بسم الله الرحمن الرحیم

آمادگی آزمون دکتری

# ریاضیات مهندسی

مجموعه مهندسی برق، مکانیک، هوافضا، مواد، مهندسی پزشکی و شیمی، معماری کشتی سازی، داروسازی، نانو مواد و مجموعه دکتری مکانیک و هوافضا


مؤلف:

**حمید رادمنش**

**عضو هیئت علمی دانشگاه**

رادمنش، حمید
ریاضیات مهندسی رشته / حمید رادمنش
مشاوران صعود ماهان: ۱۴۰۰
۵۰۹ ص: جدول، نمودار (آمادگی آزمون دکتری مجموعه مهندسی)
ISBN: 978-600-458-676 -4
فهرست‌نویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
فارسی ـ چاپ اول
ریاضیات مهندسی
حمید رادمنش
ج ـ عنوان
رده بندی کنگره: ۱۳۹۳ ۹ ر ۲۱٤ ر/ ۲۳۵۳ LB
رده‌بندی دیویی ۳۷۸/۱٦٦٤
کتابخانه ملی ایران ۳٤٦۸٤۱۱

موسسه آموزش عالی آزاد ماهان
www.mahan.ac.ir

انتشارات مشاوران صعود ماهان

❑ **نام کتاب:** ............ **ریاضیات مهندسی**
❑ **مدیران مسئول:** ............ هادی و مجید سیّاری
❑ **مولف:** ............ حمید رادمنش
❑ **برنامه‌ریزی تولید و محتوا:** ............ سمیه بیگی
❑ **ناشر:** ............ مشاوران صعود ماهان
❑ **نوبت و تاریخ چاپ:** ............ اول /۱۴۰۰
❑ **تیراژ:** ............ ۱۰۰۰ نسخه
❑ **قیمت:** ............ ۱/۶۶۰/۰۰۰ ریال
❑ **شابک:** ............ ISBN۹۷۸-۶۰۰-۴۵۸-۶۷۶ -۴

انتشارات مشاوران صعود ماهان:تهران ـ خیابان ولیعصر، بالاتر از تقاطع ولیعصر مطهری، پلاک ۲۰۵۰ ۸۱۰
تلفن: ۸۸۱۰۰۱۱۳ و ۸۸۴۰۱۳۱۳

## مقدمه ناشر

### بنام خدا

ایمان داریم که هر تغییر و تحول بزرگی در مسیر زندگی بدون تحول معرفت و نگرش میسر نخواهد بود. پس بیایید با اندیشه توکل، تفکر، تلاش و تحمل در توسعه دنیای فکریمان برای نیل به آرامش و آسایش توأمان اولین گام را برداریم. چون همگی یقین داریم دانایی، توانایی می‌آورد.

**شاد باشید و دلی را شاد کنید**

***برادران سیاری***

## سخن مولف

خدا را شکر می‌کنم که توانستم مسئولیتی را که بر عهده‌ام نهاده شده بود به سرانجام برسانم. تلاش چندین ساله‌ام و حاصل تدریس ریاضیات مهندسی به دانشجویان، در کتاب حاضر به ثمر نشسته است. امیدوارم که نتیجه این زحمات برای دانشجویان مقطع کارشناسی رشته‌های مهندسی برق، مکانیک، هوافضا، مواد، نفت، شیمی و مهندسی پزشکی، سایر دانشجویان علاقمند و همچنین داوطلبان آزمون کارشناسی ارشد و دکتری تخصصی مفید باشد.

شیوه نگارش و جمع‌آوری موضوعات کتاب به نحوی است که با تاکید بر یادگیری مفاهیم، داوطلبان را از مراجعه به منابع دیگر بی‌نیاز می‌کند. کتاب حاضر حاوی بیش از ۱۵۰۰ تست کنکور آزمون‌های سراسری و دانشگاه آزاد کارشناسی ارشد رشته‌های مختلف مهندسی در سال‌های اخیر است و می‌تواند مرجع خوبی برای تدریس در دوره کارشناسی باشد. در تالیف و گردآوری مطالب این کتاب از منابع مختلفی استفاده شده است تا بهترین موضوعات ارائه شوند.

هر چند سعی شده است تا نگارش این کتاب با دقت کافی انجام شود، اما به دلیل حجم زیاد مطالب ممکن است اشکالاتی وجود داشته باشد، لذا از تمام دانشجویان گرامی صمیمانه تقاضا داریم با ارائه نظرات خود ما را در ارتقای کیفی و کمی این کتاب در چاپ‌های بعدی یاری کنند.

خداوندا به ما توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی همراه، جهاد بی سلاح، کار بی پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی دنیا، مذهب بی عوام، عظمت بی نام، خدمت بی نان، ایمان بی ریا، خوبی بی نمود، گستاخی بی خامی، مناعت بی غرور، عشق بی هوس، تنهایی در انبوه جمعیت و دوست داشتن بی آنکه دوست بداند، را عنایت فرما. جان ما را صفای خود ده و دل ما را هوای خود ده، و چشم ما را ضیای خود ده، و ما را از فضل و کرم خود آن ده که آن به.

حمید رادمنش
دکتری تخصصی مهندسی برق
دانشگاه صنعتی امیرکبیر
Hamid.Radmanesh@aut.ac.ir

## تقدیم با بوسه بر دستان پدرم:

که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی را تجربه نمایم. به او که نمی‌دانم از بزرگی‌اش بگویم یا مردانگی سخاوت، سکوت، مهربانی و .....

پدرم راه تمام زندگی است.

پدرم دلخوشی همیشگی است.

## تقدیم به مادر عزیزتر از جانم:

دریای بیکران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش برایم همه مهر، مادرم هستی من ز هستی توست تا هستم و هستی دارمت دوست

## و به همسرم به صمیمیت باران:

اسطوره زندگیم، پناه خستگیم و امید بودنم

# فهرست مطالب

# فصل اول

## اعداد و توابع مختلط

### ۱-۱ اعدا مختلط

هر عدد مختلط به‌صورت $z = x + iy$ نوشته می‌شود که در آن، $x, y$ اعداد حقیقی بوده و $i = \sqrt{-1}$ به عدد موهومی محض، موسوم است.

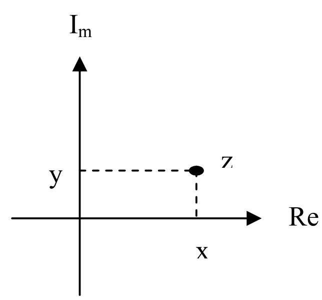
$$i^{2} = -1 \quad \text{و} \quad -i^{2} = 1 \quad \text{و} \quad \mathrm{Re}\,z = x \quad \text{و} \quad \mathrm{Im}\,z = y$$

$$|z| = \sqrt{x^{2} + y^{2}}$$

$$\bar{z} = x - iy$$

$\bar{z}$ ، مزدوج z می‌باشد که در واقع، قرینه نقطه z نسبت به محور x ها می‌باشد.

نکته: از نقطه نظر هندسی، هر عدد مختلط مانند $z = x + iy$ را می‌توان به منزله یک نقطه با مختصات $(x, y)$ در صفحه دکارتی در نظر گرفت که طبیعی است در این دستگاه مختصات، محور **x**ها، محور حقیقی و محور **y**ها، محور موهومی می‌باشد.




**شکل۱-۱ صفحه اعداد مختلط**

نکته: حاصل‌ضرب هر عدد مختلط در مزدوج آن، حاصلی صرفاً حقیقی دارد؛ زیرا اگر $z = a + ib$ فرض شود، ملاحظه می‌شود که:

$$z.\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^{2} - (ib)^{2} = a^{2} + b^{2}$$

بنابراین با توجه به حقیقت فوق، برای محاسبه حاصل تقسیم دو عدد مختلط، کافی است صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب کنیم و مسئله را ادامه دهیم. $(z_2 = c + id, \quad z_1 = a + ib)$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+ib}{c+id}=\frac{a+ib}{c+id}\times\frac{c-id}{a-id}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

**مثال: فرض کنید n، یک عدد حقیقی باشد. مقدار n چند انتخاب شود تا عدد مختلط $z=(n+1)+in$ بر روی دایره واحد $|z|=1$ واقع شود؟**

**حل:** از آنجا که تمام نقاط z باید روی دایره $|z|=1$ واقع شوند، داریم:

$$|z|=1\to|(n+1)+in|\Rightarrow\sqrt{(n+1)^2+n^2}=1\Rightarrow n^2+2n+1+n^2=1\Rightarrow 2n^2+2n=0$$
$$\Rightarrow n=0,-1$$

**مثال: روابط $\begin{cases}\operatorname{Re}z=0\\ \operatorname{Im}z\ge 0\end{cases}$ بیان‌گر چه شکلی در صفحه مختلط می‌باشد؟**

**حل:** از آنجایی که $\operatorname{Re}z=0$ بیان‌گر محور yها و $\operatorname{Im}z\ge 0$ شرط $y\ge 0$ را بیان می‌کند. لذا روابط مذکور، توأماً نیم محور بالایی محور yها را توصیف می‌کند.

**مثال: روابط $|z-1|=\operatorname{Im}z$ ,  $|z-1|=\operatorname{Re}z$ ، چه اشکالی را در صفحه مختلط معرفی می‌کنند؟**

از طرفی چون $|z-1|\ge 0$ است، لذا یک نیم خط به صورت $y\ge 0$ و $x=1$ مورد نظر می‌باشد.

برای قسمت دوم داریم:

$$|z-1|=\operatorname{Re}z\to|x-1+iy|=x\Rightarrow\sqrt{(x-1)^2+y^2}=x$$
$$x^2+1-2x+y^2=x^2$$

پس داریم؛ $x=\frac{1+y^2}{2}$ که بیان‌گر یک سهمی می‌باشد.

**مثال: اگر z توصیف کننده یک متغیر مختلط باشد، ناحیه‌ای که با رابطه $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)>1$ توصیف می‌شود را مشخص کنید؟**

**حل:**

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}\;\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}.\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}\\ \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{-y}{x^2+y^2}\end{cases}$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)>1\Rightarrow\frac{-y}{x^2+y^2}>1\Rightarrow x^2+y^2+y<0\Rightarrow x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{4}$$

مرز ناحیه مورد نظر $x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ می‌باشد و همان‌طور که می‌دانیم، دایره‌ای است به مرکز $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ و شعاع $R=\frac{1}{2}$:

با مشخص کردن مرز، کافی است وضعیت یک نقطه را مشخص کنیم؛ به عنوان مثال $(0,1)$ در خارج دایره قرار دارد و شرط $\frac{-y}{x^2+y^2}>1$ را ارضا نمی‌کند. بنابراین، نقاط داخل دایره‌ای به مرکز $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ و شعاع $R=\frac{1}{2}$ ناحیه مورد نظر است.

**مثال: مکان هندسی نقاطی از صفحه با رابطه $\operatorname{Re}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)=۱$ را مشخص کنید؟**

**حل:**

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{x+i(y-۱)}{x+i(y+۱)}.\frac{x-i(y+۱)}{x-i(y+۱)}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{x^۲+(y^۲-۱)+i(...)}{x^۲+(y+۱)^۲}\right)$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$\frac{x^۲+(y^۲-۱)}{x^۲+(y+۱)^۲}=۱\Rightarrow x^۲+y^۲-۱=x^۲+y^۲+۲y+۱\Rightarrow y=-۱$$

پس مکان هندسی این نقاط خط $y=-۱$ است.

**مثال: چنانچه z یک متغیر مختلط باشد $(z=x+iy)$، رابطه زیر توصیف کننده چه اشکال یا نواحی خواهد بود؟**

**حل:**

$$z\bar{z}=\operatorname{Im}(z^۲)$$
$$z\bar{z}=x^۲+y^۲$$
$$z^۲=(x+iy)^۲=x^۲-y^۲+۲ixy\rightarrow \operatorname{Im}(z^۲)=۲xy$$
$$\Rightarrow x^۲+y^۲=۲xy=x^۲-۲xy+y^۲=۰\Rightarrow (x-y)^۲=۰\Rightarrow x-y=۰$$

به صورت خط $x=y$ خواهد بود.

**نکته:**

اگر $z=x+iy$ فرض شود و $z_۰=x_۰+iy_۰$ یک عدد مختلط معین باشد، به سادگی می‌توان نشان داد مکان هندسی نقاطی از صفحه که با رابطه $|z-z_۰|=R$ مشخص می‌شود، دایرهٔ $(x-x_۰)^۲+(y-y_۰)^۲=R^۲$ می‌باشد، یعنی دایره ای به مرکز $z_۰$ و شعاع R. بنابراین می‌توان رابطه $|z-z_۰|=R$ را به منزله مکان هندسی نقاطی از صفحه دانست که فاصله‌شان تا نقطه $z_0$ عدد ثابت R می‌باشد و بنابراین به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که اگر $z_۰, z_۱$ دو عدد مختلط معین باشند آن‌گاه:

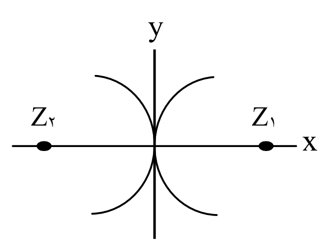
الف) مکان هندسی نقاطی که با رابطه $|z-z_۰||z-z_۱|=R$ توصیف می‌شود، یک بیضی به کانون‌های $z_1$ , $z_0$ است، با شرط:

$$|z_۰-z_۱|<R$$

ب) مکان هندسی نقاطی که با رابطه $|z-z_۰||z-z_۱|=R$ توصیف می‌شود یک هذلولی به کانون‌های $z_۱$، $z_۰$ است، با شرط:

$$|z_۰-z_۱|>R$$

ج) مکان هندسی نقاطی که با رابطه $|z-z_۰||z-z_۱|$ توصیف می‌شود، عمود منصف پاره خطی است که $z_1$ , $z_0$ را به هم متصل می‌کند.




**شکل۱-۲ عمود منصف پاره خط واصل بین $z_۰$ و $z_۱$**

**نکته:** خواص زیر در مجموعه اعداد مختلط برقرار است:

$$\left(\overline{z_1 \pm z_2}\right)=\bar{z}_1+\bar{z}_2 \quad \text{و} \quad |z|=|\bar{z}|$$
$$\left(\overline{z_1 z_2}\right)=\bar{z}_1\bar{z}_2 \quad \text{و} \quad |z_1 z_2|=|z_1||z_2|$$
$$\left(\overline{\frac{z_1}{z_2}}\right)=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad \text{و} \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$$

**مثال: هرگاه $z=a+ib$ فرض شود حاصل $\left|\frac{iz}{\bar{z}}\right|$ چه مقدار است؟**

**حل:** با استفاده از خواص بالا داریم:

$$\left|\frac{iz}{\bar{z}}\right|=\frac{|iz|}{|\bar{z}|}=\frac{|i||z|}{|\bar{z}|}=\frac{|i||a+ib|}{|a-ib|}=\frac{1\times\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$$

**مثال: اگر $z_1$ و $z_2$ جواب‌های معادله $z^2+z+1=i$ باشد حاصل $|z_1-z_2|$ چقدر است؟**

**حل:** همان‌طور که ملاحظه می‌شود معادله فوق، یک معادله درجه دوم است بنابراین داریم:

$$|z_1-z_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\left|\frac{\sqrt{(1)^2-(4)(1)(1-i)}}{1}\right|=\left|\sqrt{4i-3}\right|=\sqrt{|4i-3|}=\sqrt{5}$$

## ۱-۲ بیان منحنی در فرم پارامتری

یک منحنی در صفحه مختلط می‌تواند توسط یک رابطه، پارامتری نظیر $z(t)=x(t)+iy(t)$ معرفی شود و برای مشخص کردن آن باید پارامتر t را بین x و y حذف کرد.

**مثال: منحنی تعریف شده با رابطه** $z(t)=\sin^2 t+i\cos^2 t$ :

الف) دایره‌ای با محیط $2\pi$ است.
ب) دایره‌ای با محیط $\pi$ است.
ج) پاره خطی به طول $\sqrt{2}$ است.
د) پاره خطی به طول ۱ است.

**حل:**

$$z(t)=\sin^2 t+i\cos^2 t \Rightarrow \begin{cases} x=\sin^2 t \\ y=\cos^2 t \end{cases}$$

لذا داریم: $x+y=1$ که بیان‌گر یک خط راست است و چون $x=\sin^2 t\geq 0$ و $y=\cos^2\geq 0$ پس قسمتی از این خط (پاره خط) که در ربع اول قرار گرفته مدنظر است و به سادگی می توان ملاحظه نمود که طول این پاره خط $\sqrt{2}$ است.

**مثال: منحنی $z(t)=\cosh t+i\sinh t$ بیان‌گر چه منحنی‌ای می‌باشد؟**

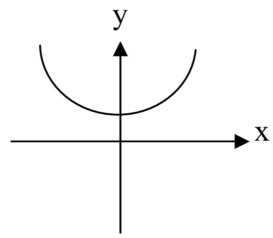
الف) قسمتی از یک بیضی
ب) یک بیضی
ج) قسمتی از یک هذلولی
د) یک هذلولی

**حل:**

$$z(t)=\cosh t+i\sinh t \Rightarrow \begin{cases} x=\cosh t \\ y=\sinh t \end{cases}$$

لذا طبق رابطه $\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$ داریم:

$x^{۲} - y^{۲} = ۱$ که بیان‌گر یک هذلولی است و از آنجا که $x \cosh t \geq ۱$ لذا یکی از شاخه‌های این هذلولی مدنظر است.



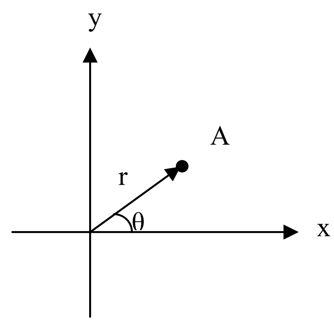

**شکل۱-۳ هذلولی مرتبط با مثال**

## ۱-۳ فرم قطبی اعداد مختلط مختلط

همان‌طوری که می‌دانیم، برای مشخص کردن یک نقطه در صفحه، نیاز به دو مختصه داریم که در مختصات دکارتی این دو مختصه طول و عرض نقطه $\left(x, y\right)$ (x , y) می باشد، در دستگاه مختصات قطبی از دو مختصه $r, \theta$ مطابق شکل زیر استفاده می‌شود:

$OA = r$ : طول شعاع حامل نقطه A

θ: زاویه شعاع حامل نقطه A با جهت مثبت محور xها




**شکل۱-۴ نمایش قطبی اعداد مختلط**

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}} \\ \theta = \tan^{-۱}\dfrac{y}{x} \end{cases} \qquad (۱)$$

بنابراین، نقطه A در مختصات قطبی به صورت $A\left(r,\theta\right)$ نشان داده می‌شود.

در محاسبه θ از رابطه (۱) باید به این نکته توجه داشته باشیم که تمامی زاوایایی که در π با هم اختلاف دارند تانژانت یکسانی دارند، لذا باید به موقعیت نقطه و این که در کدام ربع دستگاه مختصات قرار می‌گیرد، توجه داشته باشیم. حال با استفاده از دستگاه مختصات قطبی می‌توان نوشت:

$$z = x + iy = r\left(\cos\theta + i\,\sin\theta\right) \xrightarrow{\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}} z = r.e^{i\theta}$$

**توجه:**

به خاطر داشته باشید کار کردن با اعداد مختلط وقتی آن‌ها را به صورت قطبی نوشته‌ایم در برخی موارد با سهولت بیشتری انجام می‌گیرد. به عنوان مثال اگر $z_{.}=re^{i\theta}$ و $z_{1}=\rho e^{i\varphi}$ توصیف کننده دو عدد مختلط معین باشند داریم:

$$z_{.}z_{1}=\left(re^{i\theta}\right)\left(\rho e^{i\varphi}\right)=r\rho e^{i(\theta+\varphi)}-r\rho\left(\cos(\theta+\varphi)+i\ \sin(\theta+\varphi)\right)$$

$$\frac{z_{.}}{z_{1}}=\frac{re^{i\theta}}{\rho e^{i\varphi}}=\frac{r}{\rho}e^{i(\theta+\varphi)}=\frac{r}{\rho}\left(\cos(\theta+\varphi)+i\ \sin(\theta+\varphi)\right)$$

$$(\forall n\in N)\qquad z_{.}^{n}=\left(re^{i\theta}\right)=r^{n}e^{in\theta}=r^{m}\left(\cos n\theta+i\ \sin n\theta\right)$$

**نکته:** رابطه $\left(\cos\theta+i\ \sin\theta\right)^{n}=\cos n\theta+i\ \sin n\theta$ به رابطه دمواور معروف است.

**مثال: مطلوب است محاسبه مقدار A:**

$$A=\left(\frac{1-\sqrt{3i}}{1+\sqrt{3i}}\right)^{12}$$

**حل:** نخست اعداد مختلط صورت و مخرج را در فرم قطبی می‌نویسیم:

می‌دانیم نقطه در ربع چهارم واقع است.

$$\sqrt{3i}=\begin{cases}r=\sqrt{1+3}=2\\ \theta=\tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\tan^{-1}\sqrt{3}=\end{cases}=\begin{cases}-\frac{\pi}{3}\\ \pi-\frac{\pi}{3}\end{cases}\Rightarrow 1-\sqrt{3i}=2e^{\frac{-i\pi}{3}}$$

می‌دانیم نقطه در ربع اول واقع است.

$$\sqrt{3i}=\begin{cases}r=\sqrt{1+3}=2\\ \theta=\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1}=\begin{cases}\frac{\pi}{3}\\ \pi+\frac{\pi}{3}\end{cases}\end{cases}\Rightarrow 1+\sqrt{3i}=2e^{\frac{i\pi}{3}}$$

$$=\left(\frac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{2e^{\frac{i\pi}{3}}}\right)^{12}=\left(e^{\frac{-2i\pi}{3}}\right)^{12}=e^{-8i\pi}=\cos\left(-8\pi\right)+i\ \sin\left(-8\pi\right)=1$$

**مثال: اگر z یک عدد مختلط باشد و $|z|=5$ مطلوب است محاسبه عبارت** $\left|ze^{\frac{\pi}{3}i}-z\right|$

**حل:**

$$\left|ze^{\frac{\pi}{3}i}-z\right|=\left|(z)\left(e^{\frac{\pi}{3}i}-1\right)\right|=|z|\left|e^{\frac{\pi}{3}i}-1\right|=|z|\left|\cos\frac{\pi}{3}+i\ \sin\frac{\pi}{3}-1\right|=|z|\left|\frac{-1}{2}+i\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right|5$$

$$\times\sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2}}=5$$

**مثال: فرض کنید داشته باشیم $z_n=\cos\frac{\pi}{2^n}+i\sin\frac{\pi}{2^n}$ مطلوب است محاسبه $\prod_{m=1}^{\infty} z_m$**

**حل:** با نوشتن $z_m$ به فرم قطبی داریم:

$$z_n=\cos\frac{\pi}{2^n}+i\sin\frac{\pi}{2^n}=e^{i\frac{\pi}{2^n}}$$
$$=z_1.z_2.z_3.z_n\ldots=e^{i\frac{\pi}{2^1}}.e^{i\frac{\pi}{2^2}}.e^{i\frac{\pi}{2^3}}\ldots.=e^{i\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\right)}$$

ملاحظه می‌شود $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\right)$ یک تصاعد هندسی است. با استفاده از رابطه $s_\infty=\frac{t_1}{1-q}$ که در آن $t_1$: جمله اول، q قدر نسبت تصاعد (با فرض $|q|<1$) و $s_\infty$ : مجموع بی‌نهایت جمله می‌باشد، داریم:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\sim\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

$$=e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

نکته: با توجه به روابط می‌توان نشان داد:

$$\left.\begin{array}{l} e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \\ e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{i\theta}}{2i}\\ \cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{i\theta}}{2}\end{cases}$$

نیز داریم:

$$\cosh x=\cos ix$$
$$i\sinh x=\sin ix$$

**مثال: اگر $A=\sin(2+3i)$ باشد، قسمت موهومی A را به‌دست آورید؟**

**حل:**

$$\sin(2+3i)=\sin 2.\cos 3i+\cos 2.\sin 3i=\sin 2.\cosh 3+i\cos 2.\sinh 3$$

که ملاحظه می‌شود قسمت موهومی عدد A برابر است با:

$$\mathrm{Im}(A)=(\cos 2).(\sinh 3)$$

**مثال: مطلوب است قسمت حقیقی عدد $A=(\cos 30+i\sin 30)^8$**

**حل:** طبق رابطه دموآور داریم:

$$A=(\cos 30+i\sin 30)^8=\cos(8\times 30)+i\sin(8\times 30)=\cos(240)+i\sin 240=\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

پس داریم $\mathrm{Re}(A)=\frac{-1}{2}$

دو نکته در رابطه با اعداد مختلط

الف) محاسبه ریشه‌های n ام یک عدد مختلط:

هر عدد مختلط، دارای n ریشه n ام می‌باشد و چنانچه داشته باشیم $z=re^{i\theta}$، می‌توان نشان داد:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+۲k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+۲k\pi}{n}\right),\qquad k=۰,۱,...,n-۱$$

یعنی برای مثال:

ریشه هفتم یک عدد مختلط، هفت ریشه (اعم از موهومی و حقیقی) دارد.

ب) محاسبه لگاریتم نپرین یک عدد مختلط $Lnz$:

در صورتی که $z=re^{i\theta}$ یک عدد مختلط معین باشد، می‌توان نشان داد:

$$Lnz=Lnr+i(\theta+۲k\pi)$$

که در آن، k یک عدد صحیح نسبی دلخواه است و لذا لگاریتم نپرین، یک عدد مختلط دارای بی‌شمار جواب است.

**مثال: مطلوب است حاصل عبارت $\sqrt{-i}$.**

**حل:** ابتدا نقطه $-i$ را به فرم قطبی می‌نویسیم:

$$(-i)=\begin{cases}r=۱\\ \theta=\dfrac{-\pi}{۲}\end{cases}$$

می‌دانیم که عبارت $\sqrt{-i}$ دارای دو ریشه می‌باشد:

$$\sqrt{-i}=\sqrt[۲]{۱}\left\{\cos\frac{\frac{-\pi}{۲}+۲k\pi}{۲}+i\sin\frac{\frac{-\pi}{۲}+۲k\pi}{۲}\right\},k=۰,۱$$

$$k=۰\Rightarrow w_۱=\frac{\sqrt{۲}}{۲}-i\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$k=۱\Rightarrow w_۲=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}+i\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

**مثال: عدد مختلط زیر، مفروض است:**

$$z=\frac{۱+i}{۱+i+(۱-i)^۲}$$

مطلوب است محاسبه ریشه‌های دوم این عدد مختلط.

**حل:**

$$z=\frac{۱+i}{۱+i+۱-۱-۲i}=\frac{۱+i}{۱-i}\times\frac{۱+i}{۱+i}=\frac{۱+۲i-۱}{۱+۱}=i$$

$$(-i)=\begin{cases}r=۱\\ \theta=\dfrac{\pi}{۲}\end{cases}$$

$$\sqrt[۲]{z}=\sqrt[۲]{i}=\sqrt[۲]{۱}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{۲}+۲k\pi}{۲}+i\sin\frac{\frac{\pi}{۲}+۲k\pi}{۲}\right),k=۰,۱$$

$k=0 \Rightarrow$ جواب اول $: \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$k=1 \Rightarrow$ جواب دوم $: \cos\frac{5\pi}{4}+i\sin 5\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$

**مثال: حاصل $Ln(-1)$ را به‌دست آورید.**

**حل:** نقطه $(-1)$ را به فرم قطبی می‌نویسیم:

$$(-1)=\begin{cases} r=1 \\ \theta=\pi \end{cases}$$

لذا خواهیم داشت:

$$Ln(-1)=Ln(1)+i(\pi+2k\pi)=i(\pi+2k\pi)$$

لذا $Ln(-1)$ دارای بی‌نهایت مقدار موهومی می‌باشد.

**مثال: حاصل عدد مختلط $z=i^i$ را به دست آورید.**

**حل:** نقطه i را به فرم قطبی می‌نویسیم:

$$(i)=\begin{cases} r=1 \\ \theta=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$lnz=ilni=i\left\{\ln(1)+\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right\}=-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$$

$$z=e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$$

**مثال: مقدار $\overline{\exp z}$ (مزدوج $e^z$) کدام است؟**

الف) $\exp z$ ب) $\exp\bar{z}$ ج) $(\exp z)^{-1}$ د) $\exp z^{-1}$

**حل:**

$$\overline{(e^z)}=\overline{(e^{x+iy})}=\overline{(e^x e^{iy})}=e^x e^{-iy}=e^{x-iy}=\exp(\bar{z})$$

**مثال: حاصل عبارت $\left(\frac{i-\tan\alpha}{i+\tan\alpha}\right)^n$ کدام است؟**

الف) $\left(\frac{i+\tan\alpha}{i-\tan\alpha}\right)$ ب) $\left(\frac{1-i\ \mathrm{tann}\alpha}{i+i\ \mathrm{tann}\alpha}\right)$ ج) $\left(\frac{i+i\ \mathrm{tann}\alpha}{1+i\ \cot n\alpha}\right)$ د) $\left(\frac{1+i\ \mathrm{tann}\alpha}{1-i\ \tan n\alpha}\right)$

**حل:**

$$\left(\frac{i-\tan\alpha}{i+\tan\alpha}\right)^n=\left(\frac{i-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{i+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\right)^n$$

$$\left(\frac{i\cos\alpha-\sin\alpha}{i\cos\alpha+\sin\alpha}\right)^n=\left(\frac{i(\cos\alpha+i\sin\alpha)}{i(\cos\alpha-i\sin\alpha)}\right)^n$$

طبق رابطه دموآور داریم:

$$\frac{\cos n\alpha + i\sin n\alpha}{\cos n\alpha - i\sin n\alpha} = \left(\frac{1+\tan n\alpha}{1-i\tan n\alpha}\right)$$

**مثال: کدام یک از گزینه های زیر ،یکی از ریشه های معادله $z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$ می‌باشد؟**

الف) $i$ ب) $-i$ ج) $\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$ د) هیچکدام

**حل:** با ضرب طرفین معادله $z-1$ بدست می‌آید:

$$(z-1)=\left(z^5+z^4+z^3+z^2+z+1\right)=0 \Rightarrow z^6-1=0 \Rightarrow z^6=1$$

لذا ریشه‌های معادله مذکور؛ $z=\sqrt[6]{1}$ (به جز $z=1$ ) خواهد بود.

$$1=\begin{cases} r=1 \\ \theta=0 \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$z=\sqrt[6]{1}\left\{\cos\frac{0+2k\pi}{6}+i\sin\frac{0+2k\pi}{6}\right\}, k=0,1,2,3,\dots,5$$

به ازای $k=1$ به دست می‌آید:

$$z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

لذا ملاحظه می‌شود که گزینه ج صحیح است.

**مثال: مطلوب است محاسبه عبارت‌های زیر:**

$$A=\ln(-1)$$

**حل:**

دارای بی شمار مقدار می‌باشد:

$$\begin{cases} r=1 \\ \theta=+\pi \end{cases} \Rightarrow \ln(-1)=\ln(1)+i(\pi+2k\pi)=0+i\pi(2k+1)$$

$$B=(1-i)^{2i}$$

از دو طرف $\ln$ می‌گیریم.

$$\ln(\mathrm{B})=\ln(1-\mathrm{i})^{2i}=2i\ln(1-i)$$

$$(1-i)=\begin{cases} r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2} \\ \theta=-\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \ln(1-i)=\ln\sqrt{2}+i\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$$

$$\ln(B)=2i\left[\ln\sqrt{2}+i\left(2k\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right]=2i\ln\sqrt{2}-2\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$$

$$B=\exp\left(-2i\ln\sqrt{2}-2\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)$$

**مثال: فرض کنید $0 \le \theta < 2\pi$ و $z = re^{i\theta}$ روی درستی هر یک از روابط زیر بحث کنید.**

۱) $\overline{e^{z}} = e^{\bar{z}}$ ۲) $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$ ۳) $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$

**حل:** روابط مربوط به گزینه‌های ۱)، ۲) و ۳) اتحادهایی شناخته شده در بحث توابع مختلط هستند، به عنوان مثال:

$$(e^{z}) = \left(e^{x+iy}\right) = \left(e^{x} e^{iy}\right)$$

و از آن جا که هرگاه $z = re^{i\theta}$ آنگاه $\bar{z} = re^{-i\theta}$ خواهیم داشت:

$$\overline{\left(e^{z}\right)} = \left(e^{x} e^{-iy}\right) = e^{x-iy} = e^{\bar{z}}$$

یا:

$$\overline{\sin z} = \overline{\left(\sin\left(x+iy\right)\right)} = \overline{\left(\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y\right)} = \left(\sin x \cosh y - i \cos x \sinh y\right)$$

و از طرفی:

$$\sin\bar{z} = \sin x - iy = \left(\sin x \cosh y - i \cos x \sinh y\right)$$

**مثال: بخش‌های حقیقی و موهومی تابع $f(z) = z^{2}$ را به‌دست آورید.**

**حل:** با استفاده از شکل دکارتی $z$داریم:

$$f(z) = z^{2} = \left(x+ty\right)^{2} + x^{2} - y^{2} + 2txy$$

بنابراین،

$$v = \operatorname{Im}\left(f(z)\right) = 2xy, u = \operatorname{Re}\left(f(z)\right) = x^{2} - y^{2}$$

همچنین شکل قطبی z نتیجه می‌دهد:

$$f(z) = \left(re^{i\cdot}\right)^{2} = r^{2}e^{2i\cdot} = r\cos 2\theta + ir^{2}\sin 2\theta$$

پس $\upsilon = r^{2}\sin 2\theta, \quad u = r^{2}\cos 2\theta$ می‌باشند که همان $u, \upsilon$ مختصات دکارتی است.

**مثال: بخش‌های حقیقی و موهومی تابع $f(z) = \frac{1}{z}$ را نتیجه بگیرید.**

**حل:** شکل دکارتیZ نتیجه می‌دهد:

$$f\left(x+it\right) = \frac{1}{x+it} = \frac{x-iy}{x^{2}+y^{2}}$$

پس

$$\upsilon = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-y}{x^{2}+y^{2}}, u = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^{2}+y^{2}}$$

استفاده از شکل دکارتی $\upsilon = -Sin\,\theta/r, u = Cos\,\theta/r$ را نتیجه می‌دهد.

**مثال: بخش‌های حقیقی و موهومی تابع $f(z) = e^{z}$ را نتیجه بگیرید.**

**حل:** با استفاده از شکل دکارتی داریم:

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{z} + e^{iy} = e^{x}\left(\cos y + i\sin y\right)$$

بنابراین؛

$$\upsilon = \operatorname{Im}(e^{z}) = e^{x}\sin y, u = \operatorname{Re}(e^{z}) = e^{x}\cos y$$

در اینجا شکل قطبی x برای تعیین $\upsilon,u$مناسب نیست.

**مثال: بخش‌های حقیقی و موهومی تابع** $\cosh z = \frac{۱}{۲}\left(e^{z} + e^{-z}\right)$ **را تعیین کنید.**

**حل:**

$$\cosh z = \frac{۱}{۲}\left(e^{x+iy} + e^{-x-iy}\right) = \frac{۱}{۲}e^{x}\left(\cos y + i\sin y\right) + \frac{۱}{۲}e^{-x}\left(\cos y - i\sin y\right)$$
$$= \frac{۱}{۲}\left(e^{x} + e^{-x}\right)\cos y + i\frac{۱}{۲}\left(e^{x} - e^{-x}\right)\sin y = \cosh x.xosy + i\sinh x.\sin y$$

بنابراین

$$\upsilon(xy) = \sinh x.\sin y, u(xy) = \cosh x.\cos y$$

**مثال: بخش‌های حقیقی و موهومی تابع** $f(z) = \sqrt{z}$ **را تعیین کنید؟**

**حل:** در این جا نمی‌توان از شکل دکارتی z استفاده کرد پس از شکل قطبی آن استفاده می‌کنیم. در استفاده از شکل قطبی باید حساسیت $\upsilon(r,\theta), u(r,\theta)$ را نسبت به تغییر آرگومان سنجید. بدین دلیل همواره $z = re^{i(\theta+۲k\pi)}$ در نظر می‌گیریم که در آن $\theta$ آرگومان اصلی z است، پس داریم:

$$f(z) = \sqrt{re^{i(\theta+۲k\pi)}} = \sqrt{r}e^{i(\theta/۲+k\pi)} = \sqrt{r}\cos\left(\frac{\theta}{۲}+k\pi\right) + i\sqrt{r}\sin\left(\frac{\theta}{۲}+k\pi\right)$$

بنابراین برای k های زوج $f(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/۲}$ برای $-\pi \le \theta \le \pi$ است . لذا

$$(۱)\quad \upsilon(r,\theta) = \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{۲}, u(r,\theta) = \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{۲}$$

برای k های فرد $f(z) = \sqrt{r}e^{i(\frac{\theta}{۲}+\pi)}$ برای $-\pi \le \theta \le \pi$ است، لذا

$$(۲)\quad \upsilon(r,\theta) = -\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{۲}, u(r,\theta) = -\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{۲}$$

یعنی تابع $\sqrt{z}$ دارای دو مجموعه‌ی $u,\upsilon$ است که قرینه‌ی یک دیگر نسبت به مبدا مختصات هستند. پس این تابع برای هر مقدار x دو مقدار، یکی برای $u,\upsilon$ روابط (۲)، نتیجه می‌دهد. به همین نحو می‌توان نشان داد که تابع که تابع $f(z) = \sqrt[n]{z}$ برای هر n طبیعی دارای n مجموع متمایز $\upsilon,u$ است.

**مثال: معادله‌ی** $e^{z} + ۲ = ۰$ **را حل کنید (یعنی صفرهای تابع** $e^{z} + ۲$ **را بیابید)**

**حل:**

$$(۱)\quad \operatorname{Re}\left(e^{z} + ۲\right) = e^{x}\cos y + ۲ = ۰$$
$$(۲)\quad \operatorname{Im}\left(e^{z} + ۲\right) = e^{x}\sin y = ۰$$

از رابطه‌ی (۲) نتیجه می‌گیریم $\sin y = ۰$، پس از رابطه‌ی (۱) نتیجه می‌گیریم: $\cos y = -۱$ (حالت $\cos y = ۱$ معادله‌ی ممتنع $e^{x} = -۲$ را نتیجه می‌دهد)، پس $e^{x} = ۲$.

بنابراین $x = \ln ۲, y = (۲k+۱)\pi$ و جواب‌های معادله برای کلیه k های صحیح به صورت زیر است:

$$z = x + iy = \ln ۲ + \left(۲k+۱\right)\pi i \qquad k = ۰, \pm۱, \ldots$$

**مثال: مسیر متعامد خانواده منحنی** $۲xy + ۲x = c$ **را تعیین کنید.**

**حل:** اگر $u = ۲xy + ۲x$، آن‌گاه مزدوج هارمونیک آن برابر $\upsilon = y^{۲} + ۲y - x^{۲} + c$ نتیجه می‌گردد. پس مسیر متعامد خانواده منحنی $y^{۲} + ۲y - x^{۲} = c$ است.

**مثال: یک مزدوج هم‌ساز برای تابع $x^{۳}-۳xy^{۲}$ کدام است؟**

۱) $y^{۳}-۳x^{۲}y$ ۲) $۳x^{۲}y-y^{۳}$ ۳) $۳x^{۲}y+y^{۳}$ ۴) $۳x^{۲}y+۳y^{۳}x$

**حل:** گزینهٔ (۲) صحیح است. چون باید $v$ هارمونیک باشد، فقط تابع گزینه (۲) در معادله $\upsilon_{xx}+\upsilon_{yy}=۰$ صدق می‌کند.

**مثال: فرض کنیم $Z_1$ و $Z_2$ دو عدد مختلط غیر صفر باشند به قسمتی که $\frac{\left|Z_{۱}-\bar{Z}_{۲}\right|}{\left|Z_{۱}+\bar{Z}_{۲}\right|}=۱$ دراین صورت:**

۱) $\operatorname{Re}\left(z_{۱}z_{۲}\right)=۰$ (قسمت حقیقی) ۲) $\operatorname{Re}\left(z_{۱}z_{۲}\right)<۰$

۳) $\operatorname{Im}\left(z_{۱}z_{۲}\right)=۰$ (قسمت موهومی) ۴) $\operatorname{Re}\left(z_{۱}z_{۲}\right)>۰$

**حل:** گزینه (۱) صحیح است. اگر $z_{۱}=i$ و $z_{۲}=۱$ در نظر بگیریم، آن‌گاه $\left|z_{۱}-\bar{z}_{۲}\right|=\left|z_{۱}+\bar{z}_{۲}\right|$. از طرفی چون $\operatorname{Re}\left(z_{۱}z_{۲}\right)=۰, z_{۱}z_{۲}=i$ ، لذا گزینه (۱) صحیح است.

**مثال: مجموعه جواب‌های معادله $\sin z=۲i$ ( $z=x+iy$ مختلط) کدام‌اند؟ (z مجموعه اعداد صحیح است)**

۱)تهی است. ۲) $z_{k}=k\pi+i\ln\left(\sqrt{۵}-۲\right), k\in Z$

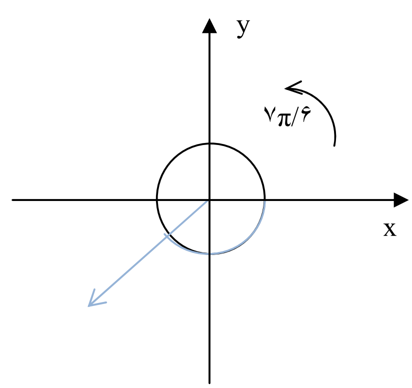
۳) $z_{k}=k\pi+i\ln\left(\sqrt{۵}+۲\right), k\in Z$ ۴) $z_{k}=k\pi+i\ln\left(\sqrt{۵}+۲(-۱)^{k}\right), k\in Z$

حل: گزینه (۳) صحیح است.

**مثال: اگر Z یک عدد مختلط ناصفر، $\ln z=\ln r+i\theta$ و $\frac{-۵\pi}{۶}\leq\theta\leq\frac{۷\pi}{۶}$ باشد،آنگاه $\ln\left(\frac{-۱-i\sqrt{۳}}{۲}\right)$ برابر است با:**

۱) $\frac{i\pi}{۳}$ ۲) $\frac{-۲i\pi}{۳}$ ۳) $\frac{-i\pi}{۳}$ ۴) $\ln\sqrt{۳}+\frac{i\pi}{۳}$

**حل:**




**شکل۱-۵ ناحیه داده شده جهت انتگرال‌گیری**

$$\ln\left(\frac{-۱-i\sqrt{۳}}{۲}\right)=\ln\left(\frac{-۱-i\sqrt{۳}}{۲}\right)+i\arg\left(\frac{-۱-i\sqrt{۳}}{۲}\right)=\ln|۱|+i\left(-\frac{۲\pi}{۳}+۲k\pi\right)=i\left(-\frac{۲\pi}{۳}+۲k\pi\right)$$

چون برای $k=۰$ ، نقطه در فرجه داده شده واقع می‌شود پس جواب $\frac{-۲i\pi}{۳}$ صحیح است.

**مثال: فرض کنید $z=re^{i\theta}$ و $0\le\theta<2\pi$، کدامیک از روابط زیر نادرست است؟**

۱) $\cos\bar{z}=\overline{\cos z}$ ۲) $\sin\bar{z}=\overline{\sin z}$ ۳) $e^{\bar{z}}=\overline{e^{z}}$ ۴) $\ln\bar{z}=\overline{\ln z}$

**حل**: رابطه (۴) نادرست است؛ زیرا مثلا اگر $z=e^{\pi i/2}$ در نظر گرفته شود آن‌گاه در فاصله داده شده $z=e^{3\pi i/2}$ خواهد بود و

$$\ln z=\ln e^{\pi i/2}=-\pi i/2\neq\ln z=\ln e^{3\pi i/2}=3\pi i/2$$

**مثال: اگر $z=6e^{\pi i\theta}$ و $0\le\theta<2\pi$، مقدار $\left|e^{iz}\right|$ کدام است؟**

۱) $e^{\sqrt[3]{3}}$ ۲) $e^{i\sqrt{3}}$ ۳) $e^{-\sqrt[3]{3}}$ ۴) $e^{-i\sqrt{3}}$

**حل**: چون

$$z=6e^{\pi i/3}=6\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=e^{-\sqrt[3]{3}}$$

لذا

$$\left|e^{iz}\right|=\left|e^{3\left(i-\sqrt{3}\right)}\right|=\left|e^{3i}\right|\left|e^{-3\sqrt{3}}\right|=e^{-3\sqrt{3}}$$

**مثال: مقدار $\left|\tanh z\right|$ برای $z=\pi\left(1+i\right)/4$ کدام است؟**

۱) ۱ ۲) $\tanh\pi$ ۳) $\sinh\pi$ ۴) $\cosh\pi$

**حل**: چون

$$\tanh\left[\frac{\pi\left(1+i\right)}{4}\right]=\frac{\sinh\left[\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{4}\right]}{\cosh\left[\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{4}\right]}=\frac{\sinh\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}+i\cosh\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}}{\cosh\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}+i\sinh\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\sinh\frac{\pi}{4}+i\cosh\frac{\pi}{4}}{\cosh\frac{\pi}{4}+i\sinh\frac{\pi}{4}}$$

پس

$$\left|\tanh\left[\pi\left(1+i\right)/4\right]\right|=\frac{\left|\sinh\frac{\pi}{4}+i\cosh\frac{\pi}{4}\right|}{\left|\cosh\frac{\pi}{4}+i\sinh\frac{\pi}{4}\right|}=1$$

**مثال: جواب‌های نامعادله $\left|e^{z^2}\right|\le 1$ برابر است با**

۱) $\left|y\right|\le\left|x\right|$ ۲) $\left|y\right|\ge\left|x\right|$ ۳) $xy\ge 0$ ۴) $xy\le 0$

**حل**: $\left|e^{z^2}\right|=\left|e^{x^2-y^2+2xy}\right|=\left|e^{x^2-y^2}\right|\left|e^{2xy}\right|=e^{x^2-y^2}$

نامعادله $e^{x^2-y^2}\le 1$ نتیجه می‌دهدکه $x^2y^2\le 0$ و یا $\left|x\right|\ge\left|y\right|$

**مثال: مقدار اصلی $\ln(-4)$ کدام است؟**

۱) $2\ln 2$ ۲) $2\ln 2-i\pi$ ۳) $2\ln 2+i\pi$ ۴) $2\ln 2-i\frac{\pi}{2}$

**حل**:گزینه (۳) صحیح است.

$$\ln(-4)=\ln+iArg(-4)=2\ln 2+i\pi$$

## ۱-۴ نواحی در صفحه اعداد مختلط

نقطه $Z_{\cdot}$ را یک نقطه داخلی R نامیم اگر یک $\varepsilon$ همسایگی از $Z_{\cdot}$ در R باشد و آن‌را نقطه خارجی R نامیم اگر یک $\varepsilon$ همسایگی در $R'$ باشد. نقطه را نقطه مرزی نامیم اگر در همسایگی از آن شامل نقاطی از R و $R'$ باشد.

**مجموعه R** باز باشد اگر همه نقاط آن باشد. متمم یک مجموعه باز را یک مجموعه بسته نامیم. مثلا مجموعه نقاط $|z|<۱$ باز و مجموعه نقاط $|z|\geq ۱$ بسته است.

**مجموعه R** راکران‌دار نامیم اگر تمام zهای متعلق بهR در شرط $|z|<۱$ صدق کند، در اینجاM یک عدد حقیقی مثبت است. اگر این شرایط برقرار نباشد مجموعه را بی‌کران نامیم.

**مجموعهR** را همبند نامیم اگر بتوان هر دو نقطه R را با مجموعه ای از خطوط شکسته واقع در R بهم وصل کرد در این غیر این‌صورت R نا همبند است. یک مجموعه همبند باز را حوزه یا دامنه می‌نامیم حوزه R را ساده می‌نامیم اگر متمم آن همبند باشد. به بیان دیگر R شامل هیچ حفره‌ای نباشد.

مجموعه $۱<|z|<۴$ یک حوزه ساده نیست و آن را حوزه مرکب می‌خوانیم.

به طور کلی اگر نقطه $z_{\cdot}=x_{\cdot}+iy_{\cdot}$ مرکز دایره‌ای به شعاع a باشد، آن‌گاه روابط زیر را خواهیم داشت:

نقاط داخل دایره‌ای به شعاع a و مرکز $O(x_{\cdot},y_{\cdot})$ ۱) $|z-z_{\cdot}|<a$

نقاط روی مرز دایره‌ای به شعاع a و مرکز $O(x_{\cdot},y_{\cdot})$ ۲) $|z-z_0|=a$

نقاط خارج دایره‌ای به شعاع a و مرکز $O(x_0,y_0)$ ۳) $|z-z_0|>a$

**مثال: مکان عدد مختلط $z=x+iy$ که در تساوی $z.\bar{z}+(1+i)z+\overline{(1+i)z}+1=0$ صدق کند کدام است؟**

۱)محیط دایره‌ای به مرکز(۱و۱-) و شعاع یک

۲) محیط دایره‌ای به مرکز(۱و۱) و شعاع یک

۳) محیط و داخل دایره‌ای به مرکز(۱و۱) و شعاع یک

۴) محیط دایره‌ای به مرکز(۱-و۱) و شعاع یک

**حل:** گزینه ۲

$$x^۲+y^۲+(۱+i)(x+iy)+(۱-i)(x-iy)+۱=۰$$
$$\Rightarrow x^۲+y^۲+x+iy+ix-y+x-iy-ix-y+۱=۰$$
$$\Rightarrow x^۲+y^۲+۲x-۲y+۱=۰\Rightarrow(x+۱)^۲+(y-۱)^۲=۱$$

**مثال: ناحیه $\operatorname{Re}\left(\frac{۱}{z}\right)>۱$ چه مکانی از صفحه مختلط را مشخص می‌کند؟**

۱)خارج دایره به شعاع $\frac{۱}{۲}$ و به مرکز $\left(۰,\frac{۱}{۲}\right)$

۲) داخل دایره به شعاع $\frac{۱}{۲}$ و به مرکز $\left(-\frac{۱}{۲},۰\right)$

۲)داخل دایره به شعاع $\frac{۱}{۲}$ و به مرکز $\left(۰,\frac{۱}{۲}\right)$

۴) خارج دایره به شعاع $\frac{۱}{۲}$ و به مرکز $\left(-\frac{۱}{۲},۰\right)$

**حل:** اگر $z=x+iy$ دایره آنگاه

$$\operatorname{Re}=\left(\frac{۱}{z}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{۱}{x+iy}\right)=\frac{x}{x^۲+y^۲}>۱$$

یا

$$\left(x-\frac{۱}{۲}\right)^{۲}+y^{۲}<\frac{۱}{۴}$$

**مثال: اگر $Z_1$ و $Z_2$ نقاط دلخواهی از صفحه مختلط باشند، آن‌گاه مکان نقاط $z=\alpha Z_{۱}+\beta Z_{۲}$ با فرض عبارت است از**

۱)پاره خطی که نقاط $\alpha Z_{۱}$ و $\beta Z_{۲}$ را به هم متصل می‌کند.

۲)پاره خطی که مبدأ را به نقطه $\alpha Z_{۱}+\beta Z_{۲}$ متصل می‌کند.

۳)پاره خطی که نقاط $z_{۱}$ و $z_{۲}$ را به هم متصل می‌کند.

۴)پاره خطی که مبدأ را به نقطه $z_{۱}+z_{۲}$ متصل می‌کند.

**حل**:اگر $a\ ,\ \beta\geq ۰$ ،آن‌گاه چون $a=۱-\beta$ پس $۰\leq\beta\leq ۱$ $Z(t)=(۱-\beta)z_{۱}+\beta z_{۲}$ که نمایش پاره خطی است که $z_{۱}$ را به $z_{۲}$ متصل می‌کند.

## ۵-۱ نمونه تست‌های حل شده اعداد مختلط

**۱-اگر** $z=\frac{\sqrt{۲}}{۲}+i\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ **باشد، مقدار** $w=z^{۱۰۰}(۱-i)$ **برابر کدام است؟**

۱) $-۱-i$ ۲) $۱-i$ ۳) $-۱+i$ ۴) $۱+i$

**۲-ساده شده تابع** $f(\theta)=\frac{۱+\sin\theta+i\cos\theta}{۱+\sin\theta-i\cos\theta}$ **کدام است؟**

۱) $\sin\theta+i\cos\theta$ ۲) $\sin\theta-i\cos\theta$ ۳) $\sin\theta\frac{\theta}{۲}+i\cos\frac{\theta}{۲}$ ۴) $۱-i$

**۳-اگر a و b مقادیر حقیقی باشند و** $x+iy=\frac{۱-ae^{ib}}{۱-ae^{ib}}$**، آن‌گاه:**

۱) $x=\frac{۱-a^۲}{۱+a^۲+۲a\cos b}$ ۲) $y=\frac{۲a\sin b}{۱+a^۲+۲a\cos b}$

۳) $x=\frac{۲a\cos b}{۱+a^۲+۲a\cos b}$ ۴) $y=\frac{۲a}{۱+a^۲+۲a\cos b}$

**۴-اگر سه نقطه** $z_۱,z_۲,z_۳$ **از صفحه مختلط در رابطه** $\alpha z_۱+\beta z_۲+\gamma z_۳=۰$ **صدق کند، که در آن** $\alpha,\beta,\gamma$ **اعداد حقیقی با شرط** $\alpha+\beta+\gamma=۰$ **می‌باشند، آن‌گاه**

۱)سه نقطه رئوس یک مثلث متساوی الساقین هستند. ۲)سه نقطه رئوس یک مثلث قائم الزاویه است.

۳)سه نقطه در یک راستا هستند. ۴)سه نقطه رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع است.

**۵-اگر** $z_۱$ **و** $z_۲$ **جواب‌های معادله** $z^۲+z+۱=i$ **باشند،** $|z_۱-z_۲|$ **کدام است؟**

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

**۶-اگر z یک عدد مختلط باشد،** $|ze^{\pi i/۳}-z|$ **برابر کدام است؟**

۱) $|z|$ ۲) $\frac{۱}{۲}|z|$ ۳) $\frac{۱}{۲}|z+۱|$ ۴) $|z-i|$ (

**۷-اگر** $zn=\cos\frac{\pi}{۲^n}+i\sin\frac{\pi}{۲^n}$**، آن‌گاه مقدار** $\prod_{m=۱}^{\infty}z_m$ **برابر کدام است؟**

۱)-۱ ۲)۱ ۳) $\pi i$ ۴) $\frac{\pi}{۲}\ |a|<۱$

**۸-اگر** $|a|<1$ **آن‌گاه مقدار عبارت زیر کدام است؟** $S(\theta)=۱+a\cos\theta+a۲\cos۲\theta+...$

۱) $\frac{۱-a\cos۲\theta}{۱-۲a\cos\theta+a^۲}$ ۲) $\frac{۱-a\cos\theta}{۱-۲a\cos\theta+a^۲}$

۳) $\frac{۱-a\cos۲\theta}{۱-۲a\cos\theta+a^۲}$ ۴) $\frac{۱-a\cos۲\theta}{۱-۲a\cos\theta+a^۲}$

**۹-مکان نقاط** $\left|\frac{۱+z}{۱-z}\right|=k$ **کدام است؟**

۱) برای $k=۱$ خط راست و برای $k\neq۱$ دایره است. ۲) برای $k=۱$ خط راست و برای $k\neq۱$ بیضی است.

۳) برای $k=۱$ دایره و برای $k\neq۱$ بیضی است. ۴) برای کلیه مقادیر k یک خط راست است.

**۱۰-معادله دایره به مرکز (۱و۲-) و شعاع ۴ کدام است؟**

۱) $|z+۲-i|=۴$ ۲) $|z+۲+i|=۴$ ۳) $|z-۲+i|=۴$ ۴) $|z-۲-i|=۴$

**۱۱-هرگاه $z=x+iy$ و z مزدوج باشد، معادله $zz=۳۶$ معرف چه شکلی است؟**

۱)دایره ۲) هذلولی ۳) بیضی ۴) سهمی

**۱۲-حاصل عبارت $\dfrac{\left[۱+i\sqrt{۳}\right]^{۸}}{۲^{۷}\left(-۱+i\sqrt{۳}\right)}$ کدام است؟**

۱)۱ ۲)۱- ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) $\dfrac{-۱}{۲}$

**۱۳-معادله $\left|\dfrac{z-۳i}{z+i}\right|=۱$ در صفحهZ ها، معرف کدام شکل است؟**

۱) بیضی ۲) خط $y=۰$ ۳) خط‌های $y=x\,,y=-x$ ۴) خط $y=۱$