه ساده نیست و آن را حوزه مرکب می خوانیم.

به طور کلی اگر نقطه  $z = x + iy$  مرکز دایره ای به شعاع  $a$  باشد، آن گاه روابط زیر را خواهیم داشت:

- |                    |  |
|--------------------|--|
| ۱) $ z - z_0  < a$ | نقاط داخل دایره ای به شعاع $a$ و مرکز $O(x_0, y_0)$    |
| ۲) $ z - z_0  = a$ | نقاط روی مرز دایره ای به شعاع $a$ و مرکز $O(x_0, y_0)$ |
| ۳) $ z - z_0  > a$ | نقاط خارج دایره ای به شعاع $a$ و مرکز $O(x_0, y_0)$    |

مثال: مکان عدد مختلط  $z = x + iy$  که در تساوی  $z\bar{z} + (1+i)z + \overline{(1+i)z} + 1 = 0$  صدق کند کدام است؟

۱) محیط دایره ای به مرکز  $(1, 1)$  و شعاع یک

۲) محیط دایره ای به مرکز  $(1, 1)$  و شعاع یک

۳) محیط و داخل دایره ای به مرکز  $(1, 1)$  و شعاع یک

۴) محیط دایره ای به مرکز  $(1, 1)$  و شعاع یک

حل: گزینه ۲

$$x^2 + y^2 + (1+i)(x+iy) + (1-i)(x-iy) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + x + iy + ix - y + x - iy - ix - y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

مثال: ناحیه  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 1$  چه مکانی از صفحه مختلط را مشخص می کند؟

۱) خارج دایره به شعاع  $\frac{1}{4}$  و به مرکز  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

۲) داخل دایره به شعاع  $\frac{1}{4}$  و به مرکز  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

۳) خارج دایره به شعاع  $\frac{1}{4}$  و به مرکز  $(-\frac{1}{4}, 0)$

۴) داخل دایره به شعاع  $\frac{1}{4}$  و به مرکز  $(-\frac{1}{4}, 0)$

حل: اگر  $z = x + iy$  دایره آنگاه

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{x+iy}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} > 1$$

یا



$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 < \frac{1}{4}$$

مثال: اگر  $Z_1$  و  $Z_2$  نقاط دلخواهی از صفحه مختلط باشند، آن‌گاه مکان نقاط  $z = \alpha Z_1 + \beta Z_2$  با فرض عبارت است از

(۱) پاره خطی که نقاط  $\alpha Z_1$  و  $\beta Z_2$  را به هم متصل می‌کند.

(۲) پاره خطی که مبدأ را به نقطه  $\alpha Z_1 + \beta Z_2$  متصل می‌کند.

(۳) پاره خطی که نقاط  $Z_1$  و  $Z_2$  را به هم متصل می‌کند.

(۴) پاره خطی که مبدأ را به نقطه  $Z_1 + Z_2$  متصل می‌کند.

حل: اگر  $\beta \geq 0$ ،  $a$ ، آن‌گاه چون  $a = 1 - \beta$  پس  $0 \leq \beta \leq 1$  که  $Z(t) = (1 - \beta)z_1 + \beta z_2$  نمایش پاره خطی است که  $Z_1$  را به  $Z_2$  متصل می‌کند.



## ۵-۱ نمونه تست‌های حل شده اعداد مختلط

۱- اگر  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$  باشد، مقدار  $w = z^{100}(1-i)$  برابر کدام است؟

- (۱)  $-1-i$  (۲)  $1-i$  (۳)  $-1+i$  (۴)  $1+i$

۲- ساده شده تابع  $f(\theta) = \frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}$  کدام است؟

- (۱)  $\sin\theta+i\cos\theta$  (۲)  $\sin\theta-i\cos\theta$  (۳)  $\sin\theta\frac{\theta}{2}+i\cos\theta\frac{\theta}{2}$  (۴)  $1-i$

۳- اگر  $a$  و  $b$  مقادیر حقیقی باشند و  $x+iy = \frac{1-ae^{ib}}{1-ae^{-ib}}$ ، آن‌گاه:

$$x = \frac{1-a^2}{1+a^2+2a\cos b} \quad (۱)$$

$$y = \frac{2a\sin b}{1+a^2+2a\cos b} \quad (۲)$$

$$x = \frac{2a\cos b}{1+a^2+2a\cos b} \quad (۳)$$

$$y = \frac{2a}{1+a^2+2a\cos b} \quad (۴)$$

۴- اگر سه نقطه  $z_1, z_2, z_3$  از صفحه مختلط در رابطه  $\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = 0$  صدق کند، که در آن  $\alpha, \beta, \gamma$  اعداد حقیقی با شرط  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  می‌باشند، آن‌گاه

- (۱) سه نقطه رئوس یک مثلث متساوی الساقین هستند. (۲) سه نقطه رئوس یک مثلث قائم الزاویه است.  
(۳) سه نقطه در یک راستا هستند. (۴) سه نقطه رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع است.

۵- اگر  $z_1$  و  $z_2$  جواب‌های معادله  $z^2 + z + 1 = i$  باشند،  $|z_1 - z_2|$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{2}$  (۲)  $\sqrt{3}$  (۳)  $\sqrt{5}$  (۴)  $\sqrt{10}$

۶- اگر  $z$  یک عدد مختلط باشد،  $|ze^{\pi i/2} - z|$  برابر کدام است؟

- (۱)  $|z|$  (۲)  $\frac{1}{2}|z|$  (۳)  $\frac{1}{3}|z+1|$  (۴)  $|z-i|$

۷- اگر  $zn = \cos\frac{\pi}{3^n} + i\sin\frac{\pi}{3^n}$ ، آن‌گاه مقدار  $\prod_{m=1}^{\infty} z_m$  برابر کدام است؟

- (۱)  $-1$  (۲)  $1$  (۳)  $\pi i$  (۴)  $\frac{\pi}{2}|a| < 1$

۸- اگر  $|a| < 1$  آن‌گاه مقدار عبارت زیر کدام است؟  $S(\theta) = 1 + a\cos\theta + a^2\cos 2\theta + \dots$

$$\frac{1-a\cos\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} \quad (۱)$$

$$\frac{1-a\cos 2\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} \quad (۲)$$

$$\frac{1-a\cos\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} \quad (۳)$$

$$\frac{1-a\cos 2\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} \quad (۴)$$

۹- مکان نقاط  $\left| \frac{1+z}{1-z} \right| = k$  کدام است؟

- (۱) برای  $k=1$  خط راست و برای  $k \neq 1$  دایره است. (۲) برای  $k=1$  خط راست و برای  $k \neq 1$  بیضی است.  
(۳) برای  $k=1$  دایره و برای  $k \neq 1$  بیضی است. (۴) برای کلیه مقادیر  $k$  یک خط راست است.



۱۰- معادله دایره به مرکز  $(1-2)$  و شعاع ۴ کدام است؟

$$|z - 2 - i| = 4 \quad (1) \quad |z + 2 - i| = 4 \quad (2) \quad |z + 2 + i| = 4 \quad (3) \quad |z - 2 + i| = 4 \quad (4)$$

۱۱- هرگاه  $z = x + iy$  و  $Z$  مزدوج باشد، معادله  $zz = 36$  معرف چه شکلی است؟

(۱) دایره (۲) هذلولی (۳) بیضی (۴) سهمی

۱۲- حاصل عبارت  $\frac{[1+i\sqrt{3}]^8}{2^7(-1+i\sqrt{3})}$  کدام است؟

$$1 \quad (1) \quad -1 \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (3) \quad \frac{-1}{2} \quad (4)$$

۱۳- معادله  $\left| \frac{z-3i}{z+i} \right| = 1$  در صفحه  $Z$  ها، معرف کدام شکل است؟

(۱) بیضی (۲) خط  $y = 0$  (۳) خطهای  $y = x, y = -x$  (۴) خط  $y = 1$